

OPĆA TOPOLOGIJA 2010/11

Deveta tjedna zadaća

7. svibnja 2012.

1. Dokaži da u regularnom prostoru svaki par točaka ima okoline čija su zatvorenja disjunktna.
2. Dokaži da je svaki totalno uređen skup s uređajnom topologijom — regularan.
3. Neka je $p: X \rightarrow Y$ neprekidna zatvorena surjekcija. Dokaži da ako je X normalan onda je i Y normalan.
4. Dokaži da je zatvoren potprostor normalnog prostora — normalan.
5. Neka su X_α neprazni. Dokaži da ako je produkt $\prod_\alpha X_\alpha$ Hausdorffov, odnosno regularan, odnosno normalan, onda su takvi i svi X_α .
6. Dokaži da je svaki lokalno kompaktan Hausdorffov prostor — regularan.
7. Kaže se da je prostor X **potpuno normalan** ako je svaki potprostor od X normalan. Dokaži da je X potpuno normalan ako i samo ako je on T_1 prostor i za svaki par **separiranih** skupova A i B , tj. takvih da je $\overline{A} \cap B = \emptyset$ i $\overline{B} \cap A = \emptyset$, postoje disjunktni otvoreni skupovi koji ih sadrže. [Uputa: Ako je X potpuno normalan promatraj $X \setminus (\overline{A} \cap \overline{B})$.]
8. Koji su od sljedećih prostora potpuno normalni?
 - (a) Potprostor potpuno normalnog prostora.
 - (b) Dobro uređen skup s uređajnom topologijom.
 - (c) Produkt dvaju potpuno normalnih prostora.
 - (d) Metrizabilan prostor.
 - (e) Kompaktan Hausdorffov prostor.
 - (f) Regularan prostor s prebrojivom bazom.
 - (g) Prostor \mathbb{R}_ℓ .
9.
 - (a) Pokaži da je svaki povezan normalan prostor koji ima više od jedne točke, neprebrojiv.
 - (b) Pokaži da je svaki povezan regularan prostor koji ima više od jedne točke, neprebrojiv. [Uputa: Svaki prebrojiv prostor je Lindelöfov.]
10. Za normalan prostor kaže se da je **savršeno normalan** ako je svaki zatvoren skup G_δ -skup.
 - (a) Pokaži da je svaki metrizabilan prostor savršeno normalan.
 - (b) Pokaži da je svaki savršeno normalan prostor, potpuno normalan, tj. svaki je njegov potprostor normalan.
 - (c) Koji je od poznatih prostora potpuno normalan ali nije savršeno normalan?
11. Dokaži sljedeći

Teorem: Neka je X normalan prostor. Podskup $A \subseteq X$ je zatvoren G_δ -skup u X ako i samo ako postoji neprekidna funkcija $f: X \rightarrow [0, 1]$ takva da je $f(x) = 0$ za sve $x \in A$ i $f(x) > 0$ za sve $x \notin A$.

Za ovakvu se funkciju kaže da **iščezava točno na A** .

12. Pokaži da je svaki lokalno kompaktan Hausdorffov prostor, potpuno regularan.
13. Neka je X potpuno regularan prostor, a A i B disjunktni zatvoreni podskupovi. Pokaži da ako je A kompaktan onda postoji neprekidna funkcija $f: X \rightarrow [0, 1]$ takva da je $f(A) = 0$ i $f(B) = 1$.