MATEMATIČKA LOGIKA 1

01. 09. 2006.

1. U sistemu prirodne dedukcije odredite izvod za

$$(P \to Q) \to R \vdash (\neg P \vee Q) \to R.$$

2. Primjenom glavnog testa ispitajte ispunjivost formule

$$\exists x(Q(x) \vee R(x,x)) \wedge \neg((\forall y(\exists x P(y,x) \to \forall x R(x,y))) \vee \neg(\exists x \forall y R(x,y))).$$

   Ako je formula ispunjiva, odredite neku strukturu koja je njen model.

3. Neka je S skup formula logike sudova, neka je F formula logike sudova te neka vrijedi $S \models F$. Dokažite da postoji konačan podskup $\{F_1, ..., F_n\}$ od S tako da je formula $F_1 \wedge ... \wedge F_n \wedge \neg F$ antitautologija.

4. Neka su S i T skupovi formula logike sudova, neka je F formula logike sudova te neka vrijedi da za svaku interpretaciju I takvu da je $I(S) = 1$ postoji $G \in T$ tako da je $I(F \to G) = 1$. Dokažite da postoji konačan podskup $\{G_1, ..., G_k\}$ od T tako da vrijedi

$$S \models F \to (G_1 \vee G_2 \vee ... \vee G_k).$$

5. Dokažite ili opovrgnite sljedeću tvrdnju:

   Ako je $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ niz skupova logike sudova, onda je $I_{\cup_{n \in \mathbf{N}} S_n} = \cap_{n \in \mathbf{N}} I_{S_n}$.

Zvonko Iljazović