Peto predavanje iz Teorije skupova

04/11/2005

Kratak rezime prošlog predavanja:
Prvo smo razmatrali prebrojive skupove.
Dokazali smo da je prebrojiva unija prebrojivih skupova ponovno prebrojiv skup.
Kao jednostavnu posljedicu dobili smo da je skup $\mathbb{Q}$ prebrojiv.

Na kraju prošlog predavanja smo počeli proučavati neprebrojive skupove.
Dokazali smo da je $\mathbb{R}$ ekvipotentan sa svakim svojim omeđenim intervalom.
Sada ćemo prvo dokazati Cantorov teorem o neprebrojivosti skupa $\mathbb{R}$.

Teorem 1 *(G. Cantor)*
Skup $\mathbb{R}$ je neprebrojiv.

Dokaz. Očito je dovoljno dokazati da je interval $\langle 0,1\rangle$ neprebrojiv.
Pretpostavimo suprotno. Neka je $\langle 0,1\rangle = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, pri čemu je

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.\ a_{00}\ a_{01}\ a_{02}\ \ldots \\ a_1 &= 0.\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}\ \ldots \\ a_2 &= 0.\ a_{20}\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

Pretpostavljamo da je svaki realan broj a_i dan u decimalnom zapisu koji ima beskonačno mnogo decimala različitih od nule. Npr. umjesto 0.5 pišemo 0.49999...

Za svaki $k \in \mathbb{N}$ definiramo

$$b_k = \begin{cases} a_{kk}+1, & \text{ako je } a_{kk} \in \{0,1,2,\ldots,7\}; \\ 1, & \text{ako je } a_{kk} \in \{8,9\}. \end{cases}$$

Definiramo $b = 0.\ b_0\ b_1\ b_2\ b_3\ \ldots$ Očito je $b \in \langle 0,1\rangle$ (svakako naglasiti da je $b \neq 0$ i $b \neq 1$).
Uočimo $b \neq a_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ (razlikuju se na k-tom decimalnom mjestu).
Time je dobivena kontradikcija. Q.E.D.

U knjizi Proofs from the Book, na čiji je izbor materijala velikim dijelom utjecao veliki mađarski matematičar P. Erdös, jedan od istaknutih dokaza je i Cantorov dokaz neprebrojivosti skupa $\mathbb{R}$.

Napomena 1 *U dokazu prethodnog teorema je korišten dijagonalni postupak. Kao još jednu ilustraciju primjene dijagonalnog postupka dokazujemo da $\mathbb{R}$ nije ekvipotentan sa ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.*

Pretpostavimo suprotno. Neka je $F : \mathbb{R} \to {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ jedna bijekcija. Definiramo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$f(x) = F(x)(x) + 1.$$

Tvrdimo da ne postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi $F(x_0) = f$, tj. da funkcija F nije surjekcija. Ako je $F(x_0) = f$, za neki $x_0 \in \mathbb{R}$, tada imamo da je $F(x_0)(y) = f(y)$, za sve $y \in \mathbb{R}$. Posebno vrijedi za $y = x_0$, tj. imamo $F(x_0)(x_0) = f(x_0)$. No, to je nemoguće, jer je po definiciji funkcije f ispunjeno $f(x_0) = F(x_0)(x_0) + 1$.

Propozicija 1 *Neka je A neprebrojiv skup i $B \subseteq A$ konačan ili prebrojiv. Tada je $A \sim A \setminus B$.*

(Dokaz je sasvim analogan propoziciji s prošlog predavanja: ako je A beskonačan i $B \subseteq A$ konačan tada je $A \setminus B \sim A$).

Dokaz. Pošto je $B \subseteq A$ tada vrijedi $A = (A \setminus B) \cup B$. Iz toga slijedi da je skup $A \setminus B$ neprebrojiv (inače bi imali da je A unija dva prebrojiva skupa, tj. prebrojiv, što je suprotno pretpostavci propozicije). Posebno imamo da je skup $A \setminus B$ beskonačan.

Iz propozicije 5 s prošlog predavanja slijedi da postoji $C \subseteq A \setminus B$ koji je prebrojiv. Neka je $C = \{c_0, c_1, c_2, \ldots\}$. Radi određenosti promatramo slučaj kada je $B = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$ prebrojiv skup. Sada definiramo funkciju $f : A \to A \setminus B$ ovako:

$$f(x) = \begin{cases} c_{2i}, & \text{ako je } \ x = b_i; \\ \\ c_{2i+1}, & \text{ako je } \ x = c_i; \\ \\ x, & \text{ako je } \ x \in A \setminus (B \cup C). \end{cases}$$

Očito je funkcija f bijekcija, pa imamo $A \sim A \setminus B$.

Na sličan način bi dokazali tvrdnju propozicije kada je B konačan skup. Q.E.D.

Primjer 1

1. *Vrijedi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$, tj. skup svih iracionalnih brojeva je ekvipotentan sa skupom $\mathbb{R}$, odnosno skup svih iracionalnih brojeva je neprebrojiv.*

2. *Označimo sa $\mathcal{A}$ skup svih realnih algebarskih brojeva. Nije teško dokazati da je skup $\mathcal{A}$ prebrojiv (vježbe!). Iz prethodne propozicije slijedi $\mathbb{R} \setminus \mathcal{A} \sim \mathbb{R}$. To znači da je posebno $\mathbb{R} \setminus \mathcal{A} \neq \emptyset$. Time smo dokazali egzistenciju transcendentnih brojeva.*
   Transcendenti brojevi se ne mogu konstruirati samo pomoću ravnala i šestara.
   Pošto je dokazano da je broj π transcendentan time je riješen starogrčki problem kvadrature kruga.

   Daleko teže pitanje je navesti jedan transcendentan broj (naravno, i dokazati njegovu transcendentnost). Brojevi π i e su transcendentni, ali je dokaz njihove transcendentnosti dosta kompliciran. Liouvilleov broj je definiran sa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \ldots$$

   Dokaz transcendentnosti Liouvilleovog broja možete pronaći u:
   P. Vuković, Liouvilleovi brojevi, MFL 215 (2004), 182–184
   M. Gobo, Alegebarski i transcendenti brojevi, MFL 123 (1980), 141–143

   O algebarskim i transcendentnim brojevima možete čitati i u:
   B. Pavković, D. Veljan, Elementarna matematika 1, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.
   (str. 350; Informativno)
   S. Kurepa, Matematička analiza 2, Tehnička knjiga, Zagreb
   (str. 367; Dokaz transcendentnosti broja e)
   D. Blanuša, Viša matematika, Tehnička knjiga, Zagreb, 1973.
   (str. 467; Dokaz transcendentnosti brojeva e i π)
   V. Perić, Sedmi Hilbertov problem i trans. projeva e i π, Matematika (stručno–metodički časopis), 1990, br. 1

Korolar 1 *Ako je A beskonačan, a B konačan ili prebrojiv tada vrijedi $A \cup B \sim A$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $A \cap B = \emptyset$. Ako je skup A prebrojiv tada znamo da je to i $A \cup B$, tj. vrijedi $A \cup B \sim A$. Ako je A neprebrojiv onda iz prethodne propozicije slijedi $A \cup B \sim (A \cup B) \setminus B = A$. Ako je $A \cap B \neq \emptyset$ tada definiramo $B' = B \setminus A$. Tada imamo da je B' konačan ili prebrojiv skup, te vrijedi $A \cup B = A \cup B'$ i $A \cap B' = \emptyset$. Iz prethodnog dijela dokaza znamo da tada vrijedi $A \cup B' \sim A$. Zbog jednakosti $A \cup B = A \cup B'$ tada slijedi $A \cup B \sim A$. Q.E.D.

Često se prilikom dokaza neizomorfnosti određenih struktura koristi neekvipotentnost nosača struktura.

Primjer 2

1. *Grupe $(\mathbf{Z}, +)$ i $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ nisu izomorfne.*
   Očito, pošto $\mathbf{Z} \not\sim \mathbb{R}$.

2. *Polja $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ nisu izomorfna.*
   Sjetimo se da vrijedi $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \ : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$. Očito je taj skup ekvipotentan sa $\mathbb{Q}^2$. Bili smo dokazali da je skup $\mathbb{N}^2$ prebrojiv. Iz toga slijedi da je i skup $\mathbb{Q}^2$ također prebrojiv. To znači da je skup $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ prebrojiv.

Zadatak. Definirajte Cantorov trijadski skup, te dokažite da je taj skup neprebrojiv.
(vidi: Internet; S. Mardešić, Cantorov trijadski skup, MFL god. XIV, br. 4, 146–148)

1.5. Kardinalnost

Još u osnovnoj školi ste učili da svaki prirodni broj ima dvostruku ulogu: određuje koliko čega ima, te koji je po redu.
To znači da je svaki prirodan broj kardinalni (glavni) i redni.
Cilj nam je definirati beskonačne kardinalne brojeve koji će mjeriti veličinu beskonačnih skupova, te beskonačne redne brojeve koji će mjeriti poredak beskonačnih skupova.
Prvo ćemo definirati redne brojeve (ordinale), a zatim kardinalne brojeve.
Svaki kardinalni broj je ordinalni, ali ne i obratno.

Tekst koji slijedi služi kao motivacija za aksiomatsku izgradnju teorije skupova. Odnosno, želi se istaknuti problem definicije kardinalnog broja, te navesti neke osnovne teoreme o kardinalnosti.

Definicija 1 *Ako su A i B ekvipotentni skupovi tada kažemo još da imaju istu* **kardinalnost***, te pišemo $k(A) = k(B)$.*

Kardinalnost je zapravo sinonim za ekvipotentnost.
To znači da u ovom trenutku još nismo definirali pojam kardinalnog broja.

Lako je vidjeti da je relacija "biti ekvipotentan" relacija ekvivalencije (na čemu? – na klasi svih skupova!!!). Znamo da svaka relacija ekvivalencije definira particiju. Iz tog razloga čini se da bi mogli definirati kardinalni broj proizvoljnog skupa A kao klasu ekvivalencije obzirom na relaciju $\sim$, odnosno

$$k(A) \ = \ \{B : \ B \text{ je skup takav da } \ A \sim B\}.$$

Problem je da niti za jedan skup $A \neq \emptyset$ klasa $k(A)$ nije skup, tj. to je prava klasa.
Kasnije ćemo definirati kardinalni broj kao točno određeni skup iz klase ekvivalencije.

Radi kraćeg zapisivanja uvodimo neke oznake za kardinalnost:

$$k(\emptyset) = 0$$
$$k(\{0, \ldots, n-1\}) = n$$
$$k(\mathbb{N}) = \aleph_0$$
$$k(\mathbb{R}) = c \quad (\text{"continuum"})$$

Naglasiti da kada npr. napišemo $k(A) = \aleph_0$ tada to zapravo znači $A \sim \mathbb{N}$

Pobrojimo što smo do sada dokazali:

a) $\aleph_0 = k(\mathbb{N}) = k(\{-1, -2, -3, \ldots\}) = k(\mathbb{Q}) = k(Z) = k(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = k(\mathbb{N}^p)$, za sve $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

b) $k(\mathbb{R}) = k([a, b]) = k(\langle a, b \rangle) = c$

c) $k(\mathbb{R}) \neq k(\mathbb{N})$, tj. $c \neq \aleph_0$

d) $c \neq k(\{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\})$

e) $k(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = k(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = k(\mathbb{R} \setminus Z) = c$

Definicija 2 *Kažemo da je* **kardinalnost skupa** A **manja od kardinalnosti skupa** B *ako postoji* $B_1 \subseteq B$ *t.d.* $A \sim B_1$. *Oznaka:* $k(A) \leq k(B)$.
Ako je $k(A) \leq k(B)$, *te još vrijedi* $k(A) \neq k(B)$ *tada kažemo da je* $k(A)$ **strogo manja** *od* $k(B)$.
To označavamo sa $k(A) < k(B)$.

Zadatak. Dokažite: $k(A) \leq k(B)$ ako i samo ako skup A možemo injektivno preslikati u skup B.

Istaknimo sve moguće situacije prilikom uspoređivanja kardinalnosti:

a) $k(A) < k(B)$

b) $k(B) < k(A)$

c) $k(A) \leq k(B)$ i $k(B) \leq k(A)$

d) ne vrijedi $k(A) \leq k(B)$ i ne vrijedi $k(B) \leq k(A)$

Dokazat ćemo da su moguća samo prva tri slučaja.
Kasnije ćemo (ako stignemo) dokazati da je nemogućnost slučaja d) ekvivalentna s aksiomom izbora.

Sljedeći teorem je vrlo važan u teoriji skupova.
Cantor je prvi iskazao tvrdnju teorema, a njegov devetnaest godišnji student F. Bernstein ga je 1897. godine prvi dokazao. Poslije ga je više matematičara dokazalo na razne načine. U Velikoj Britaniji se taj teorem naziva Schröder, Bernsteinov teorem, jer ga je 1898. dokazao i Schröder. U Francuskoj i Italiji se naziva Cantor, Bernsteinov teorem.

Teorem 2 *(Cantor, Schröder, Bernstein)*
Ako postoji injekcija $f : A \to B$ i injekcija $g : B \to A$ tada postoji bijekcija između A i B.

U terminima kardinalnosti teorem se kratko može izreći i na sljedeći način:
Ako je $k(A) \leq k(B)$ i $k(B) \leq k(A)$ tada je $k(A) = k(B)$.

Prije dokaza prethodnog teorema navodimo Knaster – Tarskijev teorem i Banachovu lemu.
Dokaz Knaster–Tarskijevog teorema ćemo u općenitijem obliku dati kasnije.

Teorem 3 *Knaster–Tarskijev teorem o fiksnoj točki.*
Neka je $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ monotona funkcija, tj. za sve $x, y \subseteq A$ takve da je $x \subseteq y$ vrijedi $F(x) \subseteq F(y)$. Tada postoji $x_0 \subseteq A$ tako da vrijedi $F(x_0) = x_0$.

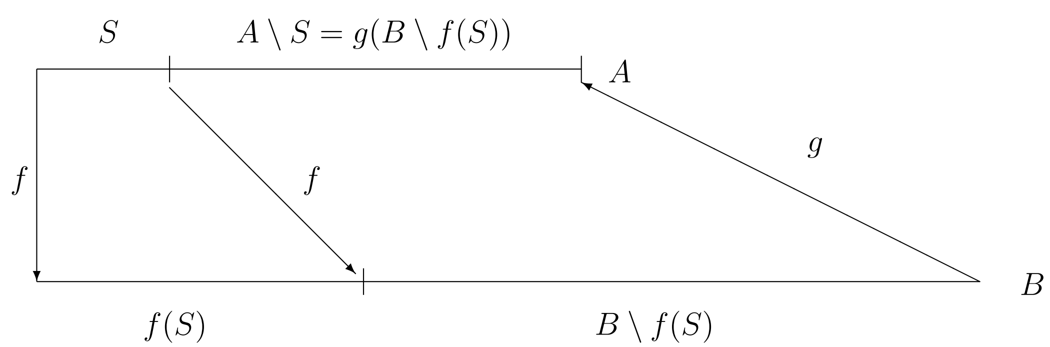
Zadatak. Pokušajte sami dokazati prethodni teorem. Uputa: $x_0 := \cup\{x \subseteq A \ : \ x \subseteq F(x)\}$.

Lema 1 *Banachova lema*
Neka su $f : A \to B$ i $g : B \to A$ proizvoljne funkcije. Tada postoji $S \subseteq A$ tako da vrijedi

$$g(B \setminus f(S)) = A \setminus S.$$

Dokaz. Definiramo funkciju $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ sa $F(x) = [g(B \setminus f(x))]^c$.
Neka su x i y podskupovi od A tako da vrijedi $x \subseteq y$. Tada je $f(x) \subseteq f(y)$, a onda je $B \setminus f(y) \subseteq B \setminus f(x)$.
Iz toga slijedi $g(B \setminus f(y)) \subseteq g(B \setminus f(x))$, a onda $[g(B \setminus f(x))]^c \subseteq [g(B \setminus f(y))]^c$, tj. $F(x) \subseteq F(y)$.
Primjenom Knaster–Tarskijevog teorema slijedi tražena tvrdnja leme. Q.E.D.

Dokaz Cantor, Schröder, Bernsteinovog teorema.
Neka su $f : A \to B$ i $g : B \to A$ injekcije. Neka je $S \subseteq A$ koji ima svojstvo iz Banachove leme, tj. $g(B \setminus f(S)) = A \setminus S$. Dana situacija je prikazana na sljedećoj slici.



Definiramo funkciju $h : A \to B$ sa

$$h(x) = \begin{cases} f(x)\ , & x \in S \\ g^{-1}(x)\ , & x \in A \setminus S \end{cases}$$

Svojstvo skupa S povlači da je h injekcija, te još vrijedi

$$h(A) = h(S \cup (A \setminus S)) = h(S) \cup h(A \setminus S),$$

pošto su S i $A \setminus S$ disjunktni skupovi. Tada imamo

$$h(A) = h(S) \cup h(A \setminus S) = f(S) \cup g^{-1}(A \setminus S) = f(S) \cup (B \setminus f(S)) = B.$$

To znači da je funkcija h surjekcija. **Q.E.D.**

Primjer kojim se ilustrira primjena Cantor, Schröder, Bernsteinovog teorema: $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$.
Jedna injekcija iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}^2$ je dana s $x \mapsto (x, 0)$.
Jedna injekcija iz $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ u $\mathbb{R}$ je dana s $(0,a_0a_1\dots\ ,0,b_0b_1\dots) \mapsto 0,a_0\ 1\ b_0\ 1\ a_1\ 1\ b_1\dots$

Zadatak. Dokažite da je Cantor, Schröder, Bernsteinov teorem ekvivalentan sa sljedećom tvrdnjom:

ako $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$ i $A_1 \sim A_3$ tada je $A_2 \sim A_3$.