

# MATEMATIČKA LOGIKA

PRVI KOLOKVIJ  
18. STUDENOG 2008.

- (1) (a) Definirajte sljedeće pojmove:
- (1 bod) savršena konjunktivna normalna forma
  - (1 bod) valjana formula
  - (1 bod) konzistentan skup formula
- (b) Iskažite sljedeće tvrdnje:
- (1 bod) Craigova interpolaciona lema
  - (1 bod) generalizirani teorem potpunosti za logiku sudova
  - (1 bod) Lindenbaumova lema
- (c) (4 boda) Neka je  $S$  skup formula logike sudova koji ima svojstvo da je svaki njegov konačan podskup konzistentan. Dokažite da je tada i skup  $S$  konzistentan.
2. (5 bodova) Neka je  $S$  skup formula logike sudova, te  $F$  neka formula, takva da vrijedi  $S \models F$ . Dokažite da postoji  $n \geq 1$  i formule  $F_1, \dots, F_n \in S$  tako da je formula  $F_1 \wedge \dots \wedge F_n \wedge \neg F$  antitautologija.
3. (5 bodova) Postoji li (totalna) interpretacija  $I$  takva da je skup  $S_I = \{F : I(F) = 1\}$  konačan? Navedite jednu takvu, ili obrazložite zašto ne može postojati.
4. (5 bodova) Neka su  $P$ ,  $Q$  i  $R$  različite propozicionalne varijable. Metodom glavnog testa ispitajte je li formula
- $$((P \vee Q) \rightarrow R) \wedge (\neg Q \rightarrow (P \wedge R))$$
- (a) ispunjiva,  
(b) valjana.  
U svakom od podzadataka, ako postoji konkretna interpretacija koja daje argument za odgovor, navedite jednu takvu.
5. (5 bodova) Neka je  $S$  skup svih propozicionalnih varijabli,  $T$  skup svih valjanih formula, te  $V$  skup svih formula logike sudova. Je li skup  $S$  nezavisan? Je li skup  $T$  nezavisan? Postoji li konačan skup aksioma za  $V$ ? Detaljno obrazložite odgovore!
6. (5 bodova) Odredite konjunktivnu normalnu formu formule
- $$((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \vee ((\neg P \vee \neg R) \wedge (Q \wedge R)) .$$