Šesto predavanje iz Teorije skupova 11/11/2005

Kratak rezime prošlog predavanja:
Dokazali smo da je skup $\mathbb{R}$ neprebrojiv.
Zatim, smo proučavali pojam kardinalnosti.
Dokazali smo Cantor, Schröder, Bernsteinov teorem.

Prvo ćemo razmatrati operacije vezane s kardinalnošću.

Definicija 1 *Neka su* A *i* B *skupovi. Neka je* $A' = A \times \{0\}$ *i* $B' = B \times \{1\}$.
Očito su skupovi A' *i* B' *disjunktni, te vrijedi* $k(A) = k(A')$ *i* $k(B) = k(B')$.
Tada sa $k(A) + k(B)$ *označavamo* $k(A' \cup B')$.

Propozicija 1 *(svojstva zbrajanja)*
Neka su A, B *i* C *skupovi, te* a, b *i* c *redom oznake za njihove kardinalnosti. Tada vrijedi:*

1) $a + b = b + a$

2) $(a + b) + c = a + (b + c)$

3) $a + 0 = a$

4) *ako je* $a \leq b$ *tada je* $a + c \leq b + c$

Dokaz tvrdnje a). Neka su A i B skupovi za koje vrijedi $k(A) = a$ i $k(B) = b$. Pošto je očito $A' \cup B' \sim B' \cup A'$ tada imamo:

$$a + b = k(A) + k(B) = k(A' \cup B') = k(B' \cup A') = k(B) + k(A) = b + a.$$

Zadatak. Pokažite primjerom da općenito ne vrijedi da $a + b = a + c$ povlači $b = c$.

Primjer 1 *Lako je vidjeti da vrijedi:*

$$2 + 2 = 4 \qquad \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \qquad c + \aleph_0 = c \qquad c + c = c$$

Sljedeći korolar je jednostavna posljedica propozicije koja govori da za svaki neprebrojivi skup A i njegov proizvoljan konačan ili prebrojiv podskup B vrijedi $A \setminus B \sim A$.

Korolar 1 *Neka je* A *proizvoljan beskonačan skup. Tada za sve* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $k(A) + n = k(A)$, *te vrijedi* $k(A) + \aleph_0 = k(A)$.

Definicija 2 *Neka su* A *i* B *proizvoljni skupovi. Tada sa* $k(A) \cdot k(B)$ *označavamo* $k(A \times B)$.

Propozicija 2 *(svojstva množenja)*
Neka su A, B i C skupovi, te a, b i c redom oznake za njihove kardinalnosti. Tada vrijedi:

1) $a \cdot b = b \cdot a$

2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

3) $a \cdot 1 = a$

4) ako je $a \leq b$ *tada je* $a \cdot c \leq b \cdot c$

Zadatak. Pokažite primjerom da općenito ne vrijedi da $a \cdot b = a \cdot c$ povlači $b = c$.

Primjer 2 *Lako je vidjeti da vrijedi:*

$$2 \cdot 2 = 4 \qquad \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \qquad c \cdot \aleph_0 = c \qquad c \cdot c = c$$

Zašto je rezultat $c \cdot c = c$, tj. $k(\mathbb{R}^2) = k(\mathbb{R})$, pomalo neočekivan? Zato jer se protivi našoj intuiciji dimenzije. No, to zapravo samo znači da dimenzije nisu sačuvane kod bijektivnih preslikavanja. Brouwer je dokazao da neprekidne bijekcije, čiji inverz je također neprekidan, čuvaju dimenziju.

Na kraju semestra, kada ćemo govoriti o aksiomu izbora, dokazat ćemo da za sve kardinalnosti a i b, od kojih je bar jedna beskonačna, vrijedi

$$a + b = a \cdot b = \max\{a, b\}$$

Definicija 3 *Neka su A i B skupovi. Označimo ${}^{A}B = \{f | f : A \to B\}$. Tada sa $k(B)^{k(A)}$ označavamo $k({}^{A}B)$.*

Objašnjenje oznake ${}^{A}B$:
Namjera je da oznaka bude sugestivna, tj. da ${}^{A}B$ označava skup svih funkcija iz A u B.
Za ilustraciju izračunajmo 3^2. Neka je A dvočlani skup, a B tročlani skup.
Tada po definiciji imamo:

$$3^2 = k(B)^{k(A)} = k({}^{A}B) = k(\{f | f : A \to B\}) = 9$$

Propozicija 3 *Za sve skupove A vrijedi $\mathcal{P}(A) \sim {}^{A}\{0, 1\}$, tj. $k(\mathcal{P}(A)) = 2^{k(A)}$.*

Dokaz. Funkcija $A \supseteq B \mapsto \chi_B : A \to \{0, 1\}$ je očito bijekcija. (Sa χ_B je označena karakteristična funkcija skupa B.

Propozicija 4 *(svojstva potenciranja)*
Neka su A, B i C skupovi, te a, b i c redom oznake za njihove kardinalnosti. Tada vrijedi:

1) $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$
2) $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$
3) $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$
4) *ako je* $a \leq b$ *tada je* $a^c \leq b^c$
5) *ako je* $a \leq b$ *i* $c \neq 0$ *tada je* $c^a \leq c^b$

Primjer 3 *Lako je vidjeti da vrijedi:*

$$2^{\aleph_0} = c, \qquad \aleph_0^{\aleph_0} = c, \qquad c^{\aleph_0} = c$$

Upute:
Kako bi dokazali $2_0^{\aleph} = c$ *dokazujemo da je* ${}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \sim \mathbb{R}$. *U tu svrhu promotrimo sljedeće funkcije:*
${}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \ni (x_n) \;\mapsto\; 0, x_0x_1x_2\ldots \in \mathbb{R}$ *(injekcija)*
$\langle 0,1\rangle \ni 0, x_0x_1x_2\ldots \mapsto (x_n) \in {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$ *(injekcija)*
Sada primjenimo Cantor, Schröder, Bernsteinov teorem, pa imamo $2^{\aleph_0} = c$.

Prvo dokažimo $c^{\aleph_0} = c$. *Vrijedi:* $c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$.

Sada dokazujemo da vrijedi ${\aleph_0}^{\aleph_0} = c$. *Redom imamo sljedeće nejednakosti:*
$\aleph_0^{\aleph_0} \leq c^{\aleph_0} = c$; $\qquad c = 2^{\aleph_0} \leq {\aleph_0}^{\aleph_0}$. *Sada primjenimo Cantor, Schröder, Bernsteinov teorem.*

Teorem 1 *(Osnovni Cantorov teorem teorije skupova)*
Za svaki skup A vrijedi $k(A) < k(\mathcal{P}(A))$, tj. $k(A) < 2^{k(A)}$.

Dokaz. Iz definicije relacije $<$ slijedi da treba dokazati: $k(A) \leq k(\mathcal{P}(A))$ i $k(A) \neq k(\mathcal{P}(A))$.
Ako je $A = \emptyset$ tada je $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. To znači da je u ovom slučaju $k(A) < k(\mathcal{P}(A))$.

Neka je sada $A \neq \emptyset$. Primijetimo prvo da je $k(A) \leq k(\mathcal{P}(A))$, jer je funkcija $f : A \to \mathcal{P}(A)$, koja je definirana sa $f(x) = \{x\}$, injekcija.
Dokažimo sada još $k(A) \neq k(\mathcal{P}(A))$. Pretpostavimo suprotno tj. da je $k(A) = k(\mathcal{P}(A))$, odnosno da vrijedi $A \sim \mathcal{P}(A)$. Neka je $f : A \to \mathcal{P}(A)$ neka bijekcija. Definiramo skup $B = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$. Primijetimo da je $B \neq \emptyset$, jer je $f : A \to \mathcal{P}(A)$ bijekcija pa i surjekcija, a pošto je $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ tada postoji $x \in A$ takav da $f(x) = \emptyset$. No, onda za taj x vrijedi $x \notin f(x)$ tj. $x \in B$.

Neka je $b \in A$ takav da vrijedi $f(b) = B$. Ako bi vrijedilo $b \in B$, tada iz $B = f(b)$ i definicije skupa B slijedi $b \notin f(b)$. Dakle, mora biti $b \notin B = f(b)$. Tada iz definicije skupa B slijedi $b \in B$. Time je dobivena kontradikcija. To znači da ne postoji bijekcija između A i $\mathcal{P}(A)$. **Q.E.D.**

Cantorova hipoteza kontinuuma

Zašto uopće teoriju skupova promatrati aksiomatski?
Već smo bili naglasili da glavno pitanje ovog kolegija je **"Što je skup?"**
Odgovor na to pitanje pokušat ćemo dati uvođenjem aksiomatskog sistema.

Drugi razlog nezadovoljstva s naivnom (neaksiomatskom) teorijom skupova je svakako pojava **paradoksa**. O tome smo već bili govorili na prethodnim predavanjima.

Sljedeći razlog aksiomatskog zasnivanja bio je nemogućnost odgovora na neka pitanja o skupovima koja su se prirodno nametala. Možda jedno od najpoznatijih pitanja, i jedno od razumljivih na ovom samom početku priče o teoriji ZF, je svakako *Cantorova hipoteza kontinuuma*.
To je sljedeća tvrdnja:

> ako je S beskonačan podskup skupa $\mathbb{R}$ tada postoji bijekcija sa S na $\mathbb{N}$ ili sa S na $\mathbb{R}$ (odnosno, kratko $2^{\aleph_0} = \aleph_1$).

Cantorova hipoteza kontinuuma može se izreći i u sljedećoj formi: ne postoji kardinalni broj između $k(\mathbb{N})$ i $k(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

($\aleph_1$ je neposredni sljedbenik od $\aleph_0$. O alefima ćemo nešto reći na samom kraju semestra.
Generalizirana Cantorova hipoteza kontinuuma glasi: $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, gdje je α proizvoljan ordinalni broj.
O ordinalnim brojevima ćemo pričati za nekoliko tjedana).
Generalizirana Cantorova hipoteza može se izreći i u sljedećoj formi: niti za jedan beskonačni skup X ne postoji kardinalni broj između $k(X)$ i $k(\mathcal{P}(X))$.

Dugo se pokušavala dokazati, a i opovrgnuti ta hipoteza. No, svi pokušaji u naivnoj teoriji skupova su bili bezuspješni. P. Cohen je 1963. godine dokazao da je Cantorova hipoteza kontinuuma **neodlučiva** u teoriji ZF. To znači da je u danoj teoriji ne možemo dokazati, a ni opovrgnuti.

Literatura o Cantorovoj hipotezi kontinuuma:
T. Jech, Set Theory
Drake, Singh, Intermediate Set Theory
V. Čačić – magistarski rad (još u izradi)