

6 TEOREMI METRIZACIJE I PARAKOMPAKTNOST

- Lokalna konačnost
- Nagata-Smirnovljevi teoremi metrizatione
- Parakompaktnost
- Smirnovljevi teoremi metrizatione

Lokalno konačne familije skupova

Urysonov teorem metrizatione dao je dovoljne uvjete metrizationabilnosti topološkog prostora: regularnost i prebrojiva baza. Međutim, ti uvjeti očito nisu i nužni.

Definicija 39.1

Familija \mathcal{A} podskupova prostora X je **lokalno konačna** u X ako svaka točka ima okolinu koja siječe samo konačno mnogo članova familije \mathcal{A} .

Primjer

Familija intervala $\mathcal{A} = \{ \langle n, n+1 \rangle : n \in \mathbb{N} \}$ je lokalno konačna u \mathbb{R} . Familije $\mathcal{B} = \{ \langle 0, \frac{1}{n} \rangle : n \in \mathbb{N} \}$ i $\mathcal{C} = \{ \langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \rangle : n \in \mathbb{N} \}$ su lokalno konačne u $\langle 0, 1 \rangle$ ali ne i u \mathbb{R} .

Zatvorenje unije lokalno konačne familije

Kao što znamo, zatvorenje *konačne* unije jednako je uniji zatvorenja, dok za beskonačne unije to ne vrijedi. Ipak:

Lema 39.2

Neka je \mathcal{A} lokalno konačna familija podskupova od X .

- Svaka potfamilija od \mathcal{A} je lokalno konačna.
- Familija zatvorenja $\mathcal{B} := \{ \bar{A} \}_{A \in \mathcal{A}}$ je lokalno konačna.
- $\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}$.

Dokaz: (b) Ako otvoren skup U siječe \bar{A} onda siječe i A . ✓

(c) Označimo $Y := \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Očito je $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \bar{A} \subseteq \bar{Y}$.

Obratno, za $x \in \bar{Y}$ neka je $U \ni x$ okolina koja siječe samo konačno mnogo članova od \mathcal{A} , kažimo A_1, \dots, A_n . Da $x \notin \bar{A}_i$ niti za jedan $i \in \{1, \dots, n\}$, skup $U \setminus \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$ bio bi okolina točke x koja ne siječe niti jedan član familije \mathcal{A} , pa ne bi sijekla niti njihovu uniju $Y \not\Leftarrow x \in \bar{Y}$. □

Lokalno konačna *indeksirana* familija

U vezi s particijama jedinice trebat će nam pojam **lokalno konačne indeksirane familije skupova**. To je indeksirana familija $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ podskupova od X tako da svaka točka ima okolinu U za koju postoji samo konačno mnogo indeksa $\alpha \in J$ takvih da U siječe A_α .

Razlika prema „običnoj“ lokalno konačnoj familiji je da se u indeksiranoj familiji isti skup može pojaviti s više različitih indeksa, tako da neka indeksirana familija može biti lokalno konačna kao familija skupova ali ne i kao indeksirana familija skupova.

σ -lokalno konačne familije skupova

Definicija 39.3

Familija \mathcal{A} podskupova od X je σ -lokalno konačna ili **prebrojivo lokalno konačna** ako se može prikazati kao $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$, gdje su sve familije \mathcal{A}_n lokalno konačne.

Svaka prebrojiva i svaka lokalno konačna familija je i σ -lokalno konačna.

Definicija 39.4

Familija \mathcal{B} podskupova od X **profinjuje** familiju \mathcal{A} , oznaka $\mathcal{B} > \mathcal{A}$, ako za svaki $B \in \mathcal{B}$ postoji $A \in \mathcal{A}$ t.d. je $B \subseteq A$.

Ako su članovi familije \mathcal{B} **otvoreni** (**zatvoreni**) skupovi govorimo o **otvorenom** (**zatvorenom**) profinjenju.

σ -lokalno konačno profinjenje otvorenog pokrivača metrizabilnog prostora

Lema 39.5

Svaki otvoren pokrivač metrizabilnog prostora ima σ -lokalno konačno otvoreno profinjenje.

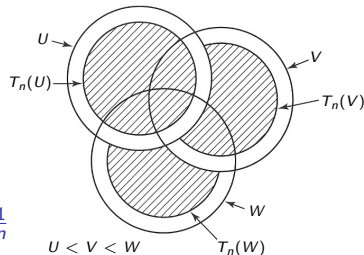
Dokaz: Neka je \mathcal{U} otvoren pokrivač od X , odaberimo dobar uređaj $<$ na \mathcal{U} , i fiksirajmo metriku d . Za svaki $U \in \mathcal{U}$ i $n \in \mathbb{N}$ neka je $S_n(U) := \{x : B(x, \frac{1}{n}) \subseteq U\}$ (to nisu otvoreni skupovi!). Sada definiramo

$$T_n(U) := S_n(U) \setminus \bigcup_{V < U} V.$$

Ti su skupovi međusobno disjunktne, štoviše, vrijedi:

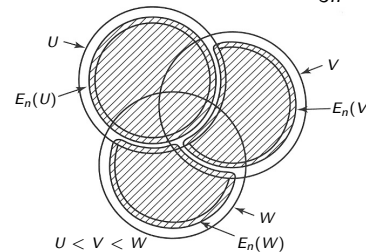
Tvrđnja:

Za $V \neq W \in \mathcal{U}$ je $d(T_n(V), T_n(W)) \geq \frac{1}{n}$



nastavak dokaza leme 39.3

Zaista, neka je $V < W$. Za $x \in T_n(V)$ je $x \in S_n(V)$ pa je $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq V$, dok za $y \in T_n(W)$, zbog $V < W$, $y \notin V$, tj. $y \notin B(x, \frac{1}{n})$. ✓ Skupovi $T_n(U)$ bi bili OK da su otvoreni, ali nisu. Zato definiramo $E_n(U) := B(T_n(U), \frac{1}{3n})$. Ti su skupovi međusobno disjunktne,



štoviše $d(E_n(V), E_n(W)) \geq \frac{1}{3n}$, i za svaki $U \in \mathcal{U}$ je $E_n(U) \subseteq U$. Stoga familija $\mathcal{E}_n := \{E_n(U) : U \in \mathcal{U}\}$ profinjuje \mathcal{U} , i lokalno je konačna jer za svaki $x \in X$ okolina $B(x, \frac{1}{6n})$ siječe najviše jedan član od \mathcal{E}_n . Neka je $\mathcal{E} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n$.

\mathcal{E} je σ -lokalno konačna familija otvorenih skupova koja profinjuje \mathcal{U} .

Tvrđnja: \mathcal{E} pokriva X . Zaista, za $x \in X$ neka je $U \in \mathcal{U}$ prvi član koji sadrži x , i neka je n t.d. je $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$. Prema definiciji je $x \in S_n(U)$, a jer je U prvi koji sadrži x , to je $x \in T_n(U) \subseteq E_n(U)$. □

Nagata-Smirnovljevi teoremi metrizacije

Metrizabilni prostori su regularni i, vidjet ćemo, imaju σ -lokalno konačnu bazu. Pokazat ćemo da vrijedi i obratno.

Dokaz „prati” 4 koraka našeg drugog dokaza Urysonova teorema:

- Regularan prostor s prebrojivom bazom je normalan.
- Regularan prostor sa σ -lokalno konačnom bazom je normalan.
- Konstruirati prebrojivu familiju realnih funkcija $\{f_n\}$ koje razdvajaju točke od zatvorenih skupova.
- Konstruirati familiju realnih funkcija $\{f_\alpha\}$ koje razdvajaju točke od zatvorenih skupova.
- Pomoću funkcija f_n konstruirati smještenje prostora X u \mathbb{R}^ω .
- Pomoću funkcija f_α konstruirati smještenje od X u \mathbb{R}^J za neki J .
- Pokazati da ako je $f_n(x) \leq \frac{1}{n}$ za sve x , onda se zaista radi o smještenju u $(\mathbb{R}^\omega, \bar{\rho})$.
- Pokazati da ako su funkcije f_α dovoljno male, onda se radi o smještenju u $(R^J, \bar{\rho})$.

Definicija 40.1
 $A \subseteq X$ je G_δ skup ako je presjek prebrojive familije otvorenih skupova.

Primjeri:

- Svaki zatvoren podskup A metričkog prostora X je G_δ skup:
 $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(A, \frac{1}{n})$.
- Jednočlan skup $\{\Omega\} \subseteq \overline{S_\Omega}$ nije G_δ skup.

Lema 40.2
 Neka je X regularan prostor sa σ -lokalno konačnom bazom.
 Tada je X normalan i svaki je zatvoren podskup od X G_δ skup.

Dokaz: ide u 3 koraka:

3. X je normalan. Neka su $C, D \subseteq X$ disjunktni zatvoreni skupovi. Prema 1. koraku postoje otvoreni skupovi $U_n, n \in \mathbb{N}$, t.d. je $\bigcup U_n = \bigcup \overline{U_n} = X \setminus D$. Familija $\{U_n\}$ pokriva C i svaki je $\overline{U_n}$ disjunktan s D . Analogno, postoji otvoren pokrivač $\{V_n\}$ od D t.d. su $\overline{V_n}$ disjunktni s C . Sada smo u točno istoj situaciji kao u dokazu da je svaki regularan prostor s prebrojivom bazom normalan (teorem 32.1), pa ponovimo taj dokaz doslovno. Definiramo

$$U'_n := U_n \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{V_i} \quad i \quad V'_n := V_n \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{U_i}.$$

Tada su

$$U' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U'_n \quad i \quad V' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V'_n$$

disjunktne okoline skupova C odnosno D . □

1. Za svaki otvoren skup $W \subseteq X$ postoji prebrojiva familija otvorenih skupova $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ t.d. je $W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n}$.

Neka je $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$ baza gdje su \mathcal{B}_n lokalno konačne familije i neka je $\mathcal{C}_n := \{B \in \mathcal{B}_n : \overline{B} \subseteq W\}$. Familija \mathcal{C}_n je lokalno konačna jer je potfamilija od \mathcal{B}_n . Neka je $U_n := \bigcup_{B \in \mathcal{C}_n} B$. Skupovi U_n su otvoreni i zbog lokalne konačnosti je $\overline{U_n} = \bigcup_{B \in \mathcal{C}_n} \overline{B}$. Zato je $\overline{U_n} \subseteq W$, pa je i $\bigcup U_n \subseteq \bigcup \overline{U_n} \subseteq W$.

Obratno, zbog regularnosti, za $x \in W$ postoji $B \in \mathcal{B}$ t.d. je $x \in B \subseteq \overline{B} \subseteq W$. Kako je $B \in \mathcal{B}_n$ za neki n , to je $B \in \mathcal{C}_n$ pa je $x \in U_n$. Dakle $W \subseteq \bigcup U_n$. ✓

2. Svaki zatvoren skup $C \subseteq X$ je G_δ skup.
 Neka je $W := X \setminus C$. Prema 1. koraku postoje otvoreni skupovi U_n t.d. je $W = \bigcup \overline{U_n}$ pa je $C = X \setminus W = X \setminus \bigcup \overline{U_n} = \bigcap (X \setminus \overline{U_n})$. ✓

Za dokaz Nagata-Smirnovljeva teorema treba nam još jedna lema:

Lema 40.3
 Svaki zatvoren G_δ skup A u normalnom prostoru X je nul-skup, tj. postoji neprekidna funkcija $f: X \rightarrow [0, 1]$ t.d. je $f(x) = 0$ za $x \in A$ i $f(x) > 0$ za $x \notin A$, dakle $A = f^{-1}(0)$.

Dokaz: Neka je $A = \bigcap_n U_n$, gdje su U_n otvoreni. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka su $f_n: X \rightarrow [0, 1]$ t.d. je $f_n(x) = 0$ za $x \in A$ i $f_n(x) = 1$ za $x \in X \setminus U_n$. Tada je

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n}$$

neprekidna funkcija koja je jednaka 0 na A i pozitivna je na $X \setminus A$. □

Nagata-Smirnovljev teorem metrizacije

Teorem 40.4 (Nagata-Smirnov)

Prostor X je metrizabilan ako i samo ako je regularan i ima σ -lokalno konačnu bazu.

Dokaz: \Rightarrow

Treba pokazati da metrizabilan X ima σ -lokalno konačnu bazu. Fiksirajmo metriku na X i za $n \in \mathbb{N}$ neka je \mathcal{A}_n pokrivač $\frac{1}{n}$ -kuglama. Prema lemi 39.2, postoji σ -lokalno konačan otvoren pokrivač \mathcal{B}_n koji profinjuje \mathcal{A}_n . Članovi od \mathcal{B}_n su dijametra $\leq \frac{2}{n}$. Neka je $\mathcal{B} := \bigcup_n \mathcal{B}_n$. \mathcal{B} je σ -lokalno konačna familija, jer su \mathcal{B}_n takve. Pokažimo da je \mathcal{B} baza topologije. Za $x \in X$ i $\varepsilon > 0$ treba nam $B \in \mathcal{B}$ t.d. je $x \in B \subseteq B(x, \varepsilon)$. Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Kako \mathcal{B}_n pokriva X , postoji $B \in \mathcal{B}_n$ t.d. je $x \in B$. Zbog $x \in B$ i $\text{diam } B \leq \frac{2}{n} < \varepsilon$, mora biti $B \subseteq B(x, \varepsilon)$. ✓

Dovoljnost

\Leftarrow X je regularan sa σ -lokalno konačnom bazom, pa je normalan i svaki je zatvoren skup G_δ (lema 40.1) i nul-skup (lema 40.2). Za neki J , smjestit ćemo X u prostor $(\mathbb{R}^J, \bar{\rho})$ s uniformnom metrikom $\bar{\rho}$. Neka je $\mathcal{B} = \bigcup_n \mathcal{B}_n$ gdje su familije \mathcal{B}_n lokalno konačne. Za $n \in \mathbb{N}$ i $B \in \mathcal{B}_n$ odaberimo $f_{n,B}: X \rightarrow [0, \frac{1}{n}]$ t.d. je $f_{n,B}(x) > 0$ za $x \in B$ i $f_{n,B}(x) = 0$ za $x \notin B$ (jer je $X \setminus B$ nul-skup!).
 Familija $\{f_{n,B}\}$ razdvaja točke od zatvorenih skupova:
 \mathcal{B} je baza pa za okolinu $U \ni x_0$ postoji $B \in \mathcal{B}$ t.d. je $x_0 \in B \subseteq U$. Jer je $B \in \mathcal{B}_n$ za neki n , to je $f_{n,B}(x_0) > 0$ i $f_{n,B} = 0$ izvan U . ✓
 Neka je $J := \{(n, B) : B \in \mathcal{B}_n\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathcal{B}$ i definirajmo $F: X \rightarrow [0, 1]^J$ s $F(x) := (f_{n,B}(x))_{(n,B) \in J}$. Prema teoremu 34.2 o smještenju, F je smještenje s obzirom na produktnu topologiju na $[0, 1]^J$. Pokažimo da F je smještenje i s obzirom na uniformnu metriku $\bar{\rho}$ na $[0, 1]^J$. Kako je uniformna topologija finija od produktne (teorem 20.4), $F: X \rightarrow F(X)$ je otvorena bijekcija.

F je neprekidno:

Ostaje pokazati da je preslikavanja F neprekidno. Neka je $x_0 \in X$ i $\varepsilon > 0$. Fiksirajmo n i neka je $U_n \ni x_0$ okolina koja siječe samo konačno mnogo članova iz \mathcal{B}_n . Znači, za samo konačno mnogo $B \in \mathcal{B}_n$ je $f_{n,B}|_{U_n} \neq 0$. Neka je $V_n \subseteq U_n$ okolina od x_0 t.d. je $\text{diam } f_{n,B}(V_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $B \in \mathcal{B}_n$ (za sve osim konačno mnogo $B \in \mathcal{B}_n$ je $f_{n,B}(V_n) = \{0\}$).
 Odaberimo takav V_n za svaki n , neka je $N \in \mathbb{N}$ t.d. je $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ i neka je $W := V_1 \cap \dots \cap V_N$.

Tvrdnja:

Za svaki $x \in W$ je $\bar{\rho}(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$, pa je F neprekidna u x_0 . Za $n \leq N$ je $|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ jer na W funkcija $f_{n,B}$ ili iščezava ili varira za najviše $\frac{\varepsilon}{2}$. Ako je pak $n > N$ onda je $|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ jer $f_{n,B}$ preslikava X u $[0, \frac{1}{n}]$. Stoga je $\bar{\rho}(F(x), F(x_0)) = \sup_{(n,B) \in J} |f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, tj. F je neprekidno, dakle i smještenje u metrički prostor $(\mathbb{R}^J, \bar{\rho})$. □

Parakompaktnost

Parakompaktnost je jedno od najvažnijih i najkorisnijih generalizacija kompaktnosti. Sadrži sve metričke (A. H. Stone) i sve kompaktne Hausdorffove prostore. Posebno su korisni u primjenama u topologiji i diferencijalnoj geometriji. Kompaktnost je karakterizirana time da svaki otvoren pokrivač ima konačno otvoreno profinjjenje, tj. za svaki otvoren pokrivač \mathcal{A} postoji konačan otvoren pokrivač \mathcal{B} koji profinjuje \mathcal{A} .

Definicija 41.1

Prostor X je **parakompaktan** ako svaki otvoren pokrivač ima lokalno konačno otvoreno profinjjenje.

Primjer: \mathbb{R}^n je parakompaktan

Neka je \mathcal{A} otvoren pokrivač od \mathbb{R}^n . Neka je $B_0 := \emptyset$ i za $k \in \mathbb{N}$ neka je $B_k := B(0, k)$ otvorena kugla oko ishodišta radijusa k . Za svaki k odaberimo konačno članova pokrivača \mathcal{A} tako da pokriju $\overline{B_k}$ i presijecimo ih s otvorenim skupovima $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{k-1}}$. Neka je \mathcal{C}_k tako dobivena konačna familija otvorenih skupova. Tada familija $\mathcal{C} := \bigcup_k \mathcal{C}_k$ profinjuje \mathcal{A} i lokalno je konačna. Naime, kugla B_k siječe samo one članove od \mathcal{C} koji pripadaju uniji $\mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_k$. Konačno, \mathcal{C} pokriva \mathbb{R}^n . Zaista, za $x \in \mathbb{R}^n$ neka je k najmanji prirodan broj za koji je $x \in B_k$. Tada, prema definiciji familije \mathcal{C}_k , x pripada nekom članu familije \mathcal{C}_k .

Teorem 41.3

Zatvoren podskup parakompaktnog prostora je parakompaktan.

Dokaz: Neka je $Y \subseteq X$ zatvoren i \mathcal{A} pokrivač od Y skupovima otvorenim u Y . Za svaki $A \in \mathcal{A}$ neka je A' otvoren u X t.d. je $A = A' \cap Y$. Familija $\{A' : A \in \mathcal{A}\} \cup \{X \setminus Y\}$ je otvoren pokrivač od X . Neka je \mathcal{B} lokalno konačno profinjenje. Tada je familija $\mathcal{C} := \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ traženo lokalno konačno profinjenje od \mathcal{A} . \square

Parakompaktan podskup Hausdorffovog ne mora biti zatvoren

Otvoren interval $(0, 1)$ je parakompaktan ali nije zatvoren u \mathbb{R} .

Potprostor parakompaktnog ne mora biti parakompaktan

$\overline{S_\Omega} \times \overline{S_\Omega}$ je kompaktan, dakle i parakompaktan, ali njegov potprostor $S_\Omega \times \overline{S_\Omega}$ nije normalan, pa nije niti parakompaktan (iako je Hausdorffov). Parakompaktnost *nije* nasljedno svojstvo.

Teorem 41.2

Svaki parakompaktan Hausdorffov prostor X je normalan.

Dokaz: X je regularan: Neka je $B \subseteq X$ zatvoren i $a \notin B$. Kako je X Hausdorffov, za svaki $b \in B$ neka je $U_b \ni b$ okolina t.d. $a \notin \overline{U_b}$. Familija $\{U_b : b \in B\} \cup \{X \setminus B\}$ je otvoren pokrivač od X pa neka je \mathcal{C} lokalno konačno profinjenje. Neka je $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ potfamilija koja se sastoji od onih članova koji sijeku B . Tada \mathcal{D} pokriva B , i za $D \in \mathcal{D}$ je $a \notin \overline{D}$. Naime, D siječe B pa je D sadržan u nekom U_b čije zatvorenje ne sadrži a . Skup $V := \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D$ je otvoren i sadrži B . Kako je familija \mathcal{D} lokalno konačna, $\overline{V} = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \overline{D}$ pa $a \notin \overline{V}$. To dokazuje regularnost.

Normalnost se dokazuje analogno, s tim da se umjesto točke a uzme zatvoren skup A , a Hausdorffovo se svojstvo zamijeni regularnošću. \square

Sljedeća je lema ključna i u dokazu Stoneova teorema da je svaki metrizable prostor parakompaktan.

Lema 41.4 (E. Michael)

Neka je X regularan. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne: Svaki otvoren pokrivač od X ima profinjenje koje je:

- (1) σ -lokalno konačan otvoren pokrivač od X ;
- (2) lokalno konačan pokrivač od X ;
- (3) lokalno konačan zatvoren pokrivač od X ;
- (4) lokalno konačan otvoren pokrivač od X .

Dokaz: (4) \Rightarrow (1) je očito.

Dokaz Michaelove leme: (1) \Rightarrow (2)

Neka je \mathcal{A} otvoren pokrivač od X , $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$ neko σ -lokalno konačno profinjenje (\mathcal{B}_n su lokalno konačne familije), i neka su $V_i := \bigcup_{U \in \mathcal{B}_i} U$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki $U \in \mathcal{B}_n$ neka je $S_n(U) := U \setminus \bigcup_{i < n} V_i$. ($S_n(U)$ nisu nužno niti otvoreni niti zatvoreni.) Neka je $\mathcal{C}_n := \{S_n(U) : U \in \mathcal{B}_n\}$. Tada \mathcal{C}_n profinjuje \mathcal{B}_n jer je $S_n(U) \subseteq U$ za sve $U \in \mathcal{B}_n$.

Tvrđnja: $\mathcal{C} := \bigcup \mathcal{C}_n$ je traženo lokalno konačno profinjenje od \mathcal{A} koje pokriva X . Neka je $x \in X$ i neka je N najmanji indeks za koji x pripada nekom članu $U \in \mathcal{B}_N$. Kako x ne pripada niti jednom članu familije \mathcal{B}_i za $i < N$, to je $x \in S_N(U) \in \mathcal{C}$. Nadalje, jer su familije \mathcal{B}_n lokalno konačne, za svaki $n = 1, \dots, N$ postoji okolina $W_n \ni x$ koja siječe samo konačno mnogo članova od \mathcal{B}_n , pa onda siječe i samo konačno mnogo članova iz \mathcal{C}_n (jer je $S_n(V) \subseteq V$, $V \in \mathcal{B}_n$). Osim toga, kako je $U \in \mathcal{B}_N$, U ne siječe niti jedan član od \mathcal{C}_n za $n > N$. Stoga okolina $W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_N \cap U$ od x siječe samo konačno mnogo članova familije \mathcal{C} . ✓

Dokaz Michaelove leme: (2) \Rightarrow (3)

Neka je \mathcal{A} otvoren pokrivač od X i neka je \mathcal{B} familija svih otvorenih skupova $U \subseteq X$ t.d. je \overline{U} sadržan u nekom članu familije \mathcal{A} . Zbog regularnosti, \mathcal{B} pokriva X . Nadalje, prema (2) postoji lokalno konačno profinjenje \mathcal{C} od \mathcal{B} koje pokriva X . Neka je $\mathcal{D} := \{\overline{C} : C \in \mathcal{C}\}$. Kako je familija \mathcal{C} lokalno konačna, to je, prema lemi 39.1, i \mathcal{D} lokalno konačna familija. Očito \mathcal{D} pokriva X i profinjuje \mathcal{A} . ✓

Dokaz Michaelove leme: (3) \Rightarrow (4)

Neka je \mathcal{A} otvoren pokrivač od X . Prema (3) odaberimo lokalno konačno profinjenje \mathcal{B} koje pokriva X (zatvorenost nam nije važna). Članove $B \in \mathcal{B}$ ćemo „nadebljati“ do otvorenih skupova, ali tako malo da opet dobijemo profinjenje i sačuvamo lokalnu konačnost. Za to nam treba jedan novi trik.

Svaki $x \in X$ ima okolinu koja siječe samo konačno članova iz \mathcal{B} . Familija svih otvorenih skupova koji sijeku samo konačno članova iz \mathcal{B} je otvoren pokrivač od X . Prema (3), neka je \mathcal{C} zatvoreno lokalno konačno profinjenje koje pokriva X .

Tada svaki član od \mathcal{C} siječe samo konačno članova iz \mathcal{B} .

Za $B \in \mathcal{B}$ neka je $\mathcal{C}(B) := \{C : C \in \mathcal{C}, C \subseteq X \setminus B\}$, i neka je $E(B) := X \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}(B)} C$. Očito $E(B) \supseteq B$, i jer je familija \mathcal{C} lokalno konačna, skupovi $E(B)$ su otvoreni.

Dokaz Michaelove leme: (3) \Rightarrow (4) (završetak)

Ali, možda smo skupove B nadebljali previše, možda familija $\{E(B)\}$ ne profinjuje \mathcal{A} , a i lokalna konačnost je upitna. Zato za svaki $B \in \mathcal{B}$ odaberimo neki $A(B) \in \mathcal{A}$ t.d. je $B \subseteq A(B)$, i neka je $\mathcal{D} := \{E(B) \cap A(B) : B \in \mathcal{B}\}$. Familija \mathcal{D} profinjuje \mathcal{A} , ali i pokriva X jer je $B \subseteq E(B) \cap A(B)$, a već \mathcal{B} pokriva X . Kako su članovi od \mathcal{D} otvoreni skupovi, ostaje pokazati da je familija \mathcal{D} lokalno konačna. Za $x \in X$ neka je $W \ni x$ okolina koja siječe samo konačno članova iz \mathcal{C} . Neka su to C_1, \dots, C_k .

Tvrđnja: W siječe samo konačno mnogo članova od \mathcal{D} .

Kako \mathcal{C} pokriva X to je $W \subseteq C_1 \cup \dots \cup C_k$. Dovoljno je, dakle, pokazati da svaki $C \in \mathcal{C}$ siječe samo konačno članova od \mathcal{D} . Ako C siječe neki $E(B) \cap A(B)$ onda siječe $E(B)$ pa, prema definiciji od $E(B)$, $C \not\subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}(B)} C$, i pogotovo $C \not\subseteq X \setminus B$. Zato C siječe B . Jer C siječe samo konačno članova od \mathcal{B} (tako smo odabrali \mathcal{C}), to C može sjeći najviše isto toliko članova od \mathcal{D} (jer $\mathcal{B} > \mathcal{A}$). □

Teorem 41.5 (A. H. Stone, 1948)

Svaki metrizabilan prostor je parakompaktan.

Dokaz: Neka je X metrizabilan. Prema lemi 39.2, svaki otvoren pokrivač \mathcal{A} ima σ -lokalno konačno otvoreno profinjjenje koje pokriva X . Prema Michaelovoj lemi, \mathcal{A} ima i lokalno konačno otvoreno profinjjenje koje pokriva X , tj. X je parakompaktan. \square

Teorem 41.6

Svaki regularan Lindelöfov prostor je parakompaktan.

Dokaz: Neka je X regularan Lindelöfov prostor i neka je \mathcal{A} otvoren pokrivač. Jer je X Lindelöfov, \mathcal{A} ima prebrojiv potpokrivač, i on je automatski σ -lokalno konačan. Kako je X regularan, prema Michaelovoj lemi \mathcal{A} ima i otvoreno lokalno konačno profinjjenje koje pokriva X , pa je X parakompaktan. \square

Produkt parakompaktnih prostora ne mora biti parakompaktan

\mathbb{R}_ℓ je parakompaktan jer je regularan i Lindelöfov, ali $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ nije parakompaktan jer nije normalan.

\mathbb{R}^ω je parakompaktan i u produktnoj i u uniformnoj topologiji

U obje topologije je \mathbb{R}^ω metrizabilan, pa je i parakompaktan.

\mathbb{R}^J nije parakompaktan ako je J neprebrojiv

Neprebrojiv produkt \mathbb{R}^J je Hausdorffov ali nije normalan pa nije niti parakompaktan.

„Pravo mjesto” za particiju jedinice su parakompaktni prostori.

Definicija 41.7

Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ indeksiran otvoren pokrivač od X .

Particija jedinice podređena pokrivaču \mathcal{U} je indeksirana familija funkcija $\phi_\alpha: X \rightarrow [0, 1]$ t.d. je

- (1) $\text{supp } \phi_\alpha \subseteq U_\alpha$ za sve α ,
- (2) indeksirana familija $\{\text{supp } \phi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ je lokalno konačna, i
- (3) $\sum_\alpha \phi_\alpha(x) = 1$ za sve $x \in X$.

Pritom se suma po proizvoljnom indeksnom skupu J definira kao $\sum_{\alpha \in J} \phi_\alpha(x) := \sup_{J'} \{\sum_{\alpha \in J'} \phi_\alpha(x) : J' \subseteq J \text{ konačan podskup}\}$.

Za dokaz kako za svaki otvoren pokrivač parakompaktnog Hausdorffovog prostora postoji njemu podređena particija jedinice, potrebna nam je sljedeća lema o sažimanju pokrivača:

Lema 41.8 (o sažimanju pokrivača)

*Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ indeksiran otvoren pokrivač parakompaktnog Hausdorffovog prostora X . Tada postoji indeksiran lokalno konačan otvoren pokrivač $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ koji **strogo profinjuje** \mathcal{U} , tj. takav da vrijedi $\bar{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$ za sve α .*

Dokaz: Neka je \mathcal{A} familija svih otvorenih skupova A t.d. je \bar{A} sadržan u nekom članu od \mathcal{U} . Zbog regularnosti, \mathcal{A} pokriva X . Jer je X parakompaktan, postoji lokalno konačan otvoren pokrivač \mathcal{B} koji profinjuje \mathcal{A} . Kako \mathcal{B} profinjuje \mathcal{A} , i \mathcal{A} strogo profinjuje \mathcal{U} , postoji funkcija $f: \mathcal{B} \rightarrow J$ t.d. je $\bar{B} \subseteq U_{f(B)}$, $B \in \mathcal{B}$. Za $\alpha \in J$ neka je $\mathcal{B}_\alpha := \{B : f(B) = \alpha\}$, i neka je $V_\alpha := \bigcup_{B \in \mathcal{B}_\alpha} B$. Familija \mathcal{B}_α je lokalno konačna (jer je \mathcal{B} lokalno konačna) i $\bar{B} \subseteq U_\alpha$ za sve $B \in \mathcal{B}_\alpha$, pa je $\bar{V}_\alpha = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_\alpha} \bar{B} \subseteq U_\alpha$. Za $x \in X$ neka je $W \ni x$ okolina koja siječe samo npr. B_1, \dots, B_k . Tada W može sjeći V_α samo ako je α jedan od indeksa $f(B_1), \dots, f(B_k)$, pa je familija $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ lokalno konačna. \square

Teorem 41.9
 Neka je X parakompaktan Hausdorffov prostor a $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ proizvoljan indeksiran otvoren pokrivač od X .
 Tada postoji particija jedinice podređena pokrivaču \mathcal{U} .

Dokaz: Primijenimo li dvaput lemu o sažimanju, dobivamo lokalno konačne otvorene pokrivače $\{V_\alpha\}$ i $\{W_\alpha\}$ t.d. je $\overline{W}_\alpha \subseteq V_\alpha \subseteq \overline{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$.
 Jer je X normalan postoje funkcije $\psi_\alpha: X \rightarrow [0, 1]$ t.d. je $\psi_\alpha(\overline{W}_\alpha) = \{1\}$ i $\psi_\alpha(X \setminus V_\alpha) = \{0\}$, pa je $\text{supp } \psi_\alpha \subseteq \overline{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$.
 Familija $\{\overline{V}_\alpha\}$ je lokalno konačna (jer ako neki otvoren skup siječe \overline{V}_α onda siječe i V_α), pa svaka točka ima okolinu na kojoj je samo konačno mnogo funkcija ψ_α različito od nule. Kako $\{W_\alpha\}$ pokriva X , u svakoj točki $x \in X$ barem je jedna od funkcija ψ_α različita od nule. Stoga su dobro definirane funkcije $\phi_\alpha(x) := \frac{\psi_\alpha(x)}{\sum_{\beta \in J} \psi_\beta(x)}$ i one čine traženu particiju jedinice. \square

Definicija 42.1
 Prostor X je **lokalno metrizable** ako svaka točka ima okolinu koja je metrizable (tj. relativna topologija je metrizable).

Teorem 42.2 (Smirnov)
 Prostor X je metrizable ako i samo ako je parakompaktan Hausdorffov i lokalno metrizable.

Dokaz: \Rightarrow Nužnost slijedi iz Stoneova teorema.
 \Leftarrow Pokazat ćemo da X ima σ -lokalno konačnu bazu pa će, zbog regularnosti, tvrdnja slijediti iz Nagata-Smirnovljeva teorema.
 Pokrijmo X otvorenim metrizablenim skupovima, neka je pokrivač \mathcal{C} lokalno konačno otvoreno profinjjenje, i neka je $d_C: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ lokalna metrika na C . Jer su C otvoreni skupovi, ε -kugle $B_C(x, \varepsilon)$ oko x u metrici d_C otvoreni su skupovi u X .

Za $n \in \mathbb{N}$ neka je \mathcal{A}_n pokrivač od X svim takvim $\frac{1}{n}$ -kuglama, tj. $\mathcal{A}_n := \{B_C(x, \frac{1}{n}) : x \in C, C \in \mathcal{C}\}$. Neka je \mathcal{D}_n lokalno konačno otvoreno profinjjenje koje pokriva X (parakompaktnost!), i neka je $\mathcal{D} = \bigcup_n \mathcal{D}_n$. Familija \mathcal{D} je očito σ -lokalno konačna.

Tvrdnja: \mathcal{D} je baza topologije od X . Neka je $x \in X$ i $U \ni x$ okolina. Točka x leži u samo konačno mnogo članova od \mathcal{C} (čak ima okolinu koja siječe samo konačno C -ova). Neka su to C_1, \dots, C_k . Neka je ε_i t.d. je $B_{C_i}(x, \varepsilon_i) \subseteq U \cap C_i$ i neka je n t.d. je $\frac{2}{n} < \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$. Neka je $D \in \mathcal{D}$ t.d. je $x \in D$. Jer \mathcal{D}_n profinjuje \mathcal{A}_n , postoje $C \in \mathcal{C}$ i $y \in C$ t.d. je $x \in D \subseteq B_C(y, \frac{1}{n})$.

Kako je $x \in C$ mora taj C biti jedan od C_1, \dots, C_k , npr. $C = C_i$.
 Jer je $\text{diam } B_{C_i}(y, \frac{1}{n}) \leq \frac{2}{n} < \varepsilon_i$, to je $x \in D \subseteq B_{C_i}(y, \frac{1}{n}) \subseteq B_{C_i}(x, \varepsilon_i) \subseteq U$. \square

