OPĆA TOPOLOGIJA 2011/12

Šesta tjedna zadaća

19. Ožujka 2012.

1. Neka je $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz povezanih potprostora od X takvih da je $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ za sve n. Dokaži da je tada skup $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ povezan.

2. Za prostor kažemo da je ***totalno nepovezan*** ako su jedini povezani potprostori jednotočkovni skupovi. Dokaži da ako X ima diskretnu topologiju onda je X totalno nepovezan. Vrijedi li i obratno?

3. Je li prostor $\mathbb{R}_\ell$ povezan? Obrazloži!

4. Odredi je li prostor $\mathbb{R}^\omega$ u uniformnoj topologiji povezan ili ne.

5. (a) Pokaži da nikoja dva prostora $\langle 0,1\rangle$, $\langle 0,1]$ i $[0,1]$ nisu međusobno homeomorfna.

   (b) Pretpostavimo da postoje smještenja $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to X$. Primjerom pokaži da X i Y ne moraju biti homeomorfni.

   (c) Pokaži da za $n > 1$ prostori $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}$ nisu homeomorfni.

6. Uz leksikografski uređaj, koji su od sljedećih skupova linearni kontinuumi?

   (a) $\mathbb{N} \times [0,1\rangle$

   (b) $[0,1\rangle \times \mathbb{N}$

   (c) $[0,1\rangle \times [0,1]$

   (d) $[0,1] \times [0,1\rangle$.

7. (a) Je li produkt putevima povezanih prostora nužno putevima povezan?

   (b) Ako je $A \subseteq X$ putevima povezan, mora li onda i $\overline{A}$ biti putevima povezan?

   (c) Ako je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje i X je putevima povezan, mora li onda i $f(X)$ biti putevima povezan?

   (d) Ako je $\{A_\alpha\}_\alpha$ familija putevima povezanih potprostora od X takvih da je $\bigcap_\alpha A_\alpha \neq \emptyset$, je li unija $\bigcup_\alpha A_\alpha$ nužno putevima povezana?

8. $\mathbb{R}$ je neprebrojiv. Pokaži da ako je A prebrojiv podskup od $\mathbb{R}^2$ onda je $\mathbb{R}^2 \setminus A$ putevima povezan. [*Uputa:* Koliko pravaca prolazi jednom točkom u $\mathbb{R}^2$?]

9. Što su komponente i komponente povezanosti putevima prostora $\mathbb{R}_\ell$?
   Koja su preslikavanja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\ell$ neprekidna?

10. (a) Što su komponente i komponente povezanosti putevima prostora $\mathbb{R}^\omega$ u produktnoj topologiji?

    (b) Promotrimo $\mathbb{R}^\omega$ s uniformnom topologijom. Pokaži da $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots)$ pripadaju istoj komponenti od $\mathbb{R}^\omega$ ako i samo ako je niz $\mathbf{x} - \mathbf{y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots)$ omeđen. [*Uputa:* Dovoljno je promatrati slučaj $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.]

(c) Promotrimo $\mathbb{R}^\omega$ s box topologijom. Pokaži da nizovi $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ pripadaju istoj komponenti ako i samo ako je niz $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ kad-tad jednak nuli. [*Uputa:* Pokaži da ako niz $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ nije kad-tad jednak nuli tada postoji homeomorfizam h prostora $\mathbb{R}^\omega$ na sama sebe takav da je niz $h(\mathbf{x})$ omeđen a niz $h(\mathbf{y})$ neomeđen.]

11. Pokaži da je uređeni kvadrat I_o^2 (topologija inducirana leksikografskim uređajem) lokalno povezan ali nije lokalno putevima povezan. Što su komponente povezanosti putevima prostora I_o^2?

12. (a) Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ dvije topologije na skupu X i neka $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$. Koja je posljedica kompaktnosti od X u jednoj od tih topologija na kompaktnost od X u drugoj?

    (b) Pokaži da ako je X kompaktan Hausdorffov prostor u obje topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$, onda su topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ ili jednake ili neusporedive.

13. Pokaži da je svaki kompaktan potprostor metričkog prostora omeđen i zatvoren. Nađi primjer metričkog prostora u kojem nije svaki omeđen i zatvoren potprostor kompaktan.

14. Neka su A i B disjunktni kompaktni potprostori Hausdorffova prostora X. Pokaži da postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V koji sadrže A odnosno B.

15. Dokaži da ako je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje kompaktnog prostora X u Hausdorffov prostor Y, onda je f zatvoreno preslikavanje, tj. slika svakog zatvorenog podskupa od X je zatvoren podskup od Y.