

3 POVEZANOST I KOMPAKTNOST

- Povezani prostori
- Povezani potprostori od \mathbb{R}
- Komponente i lokalna povezanost
- Kompaktni prostori
- Kompaktni potprostori od \mathbb{R}
- Gomilišta i kompaktnost
- Lokalna kompaktnost

Tri bazična teorema Matematičke analize

Sljedeća tri topološka teorema leže u osnovi cijele Analize:

- 1 **Teorem o međuvrijednostima** – treba npr. za konstrukciju inverznih funkcija kao $\sqrt[3]{x}$, dokaz Leme o kontrakciji, ...
- 2 **Weierstrassov teorem** o postojanju maksimuma neprekidne funkcije na segmentu – treba npr. za dokaz Lagrangeova teorema srednje vrijednosti, koji pak treba za dokaz teorema o implicitnoj i inverznoj funkciji, kao i za dokaz Newton-Leibnizove formule.
- 3 **Teorem o uniformnoj neprekidnosti** neprekidne funkcije na segmentu – treba npr. u dokazu da je svaka neprekidna funkcija integrabilna.

Osim što govore o svojstvima funkcije oni govore i o svojstvima segmenta $[a, b]$ – o **povezanosti** i o **kompaktnosti**.

Povezanost

Definicija

Separacija topološkog prostora je par disjunktih nepraznih otvorenih podskupova čija je unija cijeli prostor. Rabit ćemo oznaku $X = U \sqcup V$.
Prostor je **povezan** ako ne postoji njegova separacija.

Dakle, prostor X je povezan ako i samo ako su \emptyset i cijeli X jedini podskupovi koji su i otvoreni i zatvoreni.

Povezanost potprostora $Y \subseteq X$, može se karakterizirati i ovako:

Lema 23.1

*Separacija potprostora Y je par disjunktih nepraznih skupova A i B t.d. je $Y = A \cup B$ i niti jedan ne sadrži gomilište drugoga. (Opet rabimo oznaku $Y = A \sqcup B$.)
 Y je povezan akko ne postoji separacija od Y .*

Dokaz leme 23.1

\Rightarrow Neka je $Y = A \sqcup B$.

A je otvoren i zatvoren u Y pa je $A = \text{Cl}_Y A = \bar{A} \cap Y$.

Stoga je $\bar{A} \cap B = \bar{A} \cap (Y \cap B) = (\bar{A} \cap Y) \cap B = A \cap B = \emptyset$,
pa B ne sadrži niti jedno gomilište skupa A .

Analogno se pokazuje da A ne sadrži niti jedno gomilište skupa B . \triangle

\Leftarrow Obratno, neka je $Y = A \cup B$ gdje su A i B disjunktne neprazni skupovi i niti jedan ne sadrži gomilište drugoga, tj. $\bar{A} \cap B = \emptyset$ i $\bar{B} \cap A = \emptyset$.

Tada je $\bar{A} \cap Y = \bar{A} \cap (A \cup B) = (\bar{A} \cap A) \cup (\bar{A} \cap B) = \bar{A} \cap A = A$
i analogno je $\bar{B} \cap Y = B$, pa su A i B zatvoreni u Y , pa onda i otvoreni u Y , tj. $Y = A \sqcup B$. \square

Lema 23.2
 Neka je $X = C \sqcup D$ separacija i neka je $Y \subseteq X$ povezan podskup.
 Tada je ili $Y \subseteq C$ ili $Y \subseteq D$.

Dokaz: Skupovi $C \cap Y$ i $D \cap Y$ su otvoreni u Y , pa kada bi oba bili neprazni, bio bi Y nepovezan. \square

Teorem 23.3
 Unija povezanih skupova koji imaju zajedničku točku je povezana.

Dokaz: Neka je $Y := \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$, A_{α} povezani i $p \in \bigcap_{\alpha} A_{\alpha}$.
 Pretpostavimo da je $Y = C \sqcup D$ i neka je $p \in C$.
 Zbog prethodne leme je tada i $A_{\alpha} \subseteq C$ za sve α , pa je i $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \subseteq C$, tj. $D = \emptyset$, $\Rightarrow Y = C \sqcup D$. \square

Teorem 23.6
 (a) Neka je $\{B_{\alpha}\}_{\alpha}$ familija povezanih skupova i neka je A povezan i takav da je $A \cap B_{\alpha} \neq \emptyset$ za sve α .
 Tada je unija $A \cup \bigcup_{\alpha} B_{\alpha}$ povezan skup.
 (b) Konačan produkt povezanih prostora je povezan.

Dokaz(a): Neka je $C_{\alpha} = A \cup B_{\alpha}$. Tada je $\{C_{\alpha}\}_{\alpha}$ familija povezanih skupova koji imaju zajedničku točku (svaka točka iz A), pa je prema teoremu 23.3 njihova unija povezan skup.
 (b) Dovoljno je pokazati da je produkt $X \times Y$ dvaju povezanih prostora povezan.
 Odaberimo točku $y_0 \in Y$ i neka je $A := X \times \{y_0\}$, $B_x := \{x\} \times Y$, $x \in X$. Sada primijenimo (a). \square

Teorem 23.4
 Neka je $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$. Ako je A povezan onda je i B povezan.

Dokaz: Pretpostavimo da je $B = C \sqcup D$ separacija.
 Prema lemi 23.2 je $A \subseteq C$ (ili $A \subseteq D$), pa je i $B \subseteq \bar{A} \subseteq \bar{C}$.
 Kako je $\bar{C} \cap D = \emptyset$ to je $B \cap D = \emptyset \Rightarrow B = C \sqcup D$. \square

Zbog potpunosti navedimo i ovaj teorem dokazan u Analizi:

Teorem 23.5
 (a) X je povezan akko **ne** postoji neprekidna surjektivna funkcija $X \rightarrow \{0, 1\}$.
 (b) Ako je X povezan i $f: X \rightarrow Y$ neprekidno preslikavanje onda je $f(X)$ povezan podskup od Y .

A što je s povezanošću proizvoljnih produkata?
Primjer: \mathbb{R}^{ω} u box topologiji nije povezan
 Rastavimo $\mathbb{R}^{\omega} = A \sqcup B$, gdje je A skup svih omeđenih nizova realnih brojeva, a B skup svih neomeđenih nizova. A i B su očito neprazni i disjunktni.
 Pokažimo da su A i B otvoreni skupovi u box topologiji.
 Neka je $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\omega}$. Otvoren skup

$$U := \langle x_1 - 1, x_1 + 1 \rangle \times \langle x_2 - 1, x_2 + 1 \rangle \times \dots$$
 sastoji se od sâmih omeđenih nizova ako je \mathbf{x} omeđen niz, a od sâmih neomeđenih ako je \mathbf{x} neomeđen.

Povezanost beskonačnog produkta

Ali, u produktnoj topologiji \mathbb{R}^ω jeste povezan.

Neka je $\widetilde{\mathbb{R}}^n := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) : x_i = 0 \text{ za } i > n\} \subseteq \mathbb{R}^\omega$.

$\widetilde{\mathbb{R}}^n \cong \mathbb{R}^n$ je povezan (jer je \mathbb{R} povezan — pokazat ćemo kasnije).

Tada je, prema teoremu 23.3, i potprostor $\mathbb{R}^\infty := \bigcup \widetilde{\mathbb{R}}^n$ povezan jer svi $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ sadrže točku $\mathbf{0} = (0, 0, \dots)$.

Dokažimo da je zatvorenje od \mathbb{R}^∞ jednako \mathbb{R}^ω .

Neka je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\omega$, $U = \prod U_i$ proizvoljan bazni otvoren skup za produktnu topologiju oko točke \mathbf{x} , i neka je $N \in \mathbb{N}$ takav da je $U_i = \mathbb{R}$ za sve $i > N$.

Tada točka $\mathbf{x}_N := (x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$ pripada skupu U , pa je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty$, tj. $\mathbb{R}^\omega = \overline{\mathbb{R}^\infty}$ pa je, prema teoremu 23.4, povezan.

Uz odgovarajuću modifikaciju, ovaj dokaz pokazuje da je, uz produktnu topologiju, i produkt proizvoljne familije povezanih prostora povezan.

Povezanost linearnog kontinuuma i posljedice

Definicija

Totalno uređen skup $(L, <)$ koji ima barem dvije točke naziva se **linearni kontinuum** ako

- (1) L ima svojstvo supremuma, i
- (2) za sve $x < y$ postoji z takav da je $x < z < y$. (gustoća)

Teorem 24.1

Svaki linearni kontinuum L s uređajnom topologijom je povezan. Intervali i zrake u L također su povezani skupovi.

Dokaz je praktički dokaz povezanosti segmenta $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ iz Analize. \square

Korolar 24.2

Realni brojevi \mathbb{R} , te intervali i zrake u \mathbb{R} , su povezani skupovi. \square

Teorem o međuvrijednostima

Kao i za realne funkcije, vrijedi:

Teorem 24.3 (o međuvrijednostima)

Neka je X povezan prostor, Y linearni kontinuum a $f: X \rightarrow Y$ neprekidno preslikavanje. Tada za svake dvije točke $a, b \in X$ i svaku točku $y \in \langle f(a), f(b) \rangle \subseteq Y$ postoji $c \in X$ t.d. je $f(c) = y$.

Dokaz je kao u Analizi za realne funkcije. \square

Primjer: Duga linija

Za proizvoljan DUS X je skup $X \times [0, 1)$, s topologijom leksikografskog uređaja, linearni kontinuum (kao da smo između susjednih točaka iz X „umetnuli“ interval $\langle 0, 1 \rangle$).

Duga linija L je leksikografski uređen skup $S_\Omega \times [0, 1)$ iz kojeg je izvađen minimalni element.

L je (putevima) povezan lokalno homeomorfan s \mathbb{R} , ali se ne može smjestiti u \mathbb{R} (niti \mathbb{R}^n) (dok se \mathbb{R} može smjestiti u L). Zadatak: Dokaži!

Linearni kontinuum sasvim različit od \mathbb{R}

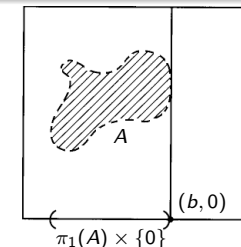
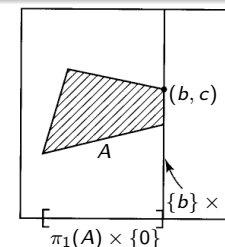
$I_0^2 = I \times I$ s topologijom leksikografskog uređaja

Netrivijalno je provjeriti jedino svojstvo supremuma.

Neka je $A \subseteq I_0^2$ i $b := \sup \pi_1(A)$.

Ako je $b \in \pi_1(A)$, tj. $A \cap (\{b\} \times I) \neq \emptyset$, onda postoji $c \in I$ t.d. je $(b, c) = \sup A \cap (\{b\} \times I)$, pa je to i supremum skupa A .

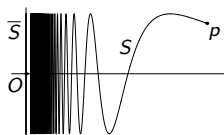
Ako $b \notin \pi_1(A)$ onda je $(b, 0) = \sup A$ (jer da je za neki $b' < b$, (b', c) gornja međa za A , bio bi b' gornja međa za $\pi_1(A)$).



Definicija

X je **putevima povezan** ako za svake dvije točke $x_0, x_1 \in X$ postoji **put** (t.j. neprekidna funkcija) $f: [a, b] \rightarrow X$ od x_0 do x_1 .

Klasični primjer povezanog ali ne i putevima povezanog prostora je **topološka sinusna krivulja** $\bar{S} \subseteq \mathbb{R}^2$, za $S = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x \in \langle 0, 1 \rangle\}$.



DZ: \bar{S} je povezan kao zatvorenje povezanog S .
 Neka je $f = (f_1, f_2): [a, c] \rightarrow \bar{S}$ put od O do p i neka je $b := \max f_1^{-1}(0)$. Zamijenimo $[b, c]$ s $[0, 1]$ i dobivamo (rabimo za put opet oznaku f)

$f = (f_1, f_2): [0, 1] \rightarrow \bar{S}$ t.d. je $f_1(0) = 0$ i $f(\langle 0, 1 \rangle) \subseteq S$.
 Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $0 < u_n < f_1(\frac{1}{n})$ t.d. je $\sin \frac{1}{u_n} = (-1)^n$, i neka je $0 < t_n < \frac{1}{n}$ t.d. je $f_1(t_n) = u_n$, tj. $f(t_n) = (u_n, (-1)^n)$.
 Kako je f_1 neprekidno, zbog $t_n \rightarrow 0$, niz $f(t_n)$ ima dva gomilišta: $(0, 1)$ i $(0, -1)$, pa f nije neprekidno, tj. \bar{S} **nije** putevima povezan.

Definicija

Komponente povezanosti putevima su klase ekvivalencije s obzirom na relaciju:

$$x \sim y \text{ ako postoji put u } X \text{ od } x \text{ do } y.$$

Slično kao za komponente povezanosti, dokazuje se:

Teorem 25.2

Komponente povezanosti putevima su disjunktni putevima povezani potprostori čija je unija cijeli X , i takvi su da svaki putevima povezan potprostor siječe samo jednog od njih. □

Definicija

Komponente povezanosti (kratko: **komponente**) prostora X su klase ekvivalencije s obzirom na relaciju:
 $x \sim y$ ako postoji povezan potprostor od X koji sadrži i x i y .

Teorem 25.1

Komponente od X su disjunktni povezani potprostori čija je unija cijeli X , i t.d. svaki povezan potprostor siječe samo jednog od njih (pa je sadržan u točno jednoj komponenti).

Dokaz: Jedino treba provjeriti povezanost komponenti.
 Neka je C neka komponenta i fiksirajmo točku $x_0 \in C$.
 Za proizvoljan $x \in C$, tj. $x \sim x_0$, \exists povezan A_x t.d. je $x, x_0 \in A_x$.
 Kako A_x siječe samo jednu komponentu, mora biti $A_x \subseteq C$.
 Dakle, $C = \bigcup_{x \in C} A_x$, pa je C povezan jer su svi A_x povezani i sadrže x_0 . □

Definicija

X je **lokalno (putevima) povezan u točki x** ako za svaku okolinu $U \ni x$ postoji (putevima) povezana okolina V t.d. je $x \in V \subseteq U$.
 Prostor X je **lokalno (putevima) povezan** ako je lokalno (putevima) povezan u svakoj točki.

Primjeri:

- \mathbb{R} , intervali, \mathbb{R}^n , ... su (putevima) povezani i lokalno (putevima) povezani.
- $[-1, 0) \cup (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ je lokalno povezan ali nije povezan.
- Topološka sinusna krivulja je povezana ali nije lokalno povezana.
- $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ nije niti povezan niti lokalno povezan.

Komponente otvorenog skupa nisu općenito otvoreni skupovi. Ali:

Teorem 25.3

X je lokalno povezan ako i samo ako su komponente svakog otvorenog skupa otvoreni skupovi u X.

Dokaz: \Rightarrow Neka je X lokalno povezan, $U \subseteq X$ otvoren i C komponenta od U. Za $x \in C$ neka je V povezana okolina t.d. je $x \in V \subseteq U$. Zbog povezanosti je $V \subseteq C$ pa je C otvoren u X.

\Leftarrow Neka su komponente otvorene. Za okolinu $U \ni x$ neka je C komponenta od U koja sadrži x. Skup C je otvoren, povezan i sadržan je u U pa je X lokalno povezan. \square

Teorem 25.4 (dokazuje se analogno)

X je lokalno putevima povezan ako i samo ako su komponente povezanosti putevima skupovi otvoreni u X. \square

O odnosu komponenata i komponenata povezanosti putevima govori

Teorem 25.5

Svaka komponenta povezanosti putevima sadržana je u nekoj komponenti od X. Ako je X lokalno putevima povezan onda se komponente i komponente povezanosti putevima podudaraju.

Dokaz: Neka je C komponenta, $x \in C$ i P komponenta povezanosti putevima koja sadrži x. Kako je P povezan, $P \subseteq C$.

Neka je X lokalno putevima povezan i pretpostavimo $P \subsetneq C$. Neka je Q unija svih komponenata povezanosti putevima koje sijeku C i različite su od P. Svaka od njih je sadržana u C pa je $C = P \cup Q$. Kako je X lokalno povezan, komponente povezanosti putevima su otvorene, pa su P i Q otvoreni skupovi, tj. $C = P \sqcup Q$ je separacija, \Rightarrow C je povezan. \square

Definicija

Topološki prostor X je **kompaktan** ako svaka familija otvorenih skupova koja pokriva X sadrži konačnu potfamiliju koja također pokriva X.

Kaže se da *svaki otvoren pokrivač sadrži konačan potpokrivač*.

Jednostavnu karakterizaciju kompaktnosti potprostora, daje

Lema 26.1

Potprostor $Y \subseteq X$ je kompaktan akko svaki pokrivač skupovima otvorenim u X sadrži konačnu potfamiliju koja pokriva Y. \square

Dobro je znati da

Teorem 26.2

Svaki je zatvoren potprostor kompaktnog prostora kompaktan. \square

O obratu govori

Teorem 26.3

Svaki je kompaktan potprostor Hausdorffova prostora zatvoren.

Teorem je posljedica sljedeće, jače tvrdnje:

Lema 26.4

Neka je Y kompaktan potprostor Hausdorffova prostora X. Tada za svaku točku $x_0 \notin Y$ postoje disjunktne otvorene okoline $U \ni x_0$ i $V \supseteq Y$.

Dokaz: Neka je $x_0 \in X \setminus Y$. Za svaki $y \in Y$ neka su $U_y \ni x_0$ i $V_y \ni y$ disjunktne otvorene okoline. Familija $\{V_y : y \in Y\}$ je otvoren pokrivač od Y pa zbog kompaktnosti postoje y_1, \dots, y_n t.d. već V_{y_1}, \dots, V_{y_n} pokrivaju Y. Tada su $U := U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$ i $V := V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$ tražene disjunktne okoline od x_0 odnosno Y. \square

(Kontra)primjer

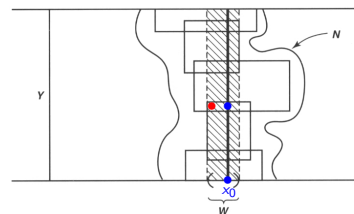
U prethodnom teoremu 26.3 i pripadnoj lemi, pretpostavka da je prostor X Hausdorffov zaista je potrebna. Naime, neka je $X = \mathbb{R}$ ali s topologijom konačnih komplementa. Tada su jedini pravi podskupovi od X koji su zatvoreni — konačni podskupovi.

S druge strane, uz ovu topologiju *svaki* je podskup od X kompaktan.

Lema 26.8

Neka je $N \subseteq X \times Y$ okolina „sloja“ $\{x_0\} \times Y$. Ako je Y kompaktan onda postoji okolina $W \ni x_0$ t.d. je $W \times Y \subseteq N$.

Dokaz: Zbog kompaktnosti, dovoljno je konačno mnogo baznih otvorenih skupova, koji su svi sadržani u N , da pokriju $\{x_0\} \times Y$. Neka su to $U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n$ (i svi oni sijeku $\{x_0\} \times Y$). Neka je $W := U_1 \cap \dots \cap U_n$. W je otvoren i sadrži x_0 . Tvrdimo da je $W \times Y \subseteq \bigcup_i (U_i \times V_i) \subseteq N$.



Zaista, neka je $(x, y) \in W \times Y$ i neka je i t.d. je $(x_0, y) \in U_i \times V_i$. Znači $y \in V_i$, a kako je $x \in U_j$ za sve j , dakle i za $j = i$, to je $(x, y) \in U_i \times V_i \subseteq N$. □

Najprije dva teorema koja (maltene) znamo iz Analize:

Teorem 26.5

Neprekidna slika kompaktnog prostora je kompaktna. □

Teorem 26.6

Neka je $f: X \rightarrow Y$ neprekidna bijekcija. Ako je X kompaktan a Y Hausdorffov onda je f homeomorfizam. □

A sada jedan „pravi“ teorem:

Teorem 26.7

Produkt od konačno mnogo kompaktnih prostora je kompaktan.

Dokaz: Dovoljno je pokazati da je produkt dvaju kompaktnih prostora kompaktan. Ali najprije jedna lema:

Dokažimo sada teorem. Neka su X i Y kompaktni prostori i \mathcal{A} otvoren pokrivač od $X \times Y$. Za točku $x_0 \in X$ je sloj $\{x_0\} \times Y$ kompaktan pa je pokriven s konačno mnogo članova $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, tj. $\{x_0\} \times Y \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n =: N$. Prema prethodnoj lemi, postoji otvoren $W \subseteq X$ t.d. je $\{x_0\} \times Y \subseteq W \times Y \subseteq N$, pa je $W \times Y$ pokriven s konačno mnogo članova $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Dakle, za svaki $x \in X$ postoji okolina $W_x \ni x$ t.d. je „cijev“ $W_x \times Y$ pokrivena s konačno mnogo članova iz \mathcal{A} . Kako je X kompaktan, već nekih konačno mnogo članova W_{x_1}, \dots, W_{x_k} pokriva X , pa konačno mnogo „cijevi“ $W_{x_1} \times Y, \dots, W_{x_k} \times Y$ pokriva $X \times Y$, a svaka je pokrivena s konačno mnogo članova familije \mathcal{A} . Dakle, dovoljno je konačno mnogo članova familije \mathcal{A} da pokrije X . □

Je li i beskonačan produkt kompakata kompaktan?

Napomena

Je li i produkt proizvoljne familije kompaktnih prostora kompaktan prostor — mnogo je teže pitanje. O tome govori poznati Tihonovljevi teorem, kojem je posvećeno 5. poglavlje.

DOGOVOR:

Neka je \mathcal{A} familija skupova koja pokriva skup S . Ako se skup S može pokriti s konačno mnogo članova familije \mathcal{A} , onda ćemo kazati da S je **konačno-pokriven s \mathcal{A}** .

Centrirane familije

Za karakterizaciju kompaktnosti pomoću zatvorenih skupova trebamo najprije jednu definiciju.

Definicija

Familija \mathcal{C} podskupova od X je **centrirana** ako svaka konačna potfamilija od \mathcal{C} ima neprazan presjek.

Teorem 26.9

X je kompaktan ako i samo ako svaka centrirana familija zatvorenih skupova ima neprazan presjek.

Dokaz: Treba gledati komplemente i rabiti De Morganova pravila. \square

Specijalan slučaj ovog teorema govori da ako je

$C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq \dots$ **silazan niz** nepraznih zatvorenih skupova u kompaktnom prostoru, onda je $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.

Kompaktnost segmenta

Ovo zvuči poznato, ali nam ne treba „gustoća“:

Teorem 27.1

Neka je X totalno uređen skup sa svojstvom supremuma i uređajnom topologijom. Tada je svaki zatvoreni segment u X kompaktan.

Dokaz: Neka je $a < b$ i neka je \mathcal{A} otvoren (u uređajnoj = relativnoj topologiji (jer je segment konveksan)) pokrivač segmenta $[a, b]$.

Tvrđnja 1: Za svaki $x \in [a, b]$ postoji $y \in \langle x, b \rangle$ t.d. je $[x, y]$ konačno-pokriven s \mathcal{A} .

Ako x ima neposrednog sljedbenika, y , tada je skup $[x, y]$ dvočlan. \checkmark

Ako x nema neposrednog sljedbenika, neka je $A \in \mathcal{A}$ t.d. je $x \in A$.

A je otvoren i $x \neq b$, pa postoji c t.d. je $[x, c] \subseteq A$.

Odaberimo $y \in \langle x, c \rangle$. Tada je $[x, y] \subseteq A$. \checkmark

nastavak dokaza

Tvrđnja 2: Skup $C := \{y > a : [a, y] \text{ je konačno-pokriven s } \mathcal{A}\}$ je neprazan.

To slijedi iz tvrdnje 1 za $x = a$. \checkmark

Neka je $c := \sup C$. Tada je $a < c \leq b$ (zbog tvrdnje 1).

Tvrđnja 3: $c \in C$, tj. $[a, c]$ je konačno-pokriven s \mathcal{A} .

Neka je $A \in \mathcal{A}$ t.d. je $c \in A$ i neka je $d \in [a, b]$ t.d. je $\langle d, c \rangle \subseteq A$.

Ako $c \notin C$ onda postoji $z \in \langle d, c \rangle \cap C$. Kako je $[a, z]$ konačno-pokriven s \mathcal{A} i $[z, c] \subseteq A$, to je i $[a, c] = [a, z] \cup [z, c]$ konačno-pokriven s \mathcal{A} ,

pa je $c \in C \iff c \notin C$. \checkmark

Tvrđnja 4: $c = b$, što dokazuje teorem.

Pretpostavimo da je $c < b$. Prema tvrdnji 1, postoji $y > c$ t.d. je $[c, y]$ konačno-pokriven s \mathcal{A} . Kako je $[a, c]$ konačno-pokriven s \mathcal{A} , to je i $[a, y] = [a, c] \cup [c, y]$ konačno-pokriven s \mathcal{A} .

Znači $y \in C \iff c = \sup C$ i $y > c$. \square

Kao posljedice dobivamo:

Korolar 27.2
 Svaki segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktan.

Korolar (teorema 27.1)
 \bar{S}_Ω je kompaktan Hausdorffov prostor.

Teorem 27.3
 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktan ako i samo ako je A omeđen i zatvoren.

Prethodni teorem u metričkim prostorima općenito ne vrijedi
 (iako to studenti često zapamte upravo tako)

Sljedeću smo činjenicu dokazali već u Analizi, ali ju i ovdje navodimo:

Lema 27.5 (o Lebesgueovu broju)
 Neka je \mathcal{A} otvoren pokrivač metričkog prostora X . Ako je X kompaktan onda postoji broj $\delta > 0$ t.d. za svaki podskup dijametra manjeg od δ postoji član pokrivača \mathcal{A} koji taj skup sadrži.

Takav se δ naziva **Lebesgueov broj pokrivača \mathcal{A}** .

Kao i u Analizi, odavde slijedi:

Teorem 27.6 (o uniformnoj neprekidnosti na kompaktu)
 Neka je $f: X \rightarrow Y$ neprekidno preslikavanje metričkih prostora. Ako je X kompaktan onda je f uniformno neprekidno.

I ovaj teorem „znamo” iz Analize:

Teorem 27.4 (Weierstrass)
 Neka je $f: X \rightarrow Y$ neprekidno preslikavanje u totalno uređen skup Y s uređajnom topologijom. Ako je X kompaktan onda postoje $c, d \in X$ t.d. je $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ za sve $x \in X$, tj. funkcija f ima minimum i maksimum.

Dokaz: Pretpostavimo da skup $f(X)$ nema maksimum. Tada je familija $\{(-\infty, y) : y \in f(X)\}$ otvoren pokrivač od $f(X)$ pa, zbog kompaktnosti, već neka konačna potfamilija $\{(-\infty, y_1), \dots, (-\infty, y_n)\}$ pokriva $f(X)$. Ali element $\max\{y_1, \dots, y_n\}$ nije pokriven niti jednim od njih.

Dokaz: Neka je \mathcal{U} otvoren pokrivač od X . Ako je $X \in \mathcal{U}$ onda je svaki $\delta > 0$ dobar. Neka dakle, $X \notin \mathcal{U}$. Zbog kompaktnosti postoji konačan potpokrivač $\{U_1, \dots, U_n\}$ i neka su $C_i := X \setminus U_i$, $i = 1, \dots, n$. Definirajmo $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ formulom $f(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(x, C_i)$ i pokažimo da je $f(x) > 0$ za sve x . Za $x \in X$ neka je i t.d. je $x \in U_i$ i neka je $\varepsilon > 0$ t.d. je $B(x, \varepsilon) \subseteq U_i$. Tada je $d(x, C_i) \geq \varepsilon$ pa je $f(x) \geq \frac{\varepsilon}{n} > 0$. Funkcija f je neprekidna i X je kompaktan, pa neka je $\delta := \min f$. Neka je $A \subseteq X$ skup dijametra manjeg od δ , i neka je $x_0 \in A$ neka točka. Tada je $A \subseteq B(x_0, \delta)$. Neka je m indeks za koji je $d(x_0, C_m) = \max_i d(x_0, C_i)$. Tada je $\delta \leq f(x_0) \leq d(x_0, C_m)$, pa je $A \subseteq B(x_0, \delta) \subseteq X \setminus C_m = U_m \in \mathcal{U}$.

Teorem 27.7

Neka je X neprazan kompaktn Hausdorffov prostor.
Ako X nema izoliranih točaka onda je on neprebrojiv.

Dokaz:

Tvrdnja 1: Za svaki neprazan otvoren $U \subseteq X$ i svaki $x \in X$ postoji neprazan otvoren $V \subseteq U$ t.d. $x \notin \bar{V}$.

Odaberimo $y \in U \setminus \{x\}$, neka su W_1 i W_2 disjunktne okoline od x odnosno y , i neka je $V := W_2 \cap U$. ✓

Tvrdnja 2: Ne postoji surjektivna $\mathbb{N} \rightarrow X$.

Neka je $(x_n)_n$ niz u X . Prema tvrdnji 1 za $U = X$, postoji neprazan otvoren $V_1 \subseteq X$ t.d. $x_1 \notin \bar{V}_1$. Induktivno, neka je $V_n \subseteq V_{n-1}$ neprazan otvoren skup t.d. $x_n \notin \bar{V}_n$. Tada je $\bar{V}_1 \supseteq \bar{V}_2 \supseteq \dots$ silazan niz nepraznih zatvorenih skupova, pa zbog kompaktnosti postoji $x \in \bigcap \bar{V}_n$. Ali za sve n je $x \neq x_n$. □

Korolar 27.8

Svaki segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je neprebrojiv. □

Korolar 27.9

Skup \mathbb{R} realnih brojeva je neprebrojiv. □

Teorem 28.1

U kompaktnom prostoru svaki beskonačan skup ima gomilište.
Kažemo da ima **Bolzano-Weierstrassovo svojstvo** ili da je **BW-kompaktan**.

Dokaz: Pretpostavimo da skup $A \subseteq X$ nema gomilište. Tada je A zatvoren i za svaki $a \in A$ postoji okolina $U_a \ni a$ t.d. je $U_a \cap A = \{a\}$. X je pokriven otvorenim skupom $X \setminus A$ i skupovima $U_a, a \in A$. Kako je X kompaktn i $(X \setminus A) \cap A = \emptyset$, A je pokriven s konačno mnogo skupova U_a , a svaki od njih sadrži samo jednu točku iz A . □

Primjer: S_Ω nije kompaktn, iako svaki beskonačan podskup ima gomilište

Zaista, neka je $A \subseteq S_\Omega$ beskonačan skup i neka je $B \subseteq A$ neki prebrojivo beskonačan podskup. Neka je $b \in S_\Omega$ neka gornja međa od B , pa je $B \subseteq [a_0, b] \subseteq S_\Omega$, gdje je $a_0 = \min S_\Omega$. Kako S_Ω ima svojstvo supremuma, segment $[a_0, b]$ je kompaktn, pa B ima gomilište. Zato i $A \supseteq B$ ima gomilište.

Definicija

Za topološki prostor X kažemo da je **nizovno kompaktn** ako svaki niz u X ima gomilište, tj. ima konvergentan podniz.

Sljedeći teorem je zapravo dokazan u Analizi pa ga samo navodimo:

Teorem 28.2

Neka je X metrizabilan. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

- (1) X je kompaktn.
- (2) X je nizovno kompaktn.
- (3) X je BW-kompaktan, tj. svaki beskonačan podskup od X ima gomilište. □

Primjer: S_Ω je nizovno kompaktn ali nije kompaktn

Zaista, svaki niz u S_Ω ima gornju među u S_Ω , pa leži u nekom segmentu, koji je kompaktn, pa niz ima gomilište.

Lokalna kompaktnost

Definicija

Prostor X je **lokalno kompaktan u točki x** ako postoji kompaktan podskup $C \subseteq X$ koji sadrži neku otvorenu okolinu točke x .

X je **lokalno kompaktan** ako je lokalno kompaktan u svakoj točki.

Primjeri

- Svaki kompaktan prostor je lokalno kompaktan.
- \mathbb{R} i \mathbb{R}^n su lokalno kompaktni. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ nije lokalno kompaktan.
- \mathbb{R}^ω nije lokalno kompaktan. Naime, nijedan bazni otvoren skup $B = \langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$ nije sadržan u nekom kompaktnom skupu. Kada bi bio, onda bi i zatvorenje $\bar{B} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$ bio kompaktan skup, što nije.
- Svaki linearno uređen skup sa svojstvom supremuma je lokalno kompaktan. (Bazni elementi su sadržani u segmentima.)

Koju su nam prostori „drugi“?

Najdraži su nam metrički, ili kompaktni Hausdorffovi prostori (još bolje kompaktni metrički), ali ako baš ne može — da je barem potprostor kompaktnog Hausdorffovog prostora.

Evo jedne karakterizacije takvih „poželjnih“ prostora:

Teorem 29.1

X je lokalno kompaktan Hausdorffov prostor akko postoji Y t.d.:

- (1) Y je kompaktan Hausdorffov prostor.
- (2) X je potprostor od Y ;
- (3) skup $Y \setminus X$ sastoji se od jedne jedine točke;

Takav je Y jedinstven, u smislu da ako su Y i Y' takvi prostori, onda postoji homeomorfizam $Y \rightarrow Y'$ koji je identiteta na X .

Primijetimo da ako je X kompaktan, $Y = X \cup \{\text{izolirana točka}\}$. Ako X nije kompaktan onda je $\bar{X} = Y$.

Dokaz teorema 29.1:

Jedinstvenost: Neka su $Y = X \cup \{p\}$ i $Y' = X \cup \{p'\}$ kao u teoremu.

Definirajmo $h: Y \rightarrow Y'$ kao identitetu na X i $h(p) := p'$.

Tvrdnja: h je otvorena bijekcija. Bijektivnost je očita. Neka je $U \subseteq Y$ otvoren. Ako $p \notin U$ onda je U otvoren u X , a jer je X otvoren u Y' , U je otvoren i u Y' . Ako je $p \in U$ onda je $C := Y \setminus U \subseteq Y$ zatvoren, dakle kompaktan, i podskup je od X . Zato je $Y' \setminus h(U) = C$ kompaktan, dakle i zatvoren podskup od Y' , pa je $h(U)$ otvoren u Y' .

Analogno je h^{-1} je otvorena bijekcija, pa je h homeomorfizam.

⇒ Neka je $Y := X \cup \{\infty\}$ gdje $\infty \notin X$, a otvoreni skupovi neka su otvoreni skupovi u X i komplementi $Y \setminus C$ kompaktnih $C \subseteq X$.

Tada je X potprostor od Y , i Y je kompaktan Hausdorffov.

⇐ Pretpostavimo da postoji Y sa svojstvima (1)–(3).

X je Hausdorffov kao potprostor Hausdorffovog. Pokažimo da je X lokalno kompaktan u svakoj točki. Za $x \in X$ neka su U i V disjunktne okoline u Y od x odnosno ∞ . Tada je $C := Y \setminus V$ zatvoren, znači kompaktan podskup od Y , dakle i kompaktan podskup od X i $x \in U \subseteq C$, pa je X lokalno kompaktan. □

Kompaktifikacija jednom točkom

Definicija

Kompaktifikacija prostora X je svaki kompaktan Hausdorffov prostor Y sa svojstvom da je $X \subseteq Y$ pravi potprostor t.d. je $\bar{X} = Y$. Ako je $Y \setminus X$ samo jedna točka, kažemo da je Y **kompaktifikacija jednom točkom** ili **jednotočkovna kompaktifikacija** od X , i obično se označuje X^* ili X^\bullet . (Prema teoremu 29.1 ona je jedinstvena.)

Prethodni teorem pokazuje da X ima kompaktifikaciju jednom točkom akko je nekompaktan lokalno kompaktan Hausdorffov.

Primjeri

- Jednotočkovna kompaktifikacija od \mathbb{R} je \mathbb{S}^1 .
- Jednotočkovna kompaktifikacija od \mathbb{R}^2 je \mathbb{S}^2 .
- Jednotočkovna kompaktifikacija od \mathbb{C} je \mathbb{S}^2 — **Riemannova sfera**.

„Prava” definicija lokalne kompaktnosti

Lokalna se svojstva obično definiraju ovako:

X **lokalno ima svojstvo S** ako za svaku točku x i svaku okolinu

$U \ni x$ postoji okolina $V \ni x$ sadržana u U koja ima svojstvo **S**.

Zato je dobro da vrijedi:

Teorem 29.2

Neka je X Hausdorffov. Tada je X lokalno kompaktan ako i samo ako za svaki $x \in X$ i svaku okolinu $U \ni x$ postoji okolina $V \ni x$ t.d. je skup \overline{V} kompaktan i $\overline{V} \subseteq U$.

Dokaz: \Leftarrow Očito. \Rightarrow Neka je $x \in X$ i $U \ni x$ proizvoljna okolina. Neka je X^\bullet jednočokovna kompaktifikacija od X i neka je $C := X^\bullet \setminus U$. Tada je C zatvoren, dakle i kompaktan potprostor od X^\bullet i $x \notin C$. Neka su V i W disjunktne okoline od x odnosno C (lema 26.4). Tada je \overline{V} kompaktan i disjunktan s C , pa je $\overline{V} \subseteq U$. \square

Lokalno kompakti Hausdorffovi prostori su „dobri”

Korolar 29.3

Neka je A potprostor lokalno kompaktnog Hausdorffovog X . Ako je A otvoren ili zatvoren u X onda je A lokalno kompaktan.

Dokaz: **A zatvoren:** Za $x \in A$ neka je $C \subseteq X$ kompaktan t.d. sadrži neku okolinu $U \ni x$. Tada je $C \cap A$ zatvoren u C , dakle i kompaktan, i sadrži okolinu $U \cap A$ od x u A . \checkmark
 A otvoren: Za $x \in A$, prema teoremu 29.2, odaberemo okolinu $V \subseteq X$ od x t.d. je \overline{V} kompaktan i $\overline{V} \subseteq A$. Tada je $C := \overline{V} \subseteq A$ kompaktan i sadrži okolinu V od x u A . \square
 Konačno, iz teorema 29.1 i ovog korolara, dobivamo:

Korolar 29.4

Prostor X je lokalno kompaktan Hausdorffov akko se može smjestiti kao otvoren podskup u neki kompaktan Hausdorffov prostor. \square