ELEMENTARNA MATEMATIKA 2 – prvi kolokvij

26. travnja 2006.

Z	A	B	C	D
1a	$\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$	$\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CC'}$	$\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CC'}$	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DD'}$
1b	$m = 5,\ n = -1$	$m = 0,\ n = -1$	$m = 2,\ n = -4$	$m = -3,\ n = 2$
1c	-1	-5	5	-5
1d	$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-1}{1}$	$\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-1}{14}$	$7x + 5y + 14z = 31$	$2x + 13y + z = 29$
1e	a	c	a	d
2	$\frac{33}{4}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{29}{4}$	7
3	$\lvert CG\rvert : \lvert CE\rvert = 1:2$	$\lvert CG\rvert : \lvert CE\rvert = 3:7$	$\lvert DG\rvert : \lvert DE\rvert = 3:4$	$\lvert DG\rvert : \lvert DE\rvert = 6:7$
	$\lvert DG\rvert : \lvert DF\rvert = 3:4$	$\lvert DG\rvert : \lvert DF\rvert = 6:7$	$\lvert AG\rvert : \lvert AF\rvert = 3:8$	$\lvert AG\rvert : \lvert AF\rvert = 2:7$
4	$\sqrt{\frac{52}{5}}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{\frac{6}{5}}$	$\sqrt{\frac{82}{5}}$
5	$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$	$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{0}$	$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{-2}$	$\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-4}$

1. zadatak

I. grupa

a) $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{D'T} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

b) Ovi vektori su kolinearni (nijedan od njih nije nulvektor!) akko postoji realan broj λ takav da je $(2, m+1, m-1) = \lambda(-1, n-2, -2)$. Iz toga dobivamo sustav:

$$\begin{aligned} 2 &= -\lambda \\ m+1 &= \lambda(n-2) \\ m-1 &= -2\lambda \end{aligned}$$

Rješenja tog susatva su $\lambda = -2$, $m = 5$, $n = -1$. Dakle, vektori su kolinearni kad je $m = 5$ i $n = -1$.

c) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -1$

d) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{13} = \dfrac{z-1}{1}$

e) Odmah vidimo da pravci imaju jednake vektore smjera $(1, 2, 0)$, pa da su ili paralelni ili se radi o istom pravcu. Međutim, točka $(1, 1, 2)$ leži na drugom ali ne i na pravom pravcu, dakle ne mogu biti isti. Stoga je točan odgovor a)paralelni ali različiti.

II. grupa

a) $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CC'}$

b) Vektori su kolinearni kad je $m = 0$ i $n = -1$.

c) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = -5$

d) $\dfrac{x-1}{7} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z-1}{14}$

e) c)Sijeku se u jednoj točki.

III.grupa

a) $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CC'}$

b) Vektori su kolinearni kad je $m = -7$ i $n = 14$.

c) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = 5$

d) $7x + 5y + 14z = 31$

e) a)Paralelni, ali različiti.

IV.grupa

a) $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DD''}$

b) Vektori su kolinearni kad je $m = -3$ i $n = 2$.

c) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = -5$

d) $2x + 13y + z = 29$

e) d)Isti.

2. zadatak

I. grupa

$$\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c}=2\vec{b}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=$$

$$=2|\vec{b}|^2+\frac{1}{2}|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=8+8-\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ izračunamo iz sljedećeg izraza:

$$1=|\vec{c}|^2=\vec{c}\cdot\vec{c}=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=$$

$$=|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=16+16-4\vec{a}\cdot\vec{b}$$

te na kraju dobivamo da je vrijednost traženog izraza jednaka $\frac{33}{4}$.

II. grupa

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{-1}{4}$, a vrijednost traženog izraza jednaka $\frac{17}{2}$.

III. grupa

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{21}{4}$, a vrijednost traženog izraza jednaka $\frac{29}{4}$.

IV. grupa

$\vec{a}\cdot\vec{c}=1$, a vrijednost traženog izraza jednaka 7.

3. zadatak

Grupa D

Iz uvjetâ zadatka vidimo da je $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, te $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Sada, ako označimo $\overrightarrow{AG} = \lambda\overrightarrow{AF}$ i $\overrightarrow{GE} = \mu\overrightarrow{DE}$, očitu jednakost $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AE}$ možemo pisati kao $\lambda(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}) + \mu(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Budući da su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ linearno nezavisni (inače se pravci DE i AF ne sijeku u točki, već poklapaju), možemo izjednačiti skalare uz $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ na lijevoj i desnoj strani. Dobijemo sustav

$$\lambda + \frac{1}{3}\mu = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2}\lambda - \mu = 0\ ,$$

čije je rješenje $\lambda = \frac{2}{7}$, $\mu = \frac{1}{7}$. Dakle, točka G dijeli dužinu $\overline{AF}$ u omjeru $2:5$ računajući od A, a dužinu $\overline{DE}$ u omjeru $6:1$ računajući od D.

Grupa A

U gornjem zamijenimo $\frac{1}{3}$ s $\frac{2}{3}$, te točke A i C. Dobijemo $\lambda = \frac{1}{2}$ i $\mu = \frac{1}{4}$, što znači da točka G dijeli dužinu $\overline{CE}$ u omjeru $1:1$ (polovište), a dužinu $\overline{DF}$ u omjeru $3:1$ računajući od D.

Grupa B

U gornjem (grupa D) zamijenimo $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{2}$, te točke A i C. Dobijemo $\lambda = \frac{3}{7}$ i $\mu = \frac{1}{7}$, što znači da točka G dijeli dužinu $\overline{CE}$ u omjeru $3:4$ računajući od C, a dužinu $\overline{DF}$ u omjeru $6:1$ računajući od D.

Grupa C

U gornjem (grupa D) zamijenimo $\frac{1}{2}$ s $\frac{2}{3}$, te $\frac{1}{3}$ s $\frac{1}{2}$. Dobijemo $\lambda = \frac{3}{8}$ i $\mu = \frac{1}{4}$, što znači da točka G dijeli dužinu $\overline{AF}$ u omjeru $3:5$ računajući od A, a dužinu $\overline{DE}$ u omjeru $3:1$ računajući od D.

4. zadatak

Jedna grupa

Dane su ravnine

$$\begin{aligned} \pi_1 &\quad \ldots \quad -x+y+3z=0 \\ \pi_2 &\quad \ldots \quad x+9y-3z=0 \\ \pi_3 &\quad \ldots \quad x+4y-3z+5=0. \end{aligned}$$

Odredite međusobni položaj pravaca $p_1 = \pi_1 \cap \pi_3$ i $p_2 = \pi_2 \cap \pi_3$. Ukoliko se oni sijeku, odredite njihovo sjecište; ukoliko se ne sijeku, odredite njihovu udaljenost.

Rješenje. Zapišemo pravce $p_1 = \pi_1 \cap \pi_2$ i $p_2 = \pi_2 \cap \pi_3$ u kanonskom obliku. Dobivamo

$$p_1 \ldots \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{1} \qquad p_2 \ldots \frac{x+9}{3} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}.$$

Dva pravca su paralelni ako i samo ako su im vektori smjera kolinearni. Budući da pravci p_1 i p_2 imaju isti vektor smjera $\overrightarrow{s} = (3,0,1)$, zaključujemo da su ta dva pravca paralelni.

Udaljenost pravaca p_1 i p_2 je udaljenost bilo koje točke na pravcu p_1 od pravca p_2 (i obratno). Računamo udaljenost točke $T_1(-1,-1,0) \in p_1$ od pravca p_2.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r_1} &= (-1,-1,0) \quad \text{je radijusvektor točke na pravcu } p_1 \\ \overrightarrow{r_2} &= (-9,1,0) \quad \text{je radijusvektor točke na pravcu } p_2 \\ \overrightarrow{s} &= (3,0,1) \quad \text{je vektor smjera pravca } p_2 \end{aligned}$$

Sada ćemo iskoristiti formulu za udaljenost točke od pravca (visina paralelograma $= \frac{\text{povrsina}}{\text{duljina baze}}$):

$$d = \frac{|(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}) \times \overrightarrow{s}|}{|\overrightarrow{s}|} = \frac{\sqrt{2^2+8^2+6^2}}{\sqrt{3^2+0^2+1^1}} = \frac{\sqrt{104}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{52}{5}}.$$

Naime,

$$(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}) \times \overrightarrow{s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 8 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2,-8,6).$$

□

Ostale grupe

Rješenja su: $\sqrt{6}$, $\sqrt{\frac{6}{5}}$, $\sqrt{\frac{82}{5}}$.

5. zadatak

- Grupa A

  5. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi kroz točku $(3, 2, 0)$, siječe pravac $\frac{x-4}{3} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-3}{2}$ i okomit je na njega.

     Rješenje: Neka je T točka $(3, 2, 0)$, p pravac $\frac{x-4}{3} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-3}{2}$ i q pravac čiju jednadžbu tražimo.
     Pravci p i q se sijeku, pa leže u nekoj ravnini. Ta ravnina Π je određena točkom $T(3, 2, 0)$, vektorom smjera $\overrightarrow{s_p} = (3, -4, 2)$ i vektorom $\overrightarrow{TT_1}$, gdje je $T_1(4, -3, 3)$ točka na pravcu p. Jednadžba ravnine Π je

     $$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

     odnosno $2x + 7y + 11z - 20 = 0$.
     Pravac q leži u ravnini Π, pa je $\overrightarrow{s} \perp \overrightarrow{n} = (2, 7, 11)$. Dalje, q je okomit na pravac p, pa je $\overrightarrow{s} \perp \overrightarrow{s_p} = (2, 7, 11)$. Slijedi

     $$\overrightarrow{s} \parallel \overrightarrow{n} \times \overrightarrow{s_p} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 7 & 11 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = (58, 29, -29) = 29(2, 1, -1).$$

     Dakle, pravac q je dan jednadžbom $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$.

- Grupa B

  $$\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{0}$$

- Grupa C

  $$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{-2}$$

- Grupa D

  $$\frac{x-3}{-3} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{4}$$