Drugo predavanje iz Teorije skupova 15/10/2005

0.3. Neki aksiomi Zermelo–Fraenkelove teorije.
Egzistencija uređenog para i Kartezijevog produkta.
Definicija relacija i funkcija.

Aksiomi o skupovima će biti većinom sljedećeg oblika:

> *ako je A skup (ili više skupova) tada operacija F primjenjena na A opet daje (novi) skup.*

No, prije takvih aksioma iskazujemo dva osnovna aksioma ZF teorije skupova. Želimo još istaknuti da aksiome teorije ZF gradimo pomoću varijabli, zagrada, logičkih veznika ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$), kvantifikatora i simbola $\in$.

Aksiom ekstenzionalnosti
Ako su A i B skupovi takvi da je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$ tada je $A = B$.
Formalno:

$$\forall x \forall y \Big(\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y \Big)$$

Taj aksiom koristimo prilikom dokazivanja skupovnih identiteta.

Domaća zadaća. Dokažite: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ i $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
(Prilikom promatranja razlike skupova nužno je zadati univerzum).

Napomena za studente nastavničkog profila: Iz aksioma ekstenzionalnosti posebno slijedi $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$ i $\{1, 2, 2, 3, 1\} = \{1, 2, 3\}$.

Aksiom praznog skupa: postoji skup koji ne sadrži niti jedan element, tj.

$$\exists x \forall y (y \notin x)$$

Iz aksioma ekstenzionalnosti slijedi da je takav skup jedinstven.
Iz tog razloga možemo uvesti oznaku za taj jedinstveni objekt: $\emptyset$.

Sada navodimo još neke aksiome teorije ZF, i to one koji su nam u ovom trenutku najpotrebniji.

Aksiom partitivnog skupa: ako je x skup tada je kolekcija svih njegovih podskupova također skup, tj. $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$.
Iz aksioma ekstenzionalnosti slijedi jedinstvenost partitivnog skupa, pa uvodimo oznaku $\mathcal{P}(.)$.

Aksiom para: za svaka dva skupa x i y postoji skup čiji su x i y jedini elementi, tj. $\forall x \forall y \exists z \forall u \Big(u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y) \Big)$.
Iz aksioma ekstenzionalnosti slijedi jedinstvenost (neuređenog) para, pa uvodimo oznaku $\{x, y\}$.

Iz aksioma para slijedi da za svaki skup x postoji skup $\{x, x\}$. Po dogovoru taj skup označavamo sa $\{x\}$.

Istaknimo koje skupove za sada znamo: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ...

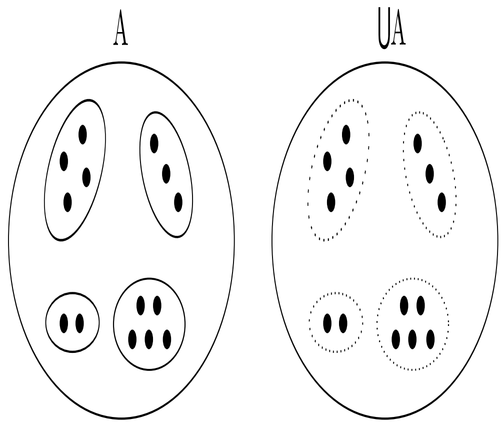
No, iz do sada navedenih aksioma ne slijedi čak ni egzistencija trojke, tj. ako su x, y, z skupovi tada još ne možemo tvrditi da je $\{x, y, z\}$ skup, a kamoli egzistencija nekog beskonačnog skupa.
Primjenom aksioma unije slijedit će da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji n–člani skup.

Aksiom unije: za svaki skup je klasa elemenata svih njegovih elemenata ponovno skup, tj.

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists t (t \in x \land z \in t)).$$

Pokušat ćemo objasniti aksiom unije na jednom primjeru.
Neka je dan skup $A = \{\emptyset,\ \{b, c\},\ \{d\}\}$. Tada aksiom unije tvrdi da je kolekcija objekata, koji su elementi nekog elementa od A, također skup.
U ovom slučaju to znači da je $\{b, c, d\}$ također skup.

Na sljedećoj slici ilustriramo aksiom unije.



Primjenom aksioma ekstenzionalnosti slijedi da je skup y, čija egzistencija se tvrdi u aksiomu unije, jedinstven. Za dani skup x sa $\cup x$ označavamo skup čija se egzistencija tvrdi u ovom aksiomu.

Ako su x i y skupovi tada iz aksioma para slijedi egzistencija skupa $\{x, y\}$. Iz aksioma unije slijedi da je $\cup\{x, y\}$ također skup. Taj skup standardno označavamo sa $x \cup y$.

Ako su $x_1,\ x_2$ i x_3 skupovi tada iz aksioma para slijedi da postoje skupovi $\{x_1,\ x_2\}$ i $\{x_3\}$.
Ponovnom primjenom aksioma para slijedi da postoji skup $\{\{x_1, x_2\},\ \{x_3\}\}$.
Iz aksioma unije slijedi da postoji skup $\cup\{\{x_1,\ x_2\}, \{x_3\}\}$, tj. trojka $\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$.
Ako je $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, te $x_1,\ \ldots,\ x_n$ skupovi, tada bi na sasvim analogan način dokazali da postoji skup $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Uočite da iz navedenih aksioma ne slijedi egzistencija beskonačnog skupa. Kasnije ćemo navesti **aksiom beskonačnosti** iz kojeg će direktno slijediti egzistencija beskonačnog skupa.

Definicija 1 *Neka su x i y skupovi. Tada skup $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ nazivamo uređeni par, i označavamo ga s (x, y).*
(Ovo je **Kolomogorovljeva** *definicija uređenog para).*

Propozicija 1 *Ako vrijedi* $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ *tada je* $x_1 = y_1$ *i* $x_2 = y_2$.

Dokaz. Po pretpostavci imamo $\{\{x_1\}, \{x_1, y_1\}\} = \{\{x_2\}, \{x_2, y_2\}\}$. Iz aksioma ekstenzionalnosti slijedi da su moguća sljedeća dva slučaja:

a) $\{x_1\} = \{x_2\}$; Iz aksioma ekstenzionalnosti slijedi $x_1 = x_2$. Zatim, iz $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ slijedi $\{x_1, y_1\} = \{x_2, y_2\}$, a onda lako slijedi $y_1 = y_2$.

b) $\{x_1\} = \{x_2, y_2\}$;
Iz aksioma ekstenzionalnosti slijedi $x_1 = x_2$ i $x_1 = y_2$, tj. $x_1 = x_2 = y_2$. Zatim, iz $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ slijedi još $\{x_1, y_1\} = \{x_2\}$. Primjenom aksioma ekstenzionalnosti slijedi opet $x_1 = y_1 = x_2$.
Iz svega zaključujemo da je $x_1 = y_1 = x_2 = y_2$.

Definicija 2 *Za sve* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *induktivno definiramo uređenu* n*–torku ovako:*

$$(x_1, x_2) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) = ((x_1, \dots, x_n), x_{n+1})$$

Kako bismo mogli govoriti o Kartezijevom produktu skupova, a onda o relacijama i funkcijama sada navodimo shemu aksioma separacije.

Shema aksioma separacije: ako je x skup i F neko zadano svojstvo[1] tada je klasa svih $z \in x$ koji imaju svojstvo F također skup, tj. formalno

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow (z \in x \land F(z)).$$

Govorimo *shema* aksioma, a ne aksiom, jer tu zapravo imamo beskonačno aksioma – za svako svojstvo F imamo po jedan aksiom.

Propozicija 2 *Neka su* x *i* y *skupovi. Tada je klasa* $\{(x', y') : x' \in x, y' \in y\}$ *također skup. Navedenu klasu nazivamo* **Kartezijev produkt skupova** x *i* y, *te je označavamo sa* $x \times y$.

Dokaz. Iz aksioma unije slijedi da postoji skup $x \cup y$. Iz aksioma partitivnog skupa slijedi da postoji skup $\mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))$. Sada iz sheme aksioma separacije slijedi da je kolekcija
$\{z : z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y)) \land \exists u \exists v (z = (u, v))\}$ skup, tj. $x \times y$ je skup. Q.E.D.

Na sasvim analogan način može se dokazati da za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, te proizvoljne skupove $x_1, \dots, x_n$, je kolekcija $\{(x'_1, \dots, x'_n) : x'_1 \in x_1, \dots, x'_n \in x_n\}$ također skup. Navedena kolekcija se naziva Kartezijev produkt skupova $x_1, \dots, x_n$, te označava sa $x_1 \times \dots \times x_n$.

Definicija 3 **Binarna relacija** *R na skupovima x i y je proizvoljni podskup Kartezijevog produkta $x \times y$. Ako su $x_1, \dots, x_n$ skupovi tada je n–*__mjesna relacija__ *proizvoljni podskup Kartezijevog produkta $x_1 \times \dots \times x_n$.*

Sada se nećemo posebno baviti relacijama. Kasnije ćemo posebno promatrati relacije uređaja.

[1] Točnije, F je proizvoljna formula teorije ZF. Ovdje nećemo strogo definirati pojam formule. Grubo rečeno, formula je konačan niz znakova koji mogu biti varijable, zagrade, lgički veznici, kvantifikatori i simbol $\in$.

Funkcije

Definicija 4 *Neka su $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ skupovi. Neka je $D \subseteq x_1 \times \ldots \times x_n$ i $f \subseteq x_1 \times \ldots \times x_n \times y_1 \times \ldots y_m$ tako da za sve $(a_1, \ldots, a_n) \in D$ vrijedi:*

$$(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m),\ (a_1, \ldots, a_n, b'_1, \ldots, b'_m) \in f \quad \textit{povlači}\ b_i = b'_i,$$

*za sve $i = 1, \ldots, m$. Tada kažemo da je f n-***mjesna funkcija***.*

Ponovimo neke osnovne pojmove i činjenice o funkcijama: *domena, kodomena, identiteta, inkluzija, slika, praslika, graf, ...*

Prisjetimo se načina zadavanja funkcija: *formulom*, *po slučajevima*, *opisno*, *tablicom*, *grafom*, *grafikonom*, ...

Kažemo da su funkcije $f : A \to B$ i $g : C \to D$ *jednake*, te pišemo $f = g$, ako vrijedi $A = C$, $B = D$, te za sve $x \in A$ vrijedi $f(x) = g(x)$.
Radi jednostavnijeg zapisa promatramo samo funkcije jedne varijeble.

Propozicija 3 *Neka je $f : X \to Y$ neka funkcija, te $A, B \subseteq X$. Tada vrijedi:*

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \qquad i \qquad f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

Pokažite primjerom da za presjek općenito ne mora vrijediti jednakost.

Ako je $f : X \to Y$ funkcija i $C \subseteq Y$ tada je $f^{-1}(C) = \{x \in X : f(x) \in C\}$. Skup $f^{-1}(C)$ nazivamo praslika skupa C.

Propozicija 4 *Neka je $f : X \to Y$ neka funkcija, te $C, D \subseteq Y$. Tada vrijedi:*

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \qquad i \qquad f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D).$$

Ponovimo definiciju *kompozicije funkcija*. (*Dokažite da je kompozicija funkcija asocijativna. Je li komutativna?*)

Prisjetimo se pojmova: *restrikcija i proširenje funkcije; injekcija, surjekcija, bijekcija, inverzna funkcija...*

Propozicija 5 *Neka su f i g funkcije takve da je definirana kompozicija $f \circ g$. Tada vrijedi:*

a) ako je funkcija $f \circ g$ surjekcija tada je i funkcija f surjekcija;

b) ako je funkcija $f \circ g$ injekcija tada je i funkcija g injekcija.