OPĆA TOPOLOGIJA 2011/12

Deseta tjedna zadaća

14. svibnja 2012.

1. Pokaži primjerom da Hausdorffov prostor s prebrojivom bazom ne mora biti metrizabilan.

2. Neka je X kompaktan Hausdorffov prostor. Dokaži da je X metrizabilan ako i samo ako ima prebrojivu bazu.

3. Za prostor X kažemo da je ***lokalno metrizabilan*** ako svaka točka ima okolinu koja je metrizabilna u relativnoj topologiji. Dokaži, bez korištenja Nagata-Smirnovljeva teorema metrizacije i/ili particije jedinice, da je kompaktan Hausdorffov prostor metrizabilan ako i samo ako je lokalno metrizabilan. [*Uputa:* Pokaži da je X konačna unija otvorenih podskupova od kojih svaki ima prebrojivu bazu.]

4. Dokaži, bez korištenja Nagata-Smirnovljeva teorema metrizacije i/ili particije jedinice, da je regularan Lindelöfov prostor metrizabilan ako i samo ako je lokalno metrizabilan. [*Uputa:* Zatvoren potprostor Lindelöfova prostora je Lindelöfov.] Regularnost je bitna. Gdje je u dokazu upotrijebljena?

5. Za familiju $\mathcal{A}$ podskupova od X kažemo da je ***prebrojivo centrirana*** ili da ***ima svojstvo prebrojivih presjeka*** ako svaka prebrojiva potfamilija od $\mathcal{A}$ ima neprazan presjek. Pokaži da je prostor X Lindelöfov ako i samo ako je za svaku prebrojivo centriranu familiju $\mathcal{A}$ podskupova od X presjek $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \overline{A}$ neprazan.

6. Promotri sljedeće tri tvrdnje:

   (i) Neka je X skup a $\mathcal{A}$ prebrojivo centrirana familija podskupova od X. Tada postoji familija $\mathcal{D}$ podskupova od X takva da $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{A}$ i $\mathcal{D}$ je maksimalna s obzirom na svojstvo prebrojivih presjeka. (Ovo odgovara lemi 37.1.)

   (ii) Ako je familija $\mathcal{D}$ podskupova od X maksimalna s obzirom na svojstvo prebrojivih presjeka, onda presjek svake prebrojive potfamilije od $\mathcal{D}$ pripada familiji $\mathcal{D}$. Nadalje, ako je A podskup od X koji siječe svaki element familije $\mathcal{D}$, onda je $A \in \mathcal{D}$. (Ovo odgovara lemi 37.2.)

   (iii) Produkti Lindelöfovih prostora su Lindelöfovi.

   (a) Pokaži da (i) i (ii) zajedno impliciraju (iii).

   (b) Pokaži da tvrdnja (ii) vrijedi.

   (c) Kao što znamo, produkt Lindelöfovih prostora ne mora biti Lindelöfov ($\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ nije Lindelöfov iako $\mathbb{R}_\ell$ je). Zbog toga (i) ne vrijedi. Na kojem mjestu u dokazu propada pokušaj generalizacije leme 37.1 o postojanju maksimalne centrirane familije, na slučaj prebrojivo centriranih familija?

7. (a) Pokaži da je svaka neprekidna realna funkcija definirana na S_Ω kad-tad konstantna. [*Uputa:* Dokaži najprije da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\alpha \in S_\Omega$ takav da je $|f(\beta) - f(\alpha)| < \epsilon$ za sve $\beta > \alpha$. Zatim za $\epsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, promotri pripadne točke α_n.]

   (b) Pokaži da su jednotočkovna kompaktifikacija od S_Ω i Stone-Čechova kompaktifikacija βS_Ω ekvivalentne.

   (c) Zaključi kako su sve kompaktifikacije od S_Ω ekvivalentne jednotočkovnoj kompaktifikaciji $S_\Omega^\bullet$ tj. prostoru $\overline{S}_\Omega$.

8. Neka je X potpuno regularan prostor. Pokaži da je X povezan ako i samo ako je βX povezan. [*Uputa:* Ako je $X = A \sqcup B$ separacija od X, promotri realnu funkciju za koju je $f(x) = 0$ za $x \in A$ i $f(x) = 1$ za $x \in B$.]

9. Uz koje uvjete metrizabilan prostor ima metrizabilnu kompaktifikaciju?

10. Neka je Y proizvoljna kompaktifikacija od X, a βX je Stone-Čechova kompaktifikacija. Dokaži da postoji neprekidna zatvorena surjekcija $g\colon \beta X \twoheadrightarrow Y$ koja je identiteta na X.

    [Ovaj zadatak precizira što znači kada kažemo da je βX *maksimalna* kompaktifikacija od X: Svaka je kompaktifikacija od X ekvivalentna kvocijentnom prostoru Stone-Čechove kompaktifikacije βX.]

11. Dokaži da je svaka mnogostrukost regularna, dakle i metrizabilna. Gdje je iskorištena činjenica da je mnogostrukost Hausdorffov prostor?

12. Hausdorffovo svojstvo je bitan uvjet u definiciji mnogostrukosti — on nije posljedica ostalih uvjeta u definiciji. Promotri sljedeći prostor: Neka je X unija skupa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ i dvočlanog skupa $\{p, q\}$, ($p, q \notin \mathbb{R}$). Bazu topologije na X neka čine svi otvoreni intervali u $\mathbb{R}$ koji ne sadrže nulu, zajedno sa svim skupovima oblika $\langle -a, 0\rangle \cup \{p\} \cup \langle 0, a\rangle$ i svim skupovima oblika $\langle -a, 0\rangle \cup \{q\} \cup \langle 0, a\rangle$. Prostor X zvat ćemo ***pravac s dva ishodišta***.

    (a) Provjeri da opisana familija zaista čini bazu topologije na X.

    (b) Pokaži da je svaki od potprostora $X \setminus \{p\}$ i $X \setminus \{q\}$ homeomorfan prostoru $\mathbb{R}$.

    (c) Pokaži da X je T_1-prostor ali da nije Hausdorffov.

    (d) Pokaži da X ima sva svojstva 1-mnogostrukosti osim Hausdorffovog.