

## 4 AKSIOMI SEPARACIJE I PREBROJIVOSTI

- Aksiomi prebrojivosti
- Aksiomi separacije
- Normalni prostori
- Urysonova lema
- Urysonov teorem o metrizaciji
- Tietzeov teorem
- Smještenja mnogostrukosti

## Drugi aksiom prebrojivosti

## Definicija

Topološki prostor  $X$  zadovoljava **drugi aksiom prebrojivosti** ako ima prebrojivu bazu topologije.

Mnogi, iako ne svi, zanimljivi metrički prostori zadovoljavaju drugi aksiom prebrojivosti. To će svojstvo biti ključno za Urysonov teorem metrizacije.

## Primjeri

- $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$  zadovoljavaju drugi aksiom prebrojivosti.
- $\mathbb{R}^\omega$  u produktnoj topologiji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti: prebrojivu bazu čini familija produkata  $\prod_{n \in \mathbb{N}} U_n$  gdje su za konačno mnogo  $n$ -ova  $U_n \subseteq \mathbb{R}$  otvoreni intervali s racionalnim krajevima, a za ostale  $n$  je  $U_n = \mathbb{R}$ .

## Prvi aksiom prebrojivosti

## Definicija

Prostor  $X$  zadovoljava **prvi aksiom prebrojivosti** ako za svaki  $x \in X$  postoji prebrojiva baza okolina točke  $x$ .

Svaki metrički prostor zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti:

$\{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$  je prebrojiva baza okolina točke  $x$ .

Ključno svojstvo tih prostora je da, kao i za metričke prostore, vrijedi:

## Teorem 30.1

- (a) Neka je  $X$  topološki prostor i  $A \subseteq X$ . Ako postoji niz u  $A$  koji konvergira točki  $x \in X$  onda je  $x \in \bar{A}$ .  
Obrat vrijedi ako  $X$  zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti.
- (b) Neka je  $f : X \rightarrow Y$ . Ako je  $f$  neprekidno u točki  $x$  onda za svaki konvergentan niz  $x_n \rightarrow x$ , niz  $f(x_n)$  konvergira k  $f(x)$ .  
Obrat vrijedi ako  $X$  zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti.  $\square$

 $\mathbb{R}^\omega$  s uniformnom topologijom i aksiomi prebrojivosti

$\mathbb{R}^\omega$  s uniformnom topologijom zadovoljava prvi (jer je metrizable) ali ne i drugi aksiom prebrojivosti

Tvrnja: Ako topologija prostora  $X$  ima prebrojivu bazu,  $\mathcal{B}$ , onda je svaki diskretan potprostor  $A \subseteq X$  prebrojiv.

Zaista, za svaki  $a \in A$  neka je  $B_a \in \mathcal{B}$  t.d. je  $B_a \cap A = \{a\}$ . Tada za  $a \neq b$  je  $B_a \neq B_b$  pa dobivamo injeksiju  $a \mapsto B_a$  s  $A$  u  $\mathcal{B}$ .  $\checkmark$

Neka je  $A \subseteq \mathbb{R}^\omega$  potprostor koji se sastoji od svih nizova 0 i 1.  $A$  je neprebrojiv i u uniformnoj topologiji je diskretan, jer za svaka dva različita niza  $a, b \in A$  je  $\bar{\rho}(a, b) = 1$ .

Dakle, u uniformnoj topologiji  $\mathbb{R}^\omega$  nema prebrojivu bazu.

Ponašanje prema potprostorima i produktima je dobro:

**Teorem 30.2**  
*Potprostori i prebrojivi produkti prostora koji zadovoljavaju prvi aksiom prebrojivosti također zadovoljavaju prvi aksiom prebrojivosti.*  
*Analogna tvrdnja vrijedi i za drugi aksiom prebrojivosti.*

**Dokaz:** Ako su  $\mathcal{B}_i$  prebrojive baze prostora  $X_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , onda je familija svih produkata  $\prod_i U_i$ , gdje su  $U_i \in \mathcal{B}_i$  za konačno mnogo indeksa  $i$ , a  $U_i = X_i$  za sve ostale  $i$ , prebrojiva baza za  $\prod_i X_i$ . Slično se dokazuju ostale tvrdnje.  $\square$

**Definicija**  
 Potprostor  $A \subseteq X$  je **gust** u  $X$  ako je  $\bar{A} = X$ .

**Teorem 30.3**  
*Neka topološki prostor  $X$  ima prebrojivu bazu. Tada:*  
 (a) *svaki otvoren pokrivač od  $X$  ima prebrojiv potpokrivač (Lindelöfovo svojstvo);*  
 (b) *postoji prebrojiv podskup koji je gust u  $X$  (separabilnost).*

**Dokaz:** Neka je  $\mathcal{B} = \{B_n\}$  prebrojiva baza topologije od  $X$ .  
 (a) Neka je  $\mathcal{A}$  otvoren pokrivač od  $X$ . Za  $n \in \mathbb{N}$  odaberimo, ako je moguće,  $A_n \in \mathcal{A}$  t.d.  $A_n \supseteq B_n$ . U protivnom neka je  $A_n = \emptyset$ . Familija  $\mathcal{A}' := \{A_n : A_n \neq \emptyset, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$  je prebrojiva. Pokažimo da  $\mathcal{A}'$  pokriva  $X$ . Za  $\forall x \in X$ ,  $\exists A \in \mathcal{A}$  t.d. je  $x \in A$ , a kako je  $A$  otvoren,  $\exists B_n \in \mathcal{B}$  t.d. je  $x \in B_n \subseteq A$ . Dakle za taj  $n$ ,  $\exists A_n \in \mathcal{A}'$  koji sadrži  $B_n$  (to ne mora biti baš naš  $A$ ), pa je  $x$  pokriven s  $\mathcal{A}'$ .  
 (b) Za svaki  $n$  odaberimo  $x_n \in B_n$ . Skup  $D := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  je prebrojiv i gust je u  $X$ , jer ga svaki bazni otvoren skup siječe.  $\square$

**Napomena**  
 U metričkim se prostorima Lindelöfovo svojstvo i separabilnost podudaraju s drugim aksiomom prebrojivosti, ali se općenito u topološkim prostorima sva tri svojstva međusobno razlikuju.

**$\mathbb{R}_\ell$  i aksiomi prebrojivosti**  
 Prostor  $\mathbb{R}_\ell$  (=  $\mathbb{R}$  s odozdo graničnom topologijom; bazu topologije čine skupovi oblika  $[a, b)$ ) zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti, ima Lindelöfovo svojstvo i separabilan je, ali ne zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti.

**Dokaz:** Skupovi oblika  $[x, x + \frac{1}{n})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , čine prebrojivu bazu okolina točke  $x$ , i očito su racionalni brojevi gusti u  $\mathbb{R}_\ell$ .

**$\mathbb{R}_\ell$  nema prebrojivu bazu:** Neka je  $\mathcal{B}$  baza topologije za  $\mathbb{R}_\ell$ . Za svaki  $x$  odaberimo  $B_x \in \mathcal{B}$  t.d. je  $x \in B_x \subseteq [x, x + 1)$ . Za  $x \neq y$  je  $B_x \neq B_y$  pa je familija  $\mathcal{B}$  neprebrojiva.  $\checkmark$   
 **$\mathbb{R}_\ell$  je Lindelöfov.** Dovoljno je pokazati da svaki pokrivač  $\mathcal{A} = \{[a_\alpha, b_\alpha)\}_{\alpha \in J}$  baznim skupovima ima prebrojiv potpokrivač. Neka je  $C := \bigcup_{\alpha \in J} [a_\alpha, b_\alpha) \subseteq \mathbb{R}$ .  $\mathbb{R} \setminus C$  je prebrojiv: Neka je  $x \in \mathbb{R} \setminus C$ . Tada  $x \notin [a_\alpha, b_\alpha)$ ,  $\alpha \in J$ , pa je  $x = a_\beta$  za neki  $\beta$ . Odaberimo takav  $\beta$  i neka je  $q_x \in \mathbb{Q} \cap (a_\beta, b_\beta)$ . Tada je  $\langle x, q_x \rangle = \langle a_\beta, q_x \rangle \subseteq \langle a_\beta, b_\beta \rangle \subseteq C$ . Zato za  $x, y \in \mathbb{R} \setminus C$ , ako je  $x < y$  onda je  $q_x < q_y$ , jer bi inače bilo  $x < y < q_y \leq q_x$ , pa bi bilo  $y \in \langle x, q_x \rangle \subseteq C$ . Zato je preslikavanje  $x \mapsto q_x$  s  $\mathbb{R} \setminus C$  u  $\mathbb{Q}$  injektivno, pa je  $\mathbb{R} \setminus C$  prebrojiv.

## $\mathbb{R}_\ell$ nema prebrojivu bazu ali je Lindelöfov (nastavak)

Pokažimo da  $\mathcal{A}$  ima prebrojiv potpokrivač: Za svaku točku iz  $\mathbb{R} \setminus C$  odaberimo neki član pokrivača  $\mathcal{A}$  koji ju sadrži.

Tako dobivamo prebrojivu familiju  $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$  koja pokriva  $\mathbb{R} \setminus C$ .

Uzmimo sada na  $C$  topologiju potprostora od  $\mathbb{R}$ .

U toj topologiji  $C$  zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, pa ima Lindelöfovo svojstvo (teorem 30.3 (a)).

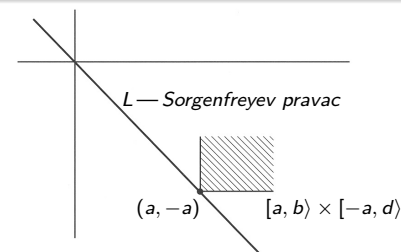
Kako je  $C$  pokriven familijom  $\{\langle a_\alpha, b_\alpha \rangle : \alpha \in J\}$  koji su otvoreni u  $\mathbb{R}$ , dakle otvoreni i u  $C$ , to već njih prebrojivo mnogo  $\langle a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1} \rangle, \langle a_{\alpha_2}, b_{\alpha_2} \rangle, \dots$  pokriva  $C$ , pa je  $\mathcal{A}'' = \{\langle a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1} \rangle, \langle a_{\alpha_2}, b_{\alpha_2} \rangle, \dots\}$  prebrojiva potfamilija od  $\mathcal{A}$  koja pokriva  $C$ .

Zato je  $\mathcal{A}' \cup \mathcal{A}''$  prebrojiva potfamilija od  $\mathcal{A}$  koja pokriva  $\mathbb{R}_\ell$ .  $\square$

## Produkt Lindelöfovih prostora ne mora biti Lindelöfov

$\mathbb{R}_\ell$  je Lindelöfov prostor, ali njegov kvadrat **Sorgenfreyeva daska**  $\mathbb{R}_\ell^2 = \mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ , nije Lindelöfov.

Bazu topologije prostora  $\mathbb{R}_\ell^2$  čine produkti  $[a, b) \times [c, d)$ . Neka je  $L := \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}_\ell\}$ . Očito je  $L \subseteq \mathbb{R}_\ell^2$  zatvoren potprostor. Pokrijmo  $\mathbb{R}_\ell^2$  otvorenim skupom  $\mathbb{R}_\ell^2 \setminus L$  i baznim skupovima oblika  $[a, b) \times [-a, d)$ . Svaki od tih skupova siječe  $L$  u  $\leq 1$  točki, a jer je  $L$  neprebrojiv, nikoja prebrojiva potfamilija ne može pokriti  $\mathbb{R}_\ell^2$ .



## Potprostor Lindelöfova prostora ne mora biti Lindelöfov

Kvadrat  $I_0^2$  s uređajnom topologijom je kompaktan, pa je Lindelöfov. Ali potprostor  $A := I \times \langle 0, 1 \rangle$  **nije** Lindelöfov, tj. Lindelöfovo svojstvo nije **nasljedno**.

$I_0^2$  je kompaktan jer je svaki zatvoren segment u totalno uređenom skupu koji ima svojstvo supremuma kompaktan (teorem 27.1).

Skup  $A$  je jednak uniji međusobno disjunktne skupova

$U_x := \{x\} \times \langle 0, 1 \rangle$  koji su otvoreni u  $A$ .

To je neprebrojiv pokrivač od  $A$  koji se uopće ne može reducirati.

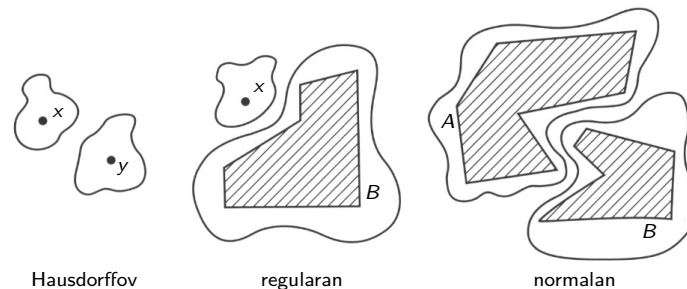
## Regularnost i normalnost

### Definicija

Neka je  $X$   $T_1$ -prostor.

$X$  je **regularan** ako se svaka točka i zatvoren skup koji ju ne sadrži mogu razdvojiti disjunktne otvorenim okolinama.

$X$  je **normalan** ako se svaka dva disjunktne zatvorena skupa mogu razdvojiti disjunktne otvorenim okolinama.



**Lema 31.1**

Neka je  $X$   $T_1$ -prostor.

- (a)  $X$  je regularan ako i samo ako za svaku točku  $x$  i okolinu  $U \ni x$  postoji okolina  $V$  t.d. je  $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ .
- (b)  $X$  je normalan ako i samo ako za svaki zatvoren skup  $A$  i okolinu  $U \supseteq A$  postoji otvoren skup  $V$  t.d. je  $A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ .

**Dokaz:** (a)  $\Rightarrow$  Stavimo  $B := X \setminus U$  i neka su  $V \ni x$  i  $W \supseteq B$  disjunktni otvoreni skupovi. Tada je  $\bar{V} \cap B = \emptyset$ , jer je za  $y \in B$  okolina  $W \ni y$  disjunktna s  $V$ . Dakle,  $\bar{V} \subseteq U$ .  $\checkmark$   
 $\Leftarrow$  Stavimo  $U := X \setminus B$  i neka je  $V \ni x$  t.d. je  $\bar{V} \subseteq U$ . Tada su  $V$  i  $X \setminus \bar{V}$  disjunktna okoline od  $x$  odnosno  $B$ .  $\checkmark$   
 (b) Dokaz je isti, samo umjesto  $x$  stavimo  $A$ .  $\square$

**Dokaz:** (b)  $X$  regularan,  $Y \subseteq X$ ,  $B \subseteq Y$  zatvoren,  $x \in Y \setminus B$ . Tada je  $\bar{B} \cap Y = B$  pa  $x \notin \bar{B}$ . Neka su  $U, V \subseteq X$  disjunktna okoline od  $x$  i  $\bar{B}$ . Tada su  $U \cap Y$  i  $V \cap Y$  tražene disjunktna okoline u  $Y$ , od  $x$  odnosno  $B$ .  $\checkmark$

Neka su  $X_\alpha$  regularni,  $X := \prod X_\alpha$ .  $X$  je Hausdorffov, dakle i  $T_1$ . Neka je  $\mathbf{x} = (x_\alpha) \in X$  i  $U \ni \mathbf{x}$  okolina. Neka je  $\prod U_\alpha$  bazni otvoren skup t.d. je  $\mathbf{x} \in \prod U_\alpha \subseteq U$ . Za one  $\alpha$  za koje je  $U_\alpha \neq X_\alpha$ , prema lemi 31.1, postoji otvoren skup  $V_\alpha \subseteq X_\alpha$  t.d. je  $x_\alpha \in V_\alpha \subseteq \bar{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$ . Za ostale  $\alpha$  neka je  $V_\alpha := U_\alpha = X_\alpha$ . Tada je  $V := \prod V_\alpha$  okolina od  $\mathbf{x}$ ,  $\bar{V} = \prod \bar{V}_\alpha$  prema teoremu 19.5, i očito je  $\bar{V} \subseteq \prod U_\alpha \subseteq U$ , pa je, prema lemi 31.1,  $X$  regularan.  $\square$

**Teorem 31.2**

- (a) Potprostor Hausdorffova prostora je Hausdorffov; proizvoljan produkt Hausdorffovih prostora je Hausdorffov prostor.
- (b) Potprostor regularnog prostora je regularan; proizvoljan produkt regularnih prostora je regularan prostor.

**Niti jedna od dviju analognih tvrdnji za normalne prostore ne vrijedi!**

**Dokaz:** (a) Neka su  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in J$ , Hausdorffovi,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \prod X_\alpha$ . Tada postoji  $\beta$  t.d. je  $x_\beta \neq y_\beta$ . Neka su  $U, V \subseteq X_\beta$  disjunktna okoline od  $x_\beta$  odnosno  $y_\beta$ . Tada su  $\pi_\beta^{-1}(U)$  i  $\pi_\beta^{-1}(V)$  disjunktna okoline od  $\mathbf{x}$  odnosno  $\mathbf{y}$ .

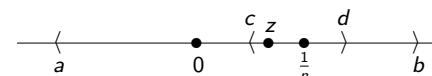
$\mathbb{R}_K$  je Hausdorffov ali nije regularan

$\mathbb{R}_K$  je skup realnih brojeva  $\mathbb{R}$  s topologijom čiju podbazu čine otvoreni intervali i komplement skupa  $K := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ .

Hausdorffovost je očita.  $\checkmark$

**Ne-regularnost:**  $K$  je zatvoren i  $0 \notin K$ . Pretpostavimo da postoje disjunktna okoline  $U \ni 0$  i  $V \supseteq K$ . Neka je  $\langle a, b \rangle \setminus K \subseteq U$  bazni otvoren skup oko 0. Neka je  $n$  dovoljno velik da je  $\frac{1}{n} \in \langle a, b \rangle$ , i neka je  $\langle c, d \rangle \subseteq V$  bazni otvoren skup oko  $\frac{1}{n}$ . Konačno, odaberimo točku  $z \in \langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \rangle \cap \langle c, d \rangle$ .

Tada je  $z \in \langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \rangle \subseteq U$  i  $z \in \langle c, d \rangle \subseteq V \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$ .

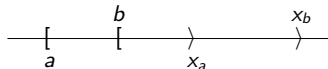


## Primjer 2:

 $\mathbb{R}_\ell$  je normalan

$\mathbb{R}_\ell$  ima finiju topologiju nego  $\mathbb{R}^1$  pa je  $\mathbb{R}_\ell$   $T_1$ -prostor.

**Normalnost:** Neka su  $A, B \subseteq \mathbb{R}_\ell$  disjunktni zatvoreni skupovi. Za svaki  $a \in A$  neka je  $[a, x_a)$  bazni otvoren skup koji ne siječe  $B$  (takav postoji jer  $a \notin B = \bar{B}$ ), i za svaki  $b \in B$  neka je  $[b, x_b)$  bazni otvoren skup koji ne siječe  $A$ . Tada su  $U := \bigcup_{a \in A} [a, x_a)$  i  $V := \bigcup_{b \in B} [b, x_b)$  disjunktna okoline od  $A$  odnosno  $B$ . Naime, kada bi bilo  $U \cap V \neq \emptyset$  postojali bi  $a \in A$  i  $b \in B$  t.d. je  $[a, x_a) \cap [b, x_b) \neq \emptyset$ . Tada bi, ako je npr.  $a < b$ , bilo  $b \in [a, x_a)$ , tj. bilo bi  $[a, x_a) \cap B \neq \emptyset$ .



$${}^1\langle a, b \rangle = \bigcup \left\{ \left[ a + \frac{1}{n}, b \right) : n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} < b - a \right\}.$$

## Primjer 3:

Sorgenfreyeva daska  $\mathbb{R}_\ell^2 = \mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$  je regularna ali nije normalna

$\mathbb{R}_\ell$  je normalan, dakle i regularan, pa je  $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$  regularan.

Pretpostavimo da je  $\mathbb{R}_\ell^2$  normalan i neka je  $L := \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}_\ell\}$

**Sorgenfreyev pravac.**  $L$  je zatvoren u  $\mathbb{R}_\ell^2$  i ima diskretnu topologiju, pa je svaki podskup  $A \subseteq L$  zatvoren u  $\mathbb{R}_\ell^2$ . Dakle, za svaki  $\emptyset \neq A \subsetneq L$  postoje disjunktni, u  $\mathbb{R}_\ell^2$  otvoreni, skupovi  $U_A \supseteq A$  i  $V_A \supseteq L \setminus A$ . Skup  $D$  racionalnih točaka u  $\mathbb{R}_\ell^2$  je gust u  $\mathbb{R}_\ell^2$ .

Definirajmo  $\theta: \mathcal{P}(L) \rightarrow \mathcal{P}(D)$  sa  $\theta(A) := D \cap U_A$  za  $\emptyset \neq A \subsetneq L$ ;  $\theta(\emptyset) := \emptyset$ ;  $\theta(L) := D$ .

**$\theta$  je injkcija:** Za  $\emptyset \neq A \subsetneq L$  je  $\theta(A) = D \cap U_A$  neprazan i  $\neq D$ , jer je  $D \cap V_A \neq \emptyset$ . Treba pokazati da za neki drugi  $\emptyset \neq B \subsetneq L$  je  $\theta(B) \neq \theta(A)$ . Neka je npr.  $x \in A \setminus B$ . Tada je  $x \in L \setminus B$  pa je  $x \in U_A \cap V_B$ , što je otvoren skup, pa postoji  $y \in (U_A \cap V_B) \cap D$ . Dakle,  $y \in U_A$  i  $y \notin U_B$  pa je  $D \cap U_A \neq D \cap U_B$ , tj.  $\theta$  je injkcija. ✓

## Primjer 3 (nastavak):

Kako je skup  $D$  prebrojivo beskonačan a  $L$  je neprebrojiv, postoji injkcija  $\phi: \mathcal{P}(D) \rightarrow L$  (jer je  $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ ).

Stoga je kompozicija  $\mathcal{P}(L) \xrightarrow{\theta} \mathcal{P}(D) \xrightarrow{\phi} L$  injektivno preslikavanje s  $\mathcal{P}(L)$  u  $L$   $\nRightarrow$  teorem 7.8.

Primjer potprostora normalnog prostora koji nije normalan pokazat ćemo kasnije.

## Primjer 3:

## Normalni prostori

Dobra klasa prostora jer sadrži metrizabilne i parakompaktne prostore. Prvi važan teorem je

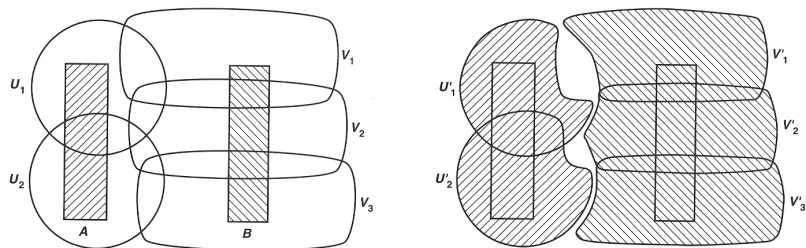
## Teorem 32.1

*Svaki regularan prostor s prebrojivom bazom je normalan.*

**Dokaz:** Neka su  $A, B \subseteq X$  disjunktni zatvoreni skupovi a  $\mathcal{B}$  prebrojiva baza.

Svaki  $a \in A$  ima okolinu  $W$  koja ne siječe  $B$  i postoji okolina  $W_1$  t.d. je  $a \in W_1 \subseteq \bar{W}_1 \subseteq W$ , pa onda postoji bazna okolina od  $a$  sadržana u  $W_1$ . Tako dobivamo prebrojiv pokrivač skupa  $A$  otvorenim skupovima, nazovimo ih  $U_n$ , t.d. je  $\bar{U}_n \cap B = \emptyset$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Analogno dobivamo prebrojiv otvoren pokrivač  $\{V_n\}$  skupa  $B$  t.d. je  $\bar{V}_n \cap A = \emptyset$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Neka je  $U := \bigcup U_n$  i  $V := \bigcup V_n$ . To su okoline skupova  $A$  odnosno  $B$ , ali ne nužno disjunktna.

Zato definiramo  $U'_n := U_n \setminus \bigcup_{i=1}^n \bar{V}_i$  i  $V'_n := V_n \setminus \bigcup_{i=1}^n \bar{U}_i$ .



Skupovi  $U' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U'_n$  i  $V' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V'_n$  su tražene disjunktne okoline skupova  $A$  odnosno  $B$ .  $\square$

**Teorem 32.2**  
 Svaki je metrizabilan prostor normalan.

**Dokaz:**  $U := f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$  i  $V := f^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$  su disjunktne okoline disjunktних zatvorenih skupova  $A$  i  $B$ , gdje je  $f(x) := \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$ .  $\square$

**Teorem 32.3**  
 Svaki kompaktn Hausdorffov prostor je normalan.

**Dokaz:** Prema lemi 26.4, kompaktn Hausdorffov prostor je regularan. Neka su  $A, B \subseteq X$  disjunktne zatvorene skupovi. Za svaki  $a \in A$  neka su  $U_a$  i  $V_a$  disjunktne okoline od  $a$  odnosno  $B$ . Familija  $\{U_a\}_{a \in A}$  je otvoren pokrivač skupa  $A$ , pa zbog kompaktnosti postoji konačan potpokrivač  $\{U_{a_1}, \dots, U_{a_m}\}$ . Tada su skupovi  $U := U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_m}$  i  $V := V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_m}$  disjunktne okoline skupova  $A$  odnosno  $B$ .  $\square$

**Teorem 32.4**  
 Svaki je dobro uređen skup s uređajnom topologijom normalan.

**Dokaz:** Svaki interval oblika  $\langle a, y \rangle$  je otvoren: Zaista, ako je  $y$  maksimum DUS-a  $X$  onda je  $\langle a, y \rangle$  bazni otvoren skup. Inače je  $\langle a, y \rangle = \langle a, y' \rangle$  gdje je  $y'$  neposredni sljedbenik od  $y$ .  $\checkmark$   
 Neka je  $a_0$  minimum skupa  $X$  (minimum postoji jer je  $X$  DUS). Neka su  $A, B \subseteq X$  zatvoreni disjunktne i neka ne sadrže  $a_0$ . Svaki  $a \in A$  ima baznu okolinu koja ne siječe  $B$ , i u njoj postoji interval  $\langle x, a \rangle$ . Za svaki  $a \in A$  odaberemo takav interval  $\langle x_a, a \rangle$  disjunktan s  $B$ . Slično, za svaki  $b \in B$  odaberemo  $\langle y_b, b \rangle$  disjunktan s  $A$ . Skupovi  $U := \bigcup_{a \in A} \langle x_a, a \rangle$  i  $V := \bigcup_{b \in B} \langle y_b, b \rangle$  su okoline od  $A$  odnosno  $B$ . **Tvrđnja:**  $U \cap V = \emptyset$ . Ako je  $z \in U \cap V$  onda je  $z \in \langle x_a, a \rangle \cap \langle y_b, b \rangle$  za neke  $a \in A, b \in B$ . Neka je  $a < b$ . Tada je  $a > y_b$  tj.  $a \in \langle y_b, b \rangle$ ,  $\neq$ .  
 Neka je  $a_0 \in A$ . Skup  $\{a_0\}$  je otvoren i zatvoren pa prema dokazanom postoje disjunktne okoline  $U \supseteq A \setminus \{a_0\}$  i  $V \supseteq B$ . Tada su  $U \cup \{a_0\}$  i  $V$  tražene disjunktne okoline od  $A$  i  $B$ .  $\square$

**Neprebrojiv produkt  $\mathbb{R}^J$  nije normalan (dokaz nije jednostavan!)**

- Ovaj primjer pokazuje sljedeće:
- 1 Regularan prostor ne mora biti normalan.
  - 2 Potprostor normalnog prostora ne mora biti normalan ( $\mathbb{R}^J \cong (0, 1)^J \subseteq [0, 1]^J$ , koji je, prema Tihonovljevu teoremu, kompaktn Hausdorffov, dakle i normalan).
  - 3 Neprebrojiv produkt normalnih prostora ne mora biti normalan.

**$S_\Omega \times \overline{S}_\Omega$  nije normalan (ovaj je primjer nešto jednostavniji)**

- I ovaj primjer pokazuje tri stvari:
- 1 Regularan prostor ne mora biti normalan.
  - 2 Potprostor normalnog prostora ne mora biti normalan.
  - 3 Produkt dvaju normalnih prostora ne mora biti normalan.

## A sada ,pravi' teoremi:

### Teorem 33.1 (Urysonova lema)

Neka je  $X$  normalan prostor,  $A, B \subseteq X$  disjunktni zatvoreni skupovi. Tada postoji neprekidna funkcija  $f: X \rightarrow [0, 1]$  t.d. je  $f(x) = 0$  za  $x \in A$  i  $f(x) = 1$  za  $x \in B$ .

**Dokaz:** Neka je  $Q := \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ . Za sve  $q \in Q$  definirat ćemo otvorene skupove  $U_q$  t.d. za  $p < q$  vrijedi  $\bar{U}_p \subseteq U_q$ . Skup  $Q$  je prebrojiv pa ga možemo numerirati, tj. „svrstati u niz”. Neka su prva dva člana toga niza 1 i 0. Neka je  $U_1 := X \setminus B$ .  $A \subseteq U_1$  pa  $\exists$  otvoren  $U_0$  t.d. je  $A \subseteq U_0 \subseteq \bar{U}_0 \subseteq U_1$ . Općenito, neka je  $Q_n$  skup prvih  $n$  članova niza  $Q$  i neka su za sve  $q \in Q_n$  već definirani otvoreni skupovi  $U_q$  t.d. je  $\bar{U}_p \subseteq U_q$  čim je  $p < q$ . Neka je  $r \in Q$  sljedeći u nizu, tj.  $Q_{n+1} = Q_n \cup \{r\}$ . S obzirom na „običan” uređaj u  $\mathbb{R}$ ,  $Q_{n+1}$  je totalno uređen. Kako je  $r \neq 0$  i  $r \neq 1$ , u  $Q_{n+1}$  postoji neposredan prethodnik  $p$  i neposredan sljedbenik  $q$ .

## dokaz Urysonove leme (nastavak)

Skupovi  $U_p$  i  $U_q$  su već definirani i vrijedi  $\bar{U}_p \subseteq U_q$ . Zbog normalnosti postoji otvoren skup  $U_r$  t.d. je  $\bar{U}_p \subseteq U_r \subseteq \bar{U}_r \subseteq U_q$ . Lako se vidi da za sve  $s < t$  u  $Q_{n+1}$  vrijedi  $\bar{U}_s \subseteq U_t$ . Tako su induktivno definirani skupovi  $U_q$  za sve  $q \in Q$ . Proširimo tu definiciju na sve  $q \in \mathbb{Q}$  stavljajući  $U_q := \emptyset$  za  $q < 0$ , i  $U_q := X$  za  $q > 1$ . Sada za sve  $p, q \in \mathbb{Q}$  vrijedi  $\bar{U}_p \subseteq U_q$  čim je  $p < q$ . Za svaki  $x \in X$  definirajmo skup  $\mathbb{Q}(x) := \{q \in \mathbb{Q} : x \in U_q\}$ . Očito je  $\mathbb{Q}(x)$  odozdo omeđen i  $\inf \mathbb{Q}(x) \in [0, 1]$ .

Definirajmo  $f: X \rightarrow [0, 1]$  formulom

$$f(x) := \inf \mathbb{Q}(x) = \inf \{q \in \mathbb{Q} : x \in U_q\}.$$

**$f$  je tražena funkcija:** Za  $x \in A$  je  $x \in U_q$  za sve  $q \geq 0$  pa je  $f(x) = 0$ . Za  $x \in B$ ,  $x \notin U_q$  za  $q \leq 1$ , pa je  $f(x) = 1$ .

## dokaz Urysonove leme (kraj)

Za dokaz neprekidnosti trebamo dvije tvrdnjice:

- (1)  $x \in \bar{U}_q \Rightarrow f(x) \leq q$ : Za  $x \in \bar{U}_q$  je  $x \in U_s, \forall s > q$ , pa  $\mathbb{Q}(x)$  sadrži sve racionalne brojeve  $> q$ . Stoga je  $f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \leq q$ . ✓
- (2)  $x \notin U_q \Rightarrow f(x) \geq q$ : Ako  $x \notin U_q$  onda  $x \notin U_s$  za sve  $s < q$ , pa  $\mathbb{Q}(x)$  ne sadrži brojeve  $< q$ . Stoga je  $f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \geq q$ . ✓

**$f$  je neprekidna:** Za  $x_0 \in X$  i  $\langle c, d \rangle \ni f(x_0)$  treba naći otvoren  $U \ni x_0$  t.d. je  $f(U) \subseteq \langle c, d \rangle$ .

Neka su  $p, q \in \mathbb{Q}$  t.d. je  $c < p < f(x_0) < q < d$ .

**Tvrdnja:**  $U := U_q \setminus \bar{U}_p$  je tražena okolina od  $x_0$ .

Prvo,  $x_0 \in U$  jer  $f(x_0) < q \stackrel{(2)}{\Rightarrow} x_0 \in U_q$ , a  $f(x_0) > p \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x_0 \notin \bar{U}_p$ .

Drugo, pokažimo da je  $f(U) \subseteq \langle c, d \rangle$ . Za  $x \in U$  je  $x \in U_q \subseteq \bar{U}_q$  pa je zbog (1)  $f(x) \leq q < d$ . S druge strane  $x \notin \bar{U}_p$  pa  $x \notin U_p$ , te zbog (2) vrijedi  $f(x) \geq p > c$ . □

## Funkcionalna separabilnost

### Definicija

Ako za podskupove  $A, B \subseteq X$  postoji neprekidna funkcija  $f: X \rightarrow [0, 1]$  t.d. je  $f(A) = \{0\}$  i  $f(B) = \{1\}$  onda kažemo da se  $A$  i  $B$  **mogou funkcijski separirati**.

Urysonova lema pokazuje da je  $X$  normalan akko se disjunktni zatvoreni podskupovi mogu funkcijski separirati. Međutim, analogna tvrdnja u regularnim prostorima ne vrijedi — točka i zatvoren skup ne mogu se uvijek funkcijski separirati.

### Definicija

$T_1$ -prostor  $X$  je **potpuno regularan** ako za svaki zatvoren skup  $A$  i točku  $x_0 \notin A$  postoji neprekidna funkcija  $f: X \rightarrow [0, 1]$  t.d. je  $f(x_0) = 1$  i  $f(A) = \{0\}$ .

Vrijedi:  $\{\text{normalni}\} \subsetneq \{\text{potpuno regularni}\} \subsetneq \{\text{regularni}\}$

## Potpuna regularnost potprostora i produkata

### Teorem 33.2

*Potprostor potpuno regularnog prostora je potpuno regularan.  
 Produkt potpuno regularnih prostora je potpuno regularan.*

**Dokaz:**  $Y \subseteq X$ ,  $A \subseteq Y$  zatvoren i  $x_0 \in Y \setminus A$ . Zbog je  $A = \overline{A} \cap Y$ ,  $x_0 \notin \overline{A}$  pa postoji  $f: X \rightarrow [0, 1]$  t.d. je  $f(x_0) = 1$  i  $f(\overline{A}) = \{0\}$ .

Restrikcija  $f|_Y: Y \rightarrow [0, 1]$  je tražena funkcija. ✓

Neka je  $X := \prod X_\alpha$  produkt potpuno regularnih prostora,  $A \subseteq X$  zatvoren i  $\mathbf{b} = (b_\alpha) \in X \setminus A$ . Neka je  $\mathbf{b} \in \prod U_\alpha \subseteq X \setminus A$ , gdje je  $U_\alpha = X_\alpha$  osim za  $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$ , i neka su  $f_i: X_{\alpha_i} \rightarrow [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , t.d. je  $f_i(b_{\alpha_i}) = 1$  i  $f_i(X_{\alpha_i} \setminus U_{\alpha_i}) = \{0\}$ . Funkcije  $\phi_i(\mathbf{x}) := f_i(\pi_{\alpha_i}(\mathbf{x}))$  su neprekidne i iščezavaju izvan  $\pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ . Produkt  $f(\mathbf{x}) := \phi_1(\mathbf{x}) \cdot \phi_2(\mathbf{x}) \cdot \dots \cdot \phi_n(\mathbf{x})$  je tražena funkcija jer je  $f(\mathbf{b}) = 1$  i  $f$  iščezava izvan  $\prod U_\alpha$ , pa je jednaka 0 na  $A$ . □

## Primjer

$\mathbb{R}_l^2$  i  $S_\Omega \times \overline{S}_\Omega$  su potpuno regularni ali ne i normalni

Oba su produkti normalnih, dakle i potpuno regularnih prostora. □

Postoje regularni prostori koji nisu potpuno regularni, ali su takvi primjeri mnogo složeniji.

## Urysonov teorem o metrizaciji

Prema teoremu 32.1 svaki je regularan prostor s prebrojivom bazom normalan. Vrijedi, međutim, mnogo više:

### Teorem 34.1 (Urysonov teorem metrizacije)

*Svaki regularan prostor s prebrojivom bazom je metrizabilan.*

**Dokaz:** Pokazat ćemo, i to na dva načina, da se  $X$  može smjestiti u neki metrički prostor. Dokažimo najprije:

**Tvrdnja:** Postoji niz neprekidnih funkcija  $f_n: X \rightarrow [0, 1]$  t.d. za svaki  $x_0 \in X$  i svaku okolinu  $U \ni x_0$  postoji  $n \in \mathbb{N}$  t.d. je  $f_n(x_0) > 0$  i  $f_n|_{X \setminus U} = 0$ .

Neka je  $\{B_n\}$  prebrojiva baza i za sve  $n, m$  t.d. je  $\overline{B}_n \subseteq B_m$  neka je  $g_{n,m}: X \rightarrow [0, 1]$  t.d. je  $g_{n,m}(\overline{B}_n) = \{1\}$  i  $g_{n,m}(X \setminus B_m) = \{0\}$  (normalnost). Za  $U \ni x_0$  postoji  $B_m$  t.d. je  $x_0 \in B_m \subseteq U$ , pa zbog regularnosti postoji  $B_n$  t.d. je  $x_0 \in B_n \subseteq \overline{B}_n \subseteq B_m$ . Tada je  $g_{n,m}(x_0) = 1 > 0$  i  $g_{n,m}|_{X \setminus U} = 0$ . Familija  $\{g_{n,m}\}$  je prebrojiva, pa prenumeracijom dobivamo rečene funkcije  $f_n, n \in \mathbb{N}$ .

## Urysonov teorem metrizacije (1. dokaz)

**Prvi dokaz:** Definirajmo  $F: X \rightarrow \mathbb{R}^\omega$  s  $F(x) := (f_1(x), f_2(x), \dots)$ .

$F$  je neprekidna jer  $\mathbb{R}^\omega$  ima produktnu topologiju.

$F$  je injekcija jer za  $x \neq y$  postoji  $n \in \mathbb{N}$  t.d. je  $f_n(x) > 0$  i  $f_n(y) = 0$ .

**Tvrdnja:**  $F: X \rightarrow F(X) \subseteq \mathbb{R}^\omega$  je otvoreno preslikavanje, pa je  $F$  homeomorfizam s  $X$  na potprostor  $F(X)$  metričkog prostora  $\mathbb{R}^\omega$ .

Neka je  $U \subseteq X$  otvoren. Za  $z_0 \in F(U)$  neka je  $x_0 \in U$  t.d. je  $F(x_0) = z_0$  i neka je  $N \in \mathbb{N}$  t.d. je  $f_N(x_0) > 0$  i  $f_N(X \setminus U) = \{0\}$ .

Neka je  $V := \pi_N^{-1}(\langle 0, +\infty \rangle) \subseteq X$ .  $V$  je otvoren, pa je skup  $W := V \cap F(X)$  otvoren u  $F(X)$ .

Pokažimo da je  $z_0 \in W \subseteq F(U)$ .

Prvo,  $z_0 \in W$  jer je  $\pi_N(z_0) = \pi_N(F(x_0)) = f_N(x_0) > 0$ .

Drugo, za svaki  $z \in W$  je  $z = F(x)$  za neki  $x \in X$ , i  $\pi_N(z) \in \langle 0, +\infty \rangle$ .

Kako je  $\pi_N(z) = \pi_N(F(x)) = f_N(x)$  i  $f_N|_{X \setminus U} = 0$ , mora biti  $x \in U$ .

Stoga je  $z = F(x) \in F(U)$ , t.j.  $W \subseteq F(U)$ . □ e. d. prvog dokaza



**Drugi dokaz:** Sada ćemo  $X$  smjestiti u  $\mathbb{R}^\omega$  s **uniformnom** metrikom  $\bar{\rho}$ , zapravo u potprostor  $[0, 1]^\omega$  gdje je  $\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_i |x_i - y_i|$ .  
 Neka su  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , funkcije iz tvrdnje na početku dokaza, uz dodatni uvjet da je  $f_n(x) \leq \frac{1}{n}$  za sve  $x$  (npr.  $\hat{f}_n := \frac{1}{n}f_n$ ).  
 Opet definiramo  $F: X \rightarrow [0, 1]^\omega$  s  $F(x) := (f_1(x), f_2(x), \dots)$ , i tvrdimo da je  $F$  smještenje s obzirom na  $\bar{\rho}$ .  
 Iz prvog dokaza znamo da je  $F: X \rightarrow F(X)$  bijekcija, i da je, s obzirom na produktnu topologiju na  $[0, 1]^\omega$ , otvoreno preslikavanje. Kako je uniformna topologija finija od produktne,  $F: X \rightarrow F(X)$  je otvoreno i u uniformnoj topologiji.

Treba još pokazati da je  $F$  neprekidno i u uniformnoj topologiji.

Neka je  $x_0 \in X$  i  $\varepsilon > 0$ .  
 Odaberimo  $N \in \mathbb{N}$  t.d. je  $\frac{1}{N} < \varepsilon$ , i neka su  $U_i \ni x_0$  okoline t.d. je  $|f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$  za sve  $x \in U_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .  
 Neka je  $U := U_1 \cap \dots \cap U_N$ .  
 Tvrdimo da je  $F(U) \subseteq B_{\bar{\rho}}(F(x_0), \varepsilon)$ .  
 Neka je  $x \in U$ . Za  $i \leq N$  je  $|f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$ , a za  $i > N$  je  $|f_i(x) - f_i(x_0)| \leq \frac{1}{i} < \frac{1}{N} < \varepsilon$  (jer je  $f_i: X \rightarrow [0, \frac{1}{i}]$ ).  
 Stoga je  $\bar{\rho}(F(x), F(x_0)) = \sup_i |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$  za sve  $x \in U$ , pa je  $F$  neprekidno preslikavanje.  $\square$

Prvi dokaz Urysonova teorema metrizacije pokazuje i više:

### Teorem 34.2 (Teorem o smještenju)

*Neka je  $X$   $T_1$ -prostor i neka je  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$  indeksirana familija neprekidnih funkcija  $f_\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}$  takvih da za svaku točku  $x_0 \in X$  i svaku okolinu  $U \ni x_0$  postoji  $\alpha \in J$  t.d. je  $f_\alpha(x_0) > 0$  i  $f_\alpha|_{X \setminus U} = 0$ . Tada je funkcija  $F: X \rightarrow \mathbb{R}^J$  definirana s  $F(x) := (f_\alpha(x))_{\alpha \in J}$ , smještenje prostora  $X$  u  $\mathbb{R}^J$  (s produktnom topologijom). Ako  $f_\alpha$  preslikavaju  $X$  u  $[0, 1]$  onda  $F$  smještava  $X$  u  $[0, 1]^J$  (s produktnom topologijom).*

Dokaz je gotovo identičan prvom dokazu Urysonova teorema metrizacije. Treba samo  $\mathbb{R}^\omega$  zamijeniti s  $\mathbb{R}^J$ .  
 Svojsvo  $T_1$  treba za injektivnost preslikavanja  $F$ .

### Definicija

Za familiju  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$  realnih funkcija kao u prethodnom teoremu, tj. takvih da za svaku točku  $x_0$  i svaku okolinu  $U \ni x_0$  postoji  $\alpha$  t.d. je  $f_\alpha(x_0) > 0$  i  $f_\alpha(X \setminus U) = \{0\}$ , kažemo da **razdvaja točke od zatvorenih skupova**.

U  $T_1$ -prostorima je postojanje takve familije funkcija ekvivalentno potpunoj regularnosti (očito), pa, prema teoremu 34.2 o smještenju, imamo:

### Teorem 34.3

*Prostor  $X$  je potpuno regularan ako i samo ako je homeomorfan nekom potprostoru od  $[0, 1]^J$  za neki  $J$ .*

### Teorem 35.1 (Tietzeov teorem)

Neka je  $X$  normalan prostor i  $A \subseteq X$  zatvoren potprostor.

- (a) Svako se neprekidno preslikavanje  $f: A \rightarrow [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  može proširiti do neprekidnog preslikavanja  $F: X \rightarrow [a, b]$ .
- (b) Svako se neprekidno preslikavanje  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  može proširiti do neprekidnog preslikavanja  $G: X \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Dokaz:** Konstruirat ćemo niz neprekidnih funkcija na  $X$  koji uniformno konvergira, i na  $A$  sve bolje i bolje aproksimira  $f$ .

**1. korak:** Najprije ćemo definirati jednu posebnu funkciju  $g$  na  $X$  koja „nije prevelika” i na  $A$  „kako-tako aproksimira”  $f$ . Točnije, neka je  $f: A \rightarrow [-r, r]$ . Konstruirat ćemo  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  t.d. je

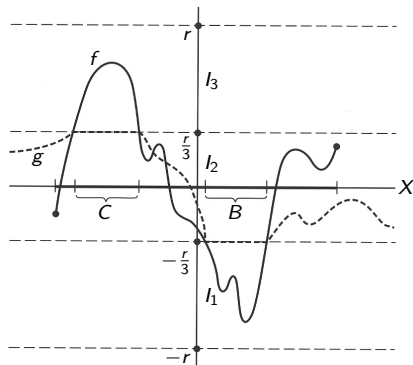
$$|g(x)| \leq \frac{1}{3}r, \quad x \in X$$

$$|g(a) - f(a)| \leq \frac{2}{3}r, \quad a \in A.$$

Podijelimo segment  $[-r, r]$  na tri dijela:

$$[-r, r] = [-r, -\frac{1}{3}r] \cup [-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r] \cup [\frac{1}{3}r, r] =: I_1 \cup I_2 \cup I_3,$$

i neka su  $B := f^{-1}(I_1)$  i  $C := f^{-1}(I_3)$ .  $B$  i  $C$  su zatvoreni u  $A$  pa onda i u  $X$ , pa prema Urysonovoj lemi, postoji neprekidna funkcija



$g: X \rightarrow [-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r]$   
 t.d. je  $g(x) = -\frac{1}{3}r$  za  $x \in B$   
 i  $g(x) = \frac{1}{3}r$  za  $x \in C$ .  
 Očito je  $|g(x)| \leq \frac{1}{3}r$  za sve  $x$ .  
 Pokažimo drugu nejednakost.  
 Za  $a \in B$  je  $f(a), g(a) \in I_1$ ,  
 za  $a \in C$  je  $f(a), g(a) \in I_3$ ,  
 a za  $a \notin B \cup C$  je  $f(a), g(a) \in I_2$ ,  
 pa je uvijek  $|g(a) - f(a)| \leq \frac{2}{3}r$ .

**2. korak:** Dokažimo (a). Neka je  $f: A \rightarrow [-1, 1]$  neprekidna funkcija.

Prema 1. koraku (za  $r = 1$ ) postoji  $g_1: X \rightarrow \mathbb{R}$  t.d. je

$$|g_1(x)| \leq \frac{1}{3}, \quad x \in X,$$

$$|f(a) - g_1(a)| \leq \frac{2}{3}, \quad a \in A.$$

$(f - g_1)(A) \subseteq [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$  pa 1. korak za  $r = \frac{2}{3}$  daje  $g_2: X \rightarrow \mathbb{R}$  t.d. je

$$|g_2(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}, \quad x \in X,$$

$$|f(a) - g_1(a) - g_2(a)| \leq (\frac{2}{3})^2, \quad a \in A.$$

Sada primijenimo 1. korak na funkciju  $f - g_1 - g_2$ , itd.

Dobivamo niz funkcija  $g_n, n \in \mathbb{N}$ , t.d. je

$$|g_n(x)| \leq \frac{1}{3} (\frac{2}{3})^{n-1}, \quad x \in X, \quad (3)$$

$$|f(a) - g_1(a) - \dots - g_{n-1}(a) - g_n(a)| \leq (\frac{2}{3})^n, \quad a \in A. \quad (4)$$

Sada definiramo  $F: X \rightarrow \mathbb{R}$  s

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).$$

$F$  je neprekidna i  $F(X) \subseteq [-1, 1]$  (red  $\sum g_n$  konvergira uniformno jer je dominiran redom  $\sum \frac{1}{3} (\frac{2}{3})^{n-1}$ , i suma mu je po modulu  $\leq 1$ ). Ostaje pokazati da je  $F|_A = f$ . Prema (2), za  $a \in A$  vrijedi

$$|f(a) - \sum_{i=1}^n g_i(a)| \leq (\frac{2}{3})^n,$$

pa red  $\sum g_i(a)$  konvergira k  $f(a)$  za sve  $a \in A$ .

q. e. d. (a)

3. korak: Dokažimo (b).  $\mathbb{R}$  možemo zamijeniti intervalom  $\langle -1, 1 \rangle$  (jer su homeomorfni), pa neka je  $f: A \rightarrow \langle -1, 1 \rangle$  neprekidna funkcija. Prema (a), postoji neprekidno proširenje  $F: X \rightarrow [-1, 1]$ , ali je to preslikavanje u *segment*  $[-1, 1]$ , a treba u *otvoren interval*  $\langle -1, 1 \rangle$ , pa ćemo ga „popraviti” jednostavnim trikom.

Neka je  $D := F^{-1}(\{-1, 1\}) \subseteq X$ . Skup  $D$  je zatvoren, a jer je  $F(A) = f(A) \subseteq \langle -1, 1 \rangle$ , disjunktan je s  $A$ . Prema Urysonovoj lemi, postoji  $\phi: X \rightarrow [0, 1]$  t.d. je  $\phi(D) = \{0\}$  i  $\phi(A) = \{1\}$ . Definirajmo  $G(x) := F(x) \cdot \phi(x)$ . Funkcija  $G$  je neprekidna i proširuje  $f$  jer za  $a \in A$  je  $G(a) = F(a) \cdot \phi(a) = f(a) \cdot 1$ . Konačno,  $G(X) \subseteq \langle -1, 1 \rangle$  jer za  $x \in D$  je  $G(x) = F(x) \cdot 0 = 0$ , a za  $x \notin D$  je  $|F(x)| < 1$  pa je  $|G(x)| \leq |F(x)| \cdot 1 < 1$ .  $\square$

**Nosač** funkcije  $\phi: X \rightarrow [0, 1]$  je zatvorenje skupa  $\phi^{-1}(\langle 0, 1 \rangle)$ , oznaka:  $\text{supp } \phi$ . Dakle, ako  $x \notin \text{supp } \phi$  onda postoji okolina oko  $x$  na kojoj  $\phi$  iščezava.

**Definicija**  
 Neka je  $\{U_1, \dots, U_n\}$  konačan indeksiran otvoren pokrivač prostora  $X$ . Za indeksiranu familiju neprekidnih funkcija  $\phi_i: X \rightarrow [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , kažemo da je **particija jedinice podređena pokrivaču  $\{U_i\}$**  ako je:

- (1)  $\text{supp } \phi_i \subseteq U_i$  za sve  $i$ ;
- (2)  $\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1$  za sve  $x$ .

**Teorem 36.1 (Postojanje konačne particije jedinice)**  
 Za svaki konačan otvoren pokrivač  $\{U_1, \dots, U_n\}$  normalnog prostora  $X$  postoji njemu podređena particija jedinice.

Za razliku od regularnih prostora s prebrojivom bazom koji se, kao što smo vidjeli u Urysonovu teoremu metrizacije, mogu smjestiti u „beskonačno-dimenzionalni” euklidski prostor  $\mathbb{R}^\omega$ , mnogostrukosti su važna klasa prostora koji se mogu smjestiti u konačno-dimenzionalni euklidski prostor.

**Definicija**  
**Topološka  $n$ -mногоstrukost** je Hausdorffov prostor s prebrojivom bazom i takav da svaka točka ima okolinu homeomorfnu nekom otvorenom podskupu od  $\mathbb{R}^n$ .

1-mногоstrukosti se često nazivaju **krivuljama** (iako se taj termin često rabi i za mnogo općenitije 1-dimenzionalne prostore), a 2-mногоstrukosti se često nazivaju **plohama**.

**Dokaz:** To je dokaz koji smo napravili u Analizi. Ukratko:

1. korak: **sažimanje pokrivača.** Koristeći se normalnošću prostora  $X$ , pokrivač  $\{U_1, \dots, U_n\}$  zamijenimo otvorenim pokrivačem  $\{V_1, \dots, V_n\}$  t.d. za sve  $i$  vrijedi  $\overline{V_i} \subseteq U_i$ .
2. korak: Zadani pokrivač  $\{U_1, \dots, U_n\}$  sažmemo do pokrivača  $\{V_1, \dots, V_n\}$ , a njega sažmemo do pokrivača  $\{W_1, \dots, W_n\}$ , pa za svaki  $i$  imamo  $\overline{W_i} \subseteq V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$ . Prema Urysonovoj lemi za svaki  $i$  neka je  $\psi_i: X \rightarrow [0, 1]$  t.d. je  $\psi_i(\overline{W_i}) = \{1\}$  i  $\psi_i(X \setminus V_i) = \{0\}$ . Kako je  $\psi_i^{-1}(\langle 0, 1 \rangle) \subseteq V_i$ , to je  $\text{supp } \psi_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$ . Konačno definiramo  $\phi_i(x) := \frac{\psi_i(x)}{\sum_{j=1}^n \psi_j(x)}$ . Funkcije  $\phi_1, \dots, \phi_n$  čine traženu particiju jedinice.  $\square$

Kasnije, u vezi s parakompaktnošću, bavit ćemo se i particijama jedinice i otvorenim pokrivačima koji će biti beskonačni, čak neprebrojivi.

## Smještanje mnogostrukosti

## Teorem 36.2

Svaka se kompaktna  $n$ -mногоstrukost može smjestiti u  $\mathbb{R}^N$  za neki  $N$ .

**Dokaz:** Neka je  $\{U_1, \dots, U_k\}$  pokrivač od  $X$  otvorenim skupovima koji se mogu smjestiti u  $\mathbb{R}^n$  i neka su  $g_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  smještenja.

Neka je  $\phi_1, \dots, \phi_k$  particija jedinice podređena pokrivaču  $\{U_1, \dots, U_k\}$ .

Za  $i = 1, \dots, k$  definirajmo

$$h_i: X \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ s } h_i(x) := \begin{cases} \phi_i(x) \cdot g_i(x) & , x \in U_i \\ \mathbf{0} = (0, \dots, 0) & , x \in X \setminus \text{supp } \phi_i. \end{cases}$$

Sada definirajmo  $F: X \rightarrow \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_k \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_k$

formulom  $F(x) := (\phi_1(x), \dots, \phi_k(x), h_1(x), \dots, h_k(x))$ .

Preslikavanje  $F$  je neprekidno, a da je smještenje, zbog kompaktnosti od  $X$ , dovoljno je pokazati injektivnost.

dokaz:  $F$  je injektivno

Neka je  $F(x) = F(y)$ , tj.  $\phi_i(x) = \phi_i(y)$  i  $h_i(x) = h_i(y)$  za sve  $i$ .

Kako je  $\phi_i(x) > 0$  za neki  $i$ , to je i  $\phi_i(y) > 0$ , pa su  $x, y \in U_i$ .

Tada je

$$\phi_i(x) \cdot g_i(x) = h_i(x) = h_i(y) = \phi_i(y) \cdot g_i(y)$$

pa je  $g_i(x) = g_i(y)$ . Kako je  $g_i$  smještenje, dobivamo  $x = y$ .  $\square$