Sedmo predavanje iz Teorije skupova 18/11/2005

Kratki rezime prethodnog predavanja:
Aritmetika kardinalnih brojeva: zbrajanje, množenje i potenciranje
Osnovni Cantorov teorem
Cantorova hipoteza kontinuuma

1.6. Uređeni skupovi

Neka je A neki skup. Svaki podskup R od $A \times A$ nazivamo **binarna relacija**.
Činjenicu $(x, y) \in R$ zapisujemo i xRy. (Prefiksna, infiksna i sufiksna notacija)

Kažemo da je binarna relacija R:

a) **refleksivna**, ako za sve $x \in A$ vrijedi xRx

b) **irefleksivna**, ako ne postoji $x \in A$ tako da vrijedi xRx

c) **simetrična**, ako za sve $x, y \in A$ koji imaju svojstvo xRy vrijedi yRx

d) **antisimetrična**, ako za sve $x, y \in A$ koji imaju svojstvo xRy i yRx vrijedi $x = y$

e) **tranzitivna**, ako za sve $x, y, z \in A$ koji imaju svojstvo xRy i yRz vrijedi xRz

f) **ekvivalencije**, ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna;
za $x \in A$ skup $\{y \in A : xRy\}$ nazivamo klasa ekvivalencije, i označavamo s $[x]$.

Propozicija 1 *Neka je R relacija ekvivalencije na skupu A. Tada za sve $x, y \in A$ vrijedi: $[x] = [y]$ ili $[x] \cap [y] = \emptyset$.*

Kako bismo mogli izreći sljedeću propoziciju prvo ćemo dati definiciju particije skupa.

Definicija 1 *Neka je $A \neq \emptyset$ proizvoljan skup. Kažemo da je familija skupova $\{A_i : i \in I\}$* **particija skupa** *A ako vrijedi:*

a) za sve $i \in I$ je $A_i \subseteq A$;

b) za sve $i \in I$ je $A_i \neq \emptyset$;

c) za sve $i, j \in I$, $i \neq j$, vrijedi $A_i \cap A_j = \emptyset$;

d) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.

Propozicija 2 *Svaka relacija ekvivalencije definira jednu particiju skupa. Vrijedi i obratno, tj. svaka particija skupa definira jednu relaciju ekvivalencije.*

Mi ćemo najviše razmatrati relacije uređaja. Sjetimo se: želimo definirati pojam "nivoa" (točnije: rednog broja) kako bismo definirali kumulativnu hijerarhiju.

Definicija 2 *Neka je R binarna relacija na skupu A. Kažemo da je R relacija* **parcijalnog uređaja** *ako je irefleksivna i tranzitivna. Relaciju parcijalnog uređaja obično označavamo sugestivno s $<$ ili $\prec$. Uređeni par $(A, <)$ nazivamo* **parcijalno uređen skup**.

Ako je $(A,<)$ parcijalno uređen skup tada možemo definirati binarnu relaciju $\leq$ sa:

$$x \leq y \qquad \text{ako i samo ako} \qquad x < y \;\text{ ili }\; x = y.$$

Očito je relacija $\leq$ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. Relacije $<$ i $\leq$ su međusobno definabilne.

Primjer 1 *Primjeri parcijalno uređenih relacija.*

a) Prirodni ili standardni uređaji na skupovima $\mathbb{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbb{Q}$ *i* $\mathbb{R}$. *Prirodni uređaji se definiraju sa:*

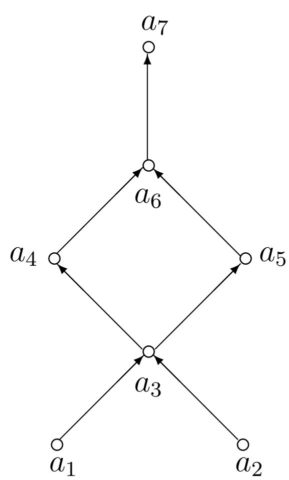
$$x < y \qquad \textit{ako i samo ako} \qquad (\exists z > 0)(x + z = y).$$

b) **Anti–leksikografski** *uređaj na* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

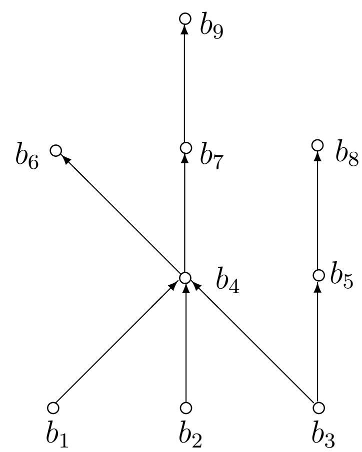
$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \qquad \textit{ako i samo ako} \qquad (y_1 < y_2) \;\; \textit{ili} \;\; (x_1 = x_2 \;\; \textit{i} \;\; y_1 < y_2)$$

c) Ako je A skup tada je $(\mathcal{P}(A), \subset)$ parcijalno uređen skup.

d) Primjeri parcijalno uređenih skupova koji su definirani pomoću grafa:



$A = \{a_1, \ldots, a_7\}$



$B = \{b_1, \ldots, b_9\}$

Definicija 3 *Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup. Kažemo da:*

a) elementi x i y su **usporedivi** *ako vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$; inače kažemo da su elementi x i y* **neusporedivi***;*

b) za $B \subseteq A$ kažemo da je **lanac** *ako su svi elementi skupa B usporedivi;*

c) element $x \in A$ je **maksimalan** *(***minimalan***) ako ne postoji $y \in A$ tako da vrijedi $x < y$ $(y < x)$;*

d) element $x \in A$ je **najveći** *(***najmanji***) ako za sve $y \in A$ vrijedi $y \leq x$ $(x \leq y)$;*

Najveći je onaj element koji je veći od svih ostalih. Maksimalni je onaj element od kojeg ne postoji veći. U primjeru 1 u skupu A imamo dva minimalna elementa, te postoji najveći element. U skupu B tri minimalna elementa i tri maksimalna elementa.

Napomene: Neka je $(A, <)$ neki parcijalno uređen skup. Tada vrijedi:

a) ako je $x \in A$ najveći (najmanji) element tada je x i maksimalni (minimalni) element u skupu A.

b) ako u skupu A ne postoji niti jedan maksimalni (minimalni) element tada A nema ni najveći (najmanji) element;

c) ako u skupu A postoji više od jednog maksimalnog (minimalnog) elementa tada A nema najveći (najmanji) element;

d) ako je $x \in A$ jedinstveni maksimalni (minimalni) element u skupu A tada x ne mora biti najveći (najmanji) element skupa A.

(Primjer: Neka je $A = \mathbb{N} \cup \{\frac{1}{2}\}$. Na skupu $\mathbb{N}$ promatramo standardni uređaj, te definiramo da broj $\frac{1}{2}$ nije usporediv niti s jednim prirodnim brojem. Tada je $\frac{1}{2}$ jedinstveni maksimalni element, ali nije najveći element u skupu A.)

Definicija 4 *Neka je B neprazan podskup parcijalno uređenog skupa $(A, <)$. Za element x od A kažemo da je:*

a) **gornja (donja) međa** *skupa B ako za sve $y \in B$ vrijedi $y \leq x$ $(x \leq y)$;*

b) **supremum (infimum)** *skupa B ako je x najmanja gornja (najveća donja) međa skupa B.*

Ako je $x \in A$ tada skup $p_A(x) = \{y \in A : y < x\}$ nazivamo **početni komad** *elementa x u skupu A.*

Propozicija 3 *Neka je $(A, <)$ konačan parcijalno uređen skup. Tada skup A sadrži maksimalan i minimalan element.*

!!! Dati samo skicu dokaza. Naglasiti da tvrdnja općenito ne vrijedi za beskonačne skupove.
Dokaz. Dokazujemo da postoji maksimalan element. Analogno bi se dokazalo da postoji minimalni element.

Dokaz provodimo indukcijom po broju elemenata skupa A. Ako je A jednočlan skup tada je jedini element ujedno i maksimalni. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, te neka je A skup koji sadrži $n+1$ element. Neka je $a \in A$ proizvoljan, ali fiksiran. Označimo $B = A \setminus \{a\}$. Iz pretpostavke indukcije slijedi da skup B sadrži barem jedan maksimalni element. Neka je $B' \subseteq B$ skup svih maksimalnih elemenata skupa B. Promatramo dva slučaja:

a) element a je neusporediv sa svakim elementom iz B'. Tada je svaki element skupa $B' \cup \{a\}$ maksimalni element skupa A.

b) postoji barem jedan $x \in B'$ tako da su a i x usporedivi.
Ako vrijedi $x < a$ tada je a jedan maksimalni element skupa A. Ako pak je $a < x$ tada je B' skup svih maksimalnih elemenata skupa A. **Q.E.D.**

Definicija 5 *Za parcijalno uređen skup kažemo da je* **linearno uređen** *(potpuno ili totalno) ako su svaka dva njegova različita elementa usporediva.*

Korolar 1 *Neka je $(A, <)$ konačni parcijalno uređen skup. Tada svaki neprazni lanac od A sadrži najmanji i najveći element.*

Definicija 6 *Neka su $(A, <)$ i $(B, \prec)$ parcijalno uređeni skupovi. Kažemo da funkcija $f : A \to B$* **čuva uređaj** *ako vrijedi:*

$$(\forall x, y \in A)(x \leq y \Rightarrow f(x) \preceq f(y))$$

Teorem 1 *(Teorem o fiksnoj točki)*
Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup koji ima najmanji (najveći) element, te neka je $f : A \to A$ funkcija koja čuva uređaj. Tada vrijedi:

> *Ako za svaki $\emptyset \neq B \subseteq A$ postoji supremum (infimum) tada postoji najveća (najmanja) fiksna točka za funkciju f.*

Dokaz. Pretpostavimo da za svaki neprazan podskup od B postoji supremum u skupu A. Neka je

$$B = \{x \in A : x \leq f(x)\}.$$

Ako je $a \in A$ najmanji element tada očito vrijedi $a \in B$, tj. $B \neq \emptyset$.

Neka je $b = \sup B$. Za sve $x \in B$ vrijedi $x \leq b$. Pošto f čuva uređaj tada imamo

$$f(x) \leq f(b).$$

Sada zbog $x \leq f(x)$ (definicija skupa B), te tranzitivnosti, dobivamo da za sve $x \in B$ vrijedi

$$x \leq f(b).$$

Iz toga slijedi da je $f(b)$ jedna gornja međa skupa B. Pošto je $a = \sup B$, tada imamo

$$b \leq f(b) \qquad\qquad (*)$$

Dokažimo sada drugu nejednakost. Iz $(*)$ slijedi $f(b) \leq f(f(b))$, a onda je $f(b) \in B$. Pošto je $b = \sup B$, tada je

$$f(b) \leq b.$$

Preostalo je dokazati da je b najveća fiksna točka. Neka je $a \in A$ tako da vrijedi $f(a) = a$. Posebno tada vrijedi $a \leq f(a)$, pa je $a \in B$. Pošto je $b = \sup B$, tada imamo $a \leq b$.

(Za najmanju fiksnu točku treba promatrati skup $\{x \in A : f(x) \leq x\}$. **Q.E.D.**

Korolar 2 *Knaster–Tarskijev teorem*
Neka je A neprazan skup i $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ funkcija takva da za sve $x, y \subseteq A$ vrijedi

$$x \subseteq y \quad \Rightarrow \quad F(x) \subseteq F(y).$$

Tada postoji $x_0 \subseteq A$ tako da vrijedi $f(x_0) = x_0$.

Napomena 1 1. *Primjenom prethodnog teorema dokazali smo egzitenciju skupa S koja treba za dokaz Cantor, Bernstein, Schröderovog teorema.*

2. *Obično se u Knaster–Tarskijev teoremu navodi da za:*

$$fix(F) = \cap\{x : x \subseteq A,\ F(x) \subseteq x\},$$

$$Fix(F) = \cup\{x : x \subseteq A,\ x \subseteq F(x)\},$$

vrijedi da je $fix(F)$ najmanja, $Fix(F)$ najveća fiksna točka funkcije f.

(Primijetite da je skup $Fix(F)$ upravo definiran kao supremum skupa $\{x : x \subseteq A,\ x \subseteq F(x)\}$, tj. upravo kao i fiksna točka iz dokaza prethodnog teorema o fiksnoj točki.

Definicija 7 *Neka su $(A, <)$ i $(B, \prec)$ parcijalno uređeni skupovi. Svaku bijekciju $f : A \to B$ koja ima svojstvo da f i f^{-1} čuvaju uređaj nazivamo* **sličnost** *(ili izomorfizam).*
Ako postoji sličnost $f : A \to B$, tada kažemo da su A i B **slični skupovi**. *Oznaka: $A \simeq B$.*

Primjer 2

1. $\langle 0,1\rangle \simeq \langle 2,4\rangle$
   Jedna sličnost $f : \langle 2,4\rangle \to \langle 0,1\rangle$ *je zadana s* $f(x) = \dfrac{x-2}{2}$.

2. $\mathbb{N} \simeq 2\mathbb{N}$

3. $\mathbb{R} \simeq \langle -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\rangle$
   Restrikcija $tg|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle} : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \to \mathbb{R}$ *je jedna sličnost.*

Napomena 2 *Ako vrijedi* $A \simeq B$ *tada očito* $A \sim B$*. No, obrat općenito ne vrijedi (npr.* $\mathbb{N} \sim \mathbf{Z}$*, ali ne i* $\mathbb{N} \simeq \mathbf{Z}$*).*

Definicija 8 *Kažemo da je parcijalno uređen skup* $(A, <)$ **gust** *ako sadrži barem dva elementa, i za sve* $x, y \in A$ *takve da je* $x < y$ *postoji* $z \in A$ *tako da vrijedi* $x < z$ *i* $z < y$*.*

Propozicija 4 *(Invarijante sličnosti)*
Neka su A i B slični parcijalno uređeni skupovi. Tada vrijedi:

a) *skup A je linearno uređen ako i samo ako B je linearno uređen;*
b) *skup A ima maksimalni (minimalni) element ako i samo ako B sadrži maksimalni (minimalni) element;*
c) *skup A ima najveći (najmanji) element ako i samo ako skup B ima najveći (najmanji) element;*
d) *skupa A je gust ako i samo ako skup B je gust.*

Primijetite da iz prethodne propozicije npr. slijedi $\mathbb{N} \not\simeq \mathbf{Z}$ i $\mathbb{Q} \not\simeq \mathbf{Z}$.

Zadatak. Definirajte uređaj $\prec$ na $\mathbf{Z}$, odnosno na $\mathbb{Q}$, tako da vrijedi $(\mathbf{Z}, \prec) \simeq (\mathbb{N}, <)$, odnosno $(\mathbb{Q}, \prec) \simeq (\mathbb{N}, <)$.