Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
MATEMATIČKI ODJEL

Šime Ungar

Matematička Analiza 3

Zagreb, 2002.

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
MATEMATIČKI ODJEL

Šime Ungar

Matematička analiza 3

Treće dopunjeno izdanje

Zagreb, 2002.

Predgovor

Ovaj udžbenik se temelji na predavanjima koja sam posljednjih nekoliko godina držao studentima druge godine matematike. Matematička analiza je jedna, a brojka 3 u naslovu se samo odnosi na činjenicu da materijal koji je ovdje obrađen odgovara većem dijelu sadržaja analize koja se predaje u trećem semestru studija. Stoga ovo i nije udžbenik početnog kursa analize. Neko iskustvo s realnim funkcijama jedne varijable je potrebno. Također se pretpostavlja poznavanje osnovnih pojmova i činjenica iz linearne algebre.

U prvom poglavlju **Neprekidnost i limes** obrađene su topološke činjenice potrebne u kasnijim poglavljima. Definirat ćemo samo one pojmove i dokazati samo one činjenice koje ćemo kasnije efektivno i koristiti. Stoga neke stvari, kojima bi ovdje bilo prirodno mjesto, neće biti niti spomenute. Potpunije i detaljnije se o svemu tome, na našem jeziku, može naći u [6].

U drugom poglavlju, **Diferencijal i derivacije**, obrađen je diferencijalni račun (vektorskih) funkcija više realnih varijabli. Dokazani su osnovni teoremi: srednje vrijednosti, o implicitnoj funkciji i o inverznoj funkciji. Na kraju je dokazan i teorem o dovoljnim uvjetima za postojanje lokalnog ekstrema.

U trećem poglavlju, **Riemannov integral**, obrađen je Riemannov integral realne funkcije više varijabli. Zbog jednostavnosti oznaka sve se radi za funkcije dvije varijable, jer veći broj varijabli ne donosi ništa kvalitativno novog, a dokazi su tehnički složeniji u nekim detaljima.

Zadaci koji se nalaze na kraju paragrafa ili poglavlja nisu zamišljeni da zamijene neku zbirku zadataka, već da upotpune osnovni tekst ilustrirajući pojedine pojmove i teoreme, a ponegdje i uvodeći nove pojmove. Njih je izabrao i sastavio Damir Bakić koji je više godina vodio vježbe uz ovaj kolegij. Na kraju su date i upute za rješenja, iako je bolje da svaki student sam riješi što više zadataka.

U knjizi se koriste oznake i simboli koji su i inače uobičajeni u matematičkoj literaturi, i nastojao sam da oznake budu konzistentne kroz čitavu knjigu. Jedna manje uobičajena oznaka, koju koristim, je $f^{\leftarrow}(A)$ i $f^{\leftarrow}(y)$ kojom se, za funkciju $f\colon X \to Y$, označava original skupa $A \subseteq Y$ odnosno točke $y \in Y$, tj. $f^{\leftarrow}(A) := \{x \in X : f(x) \in A\}$ i $f^{\leftarrow}(y) := \{x \in X : f(x) = y\}$. Standardno se u tu svrhu koriste oznake $f^{-1}(A)$ i $f^{-1}(y)$, ali kako se ne bi brkalo s inverznom funkcijom, sve se češće koristi i $f^{\leftarrow}$.

Na kraju, zahvaljujem svima koji su direktno ili indirektno pomogli da se ova skripta izdaju i budu što bolja. To se posebno odnosi na Damira Bakića s kojim sam o mnogim stvarima diskutirao i prije nego li je bilo govora o skriptama, recenzente Sibu Mardešića i Mirka Primca, koji su pažljivo pročitali rukopis, i svojim primjedbama i sugestijama utjecali na mnoge dijelove teksta. Također sam zahvalan studentima koji su pitanjima, intervencijama i sugestijama doprinijeli da neke stvari budu jednostavnije i razumljivije.

Uz treće izdanje:

U odnosu na prethodno izdanje, osim što su ispravljene uočene greške, neki su dijelovi dopunjeni i/ili promijenjeni. To se, u prvom poglavlju, prvenstveno odnosi na očuvanje Cauchyevog svojstva nizova pri uniformno neprekidnim preslikavanjima, i proširenje takvih preslikavanja sa gustog podskupa, te dokaz Tietzeovog teorema. U drugom je poglavlju naglašenija distinkcija između diferencijabilnosti i postojanja parcijalnih derivacija, i preciznije je, što se tiče jedinstvenosti, iskazan, i dokazan, teorem o implicitnoj funkciji. Treće je poglavlje malo reorganizirano, te je prošireno razmatranje integrabilnosti na J-izmjerivim skupovima i dodan je teorem srednje vrijednosti za Riemannov integral. Osim toga je nešto detaljnije napravljen dokaz teorema o zamjeni varijabli u dvostrukom integralu, što je zahtijevalo i neka dodatna razmatranja u prethodnim paragrafima.

U Zagrebu, 2002. Šime Ungar

Slika na koricama je još jedan pogled na graf funkcije iz Primjera (iv) *na stranici* 34.

Sadržaj

Popis oznaka

$\mathbb{R}$ skup realnih brojeva

$\mathbb{R}^*$ skup realnih brojeva različitih od 0

$\mathbb{R}_+$ skup nenegativnih realnih brojeva

$\mathbb{R}_+^*$ skup strogo pozitivnih realnih brojeva

$\mathbb{N}$ skup prirodnih brojeva

$\mathbb{Q}$ skup racionalnih brojeva

$\mathbb{Z}$ skup cijelih brojeva

$\mathbb{Z}_+$ skup nenegativnih cijelih brojeva, $\{0\} \cup \mathbb{N}$

$\mathbb{R}^n$ n-dimenzionalan euklidski prostor

$\emptyset$ prazan skup

Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ najčešće domena promatrane diferencijabilne funkcije

$f\colon S \subseteq X \to Y$ preslikavanje $f\colon S \to Y$, gdje je $S \subseteq X$. Najčešće se koristi kao $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Ova oznaka nije sasvim korektna. Bolja je oznaka:

$f\colon X \supseteq S \to Y$ preslikavanje $f\colon S \to Y$, gdje je $S \subseteq X$. Najčešće se koristi kao $f\colon \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^m$

$K(P_0, r)$, $\overline{K}(P_0, r)$ otvorena, odnosno zatvorena, kugla (krug, ukoliko se radi o ravnini) oko točke P_0 radijusa $r > 0$

$\operatorname{Int} S$ interior (nutrina) skupa S; najveći otvoren skup koji je sadržan u S

$\overline{S} = \operatorname{Cl} S$ zatvorenje (zatvarač) skupa S; najmanji zatvoren skup koji sadrži S

S^d skup svih gomilišta skupa S, derivat skupa S

$\partial S = \operatorname{Fr} S := \overline{S} \cap \overline{X \setminus S}$ rub skupa S

$B(X, Y)$ prostor omeđenih funkcija sa X u Y

$C(X, Y)$ prostor neprekidnih funkcija sa X u Y

$BC(X, Y)$ prostor omeđenih neprekidnih funkcija sa X u Y

$\hookrightarrow$ inkluzija

$\twoheadrightarrow$ surjektivno preslikavanje, preslikavanje *na*

$\rightarrowtail$ injektivno preslikavanje, 1–1 preslikavanje

$\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow$ bijektivno preslikavanje, preslikavanje 1–1 i *na*

$f \equiv 0,\ g \equiv 1$ konstantna preslikavanja $f(x) = 0$, $g(x) = 1$ za sve $x \in X$

$[a, b]$ zatvoren *segment* realnih brojeva, $[a, b] = \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$

$\langle a, b\rangle$ otvoren *interval* realnih brojeva, $\langle a, b\rangle = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$

$(x \mid y),\ (P \mid Q)$ skalarni produkt vektora x i y, odnosno P i Q

$f^{\leftarrow}(y) := \{\, x \in X : f(x) = y \,\} \subseteq X$ pri čemu je $f\colon X \to Y$ preslikavanje skup originala točke y. Uobičajena je oznaka $f^{-1}(y)$. Ovu oznaku ćemo koristiti kada želimo naglasiti da se *ne radi o inverznom preslikavanju*, koje možda u danoj situaciji i ne postoji.

$f^{\leftarrow}(B) := \{\, x \in X : f(x) \in B \,\} \subseteq X$ original skupa B. Uobičajena je oznaka $f^{-1}(B)$.

$\mathbf{0}\colon X \to \mathbb{R}$**,** $\mathbf{1}\colon X \to \mathbb{R}$

$(e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_n)$ standardna (kanonska) baza u $\mathbb{R}^n$, str. 1

$\mathbb{S}^n = \{P \in \mathbb{R}^{n+1} : \|P\| = 1\}$ n-dimenzionalna sfera, str. 5

χ_S karakteristična funkcija skupa S, str. 19

$2^X := \{0,1\}^X$ skup svih funkcija skupa X u dvočlani skup $\{0,1\}$, str. 19

$\mathcal{P}(X)$ partitivni skup, skup svih podskupova skupa X, str. 19

Γ_f graf funkcije f, str. 25

$\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ vektorski prostor svih linearnih operatora s $\mathbb{R}^n$u $\mathbb{R}^m$, str. 29

C Cantorov trijadski skup, str. 52

$Df(P)$ diferencijal preslikavanja f u točki P, str. 69

$\partial_j f(P)$ parcijalna derivacija po i-toj varijabli funkcije f u točki P, str. 70

$\nabla f(P)$ gradijent funkcije f u točki P, str. 73

$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(P)$ Jacobijeva matrica preslikavanja f u točki P, str. 74

$C^1(\Omega)$, $C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ neprekidno diferencijabilna preslikavanja — preslikavanja klase C^1, str. 86

$D^2 f(P)$ drugi diferencijal (diferencijal drugog reda) funkcije f u točki P, str. 87

$\mathrm{BHom}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vektorski prostor bilinearnih funkcionala na $\mathbb{R}^n$, str. 88

$D_P f(P_0, Q_0)$, $D_Q f(P_0, Q_0)$ parcijalni diferencijali funkcije f u točki (P_0, Q_0), str. 110

$C^\omega(\Omega)$ skup svih analitičkih funkcija na Ω, str. 124

$\rho = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b\}$ razdioba segmenta $[a, b]$, str. 138

$\delta(\rho)$ dijametar (očica) razdiobe ρ, str. 138

$\pi(I)$ površina pravokutnika I, str. 138

$s(f, \rho)$, $S(f, \rho)$ donja i gornja Darbouxova suma za funkciju f s obzirom na razdiobu ρ, str. 138

$\underline{\int} f$, $\overline{\int} f$ donji i gornji Riemannov integral funkcije f, str. 138

$\int_I f$, $\int_I f(x,y)\,dx\,dy$, $\iint_I f(x,y)\,dx\,dy$ (dvostruki) integral funkcije f, str. 140

$R(I)$ vektorski prostor svih R-integrabilnih funkcija na I, str. 140

$\mathring{I}$ otvoren pravokutnik, pravokutnik bez ruba, str. 140

$\pi(S)$ površina skupa S, str. 146

Q skup 'racionalnih točaka' u jediničnom kvadratu, str. 147

$o(f, P)$ oscilacija funkcije f u točki P, str. 153

$D(f)$ skup točaka diskontinuiteta funkcije f, str. 160

$\sigma = \{S_s\}$ razdioba skupa S, str. 165

$\sigma(S)$ skup svih razdiobâ skupa S, str. 165

$\sigma(F, \rho; t_1, \ldots, t_k)$ integralna (Riemannova) suma funkcije F obzirom na razdiobu ρ i odabrane točke $t_1, \ldots, t_k$, str. 173

Na kraju, navodimo i tablicu velikih i malih grčkih slova, te približan izgovor.

A , α	*alfa*	N , ν	*ni*
B , β	*beta*	Ξ , ξ	*ksi*
Γ , γ	*gama*	O , o	*omikron*
Δ , δ	*delta*	Π , π ili ϖ	*pi*
E , ϵ ili ε	*epsilon*	P , ρ ili ϱ	*ro*
Z , ζ	*zeta*	Σ , σ ili ς	*sigma*
H , η	*eta*	T , τ	*tau*
Θ , θ ili ϑ	*theta*	Υ , υ	*ipsilon*
I , ι	*jota*	Φ , ϕ ili φ	*fi*
K , κ	*kapa*	X , χ	*hi*
Λ , λ	*lambda*	Ψ , ψ	*psi*
M , μ	*mi*	Ω , ω	*omega*

1

Neprekidnost i limes

konstantne funkcije **0** i **0**, tj. funkcije za koje je $\mathbf{0}(x) = 0$ odnosno $\mathbf{1}(x) = 1$ za sve $x \in X$.

§ 1 Otvoreni i zatvoreni skupovi

Osnovni ambijent u kojem ćemo raditi (realnu) analizu je ***n-dimenzionalni euklidski***[1] ***prostor*** $\mathbb{R}^n$. Kao skup on se sastoji od uređenih n-torki realnih brojeva, a njegove elemente ćemo označavati velikim slovima H, K, L, P, Q, itd. Dakle

$$\mathbb{R}^n = \{P \,:\, P = (x_1, \dots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n\}.$$

U niskim dimenzijama upotrebljavat ćemo oznake $P = x$ u $\mathbb{R}^1$, $P = (x, y)$ u $\mathbb{R}^2$ i $P = (x, y, z)$ u $\mathbb{R}^3$, i pisat ćemo $\mathbb{R}$ umjesto $\mathbb{R}^1$. Koordinate pojedinih točaka u $\mathbb{R}^n$ standardno ćemo označavati ovako: $H = (h_1, \dots, h_n)$, $K = (k_1, \dots, k_n)$, $L = (l_1, \dots, l_n)$, $P = (x_1, \dots, x_n)$, $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, $Q = (y_1, \dots y_n)$.

$\mathbb{R}^n$ je snabdjeven strukturom realnog vektorskog prostora pri čemu zbrajamo i množimo skalarima po koordinatama. Stoga ćemo elemente (točke) prostora $\mathbb{R}^n$ često zvati i vektorima. ***Standardnu*** ili ***kanonsku bazu*** čine elementi

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots, 0),\ \dots, e_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1).$$

[1]Euklid iz Aleksandrije ($\sim$ 325–265 pr. Kr.), antički matematičar

U $\mathbb{R}^n$ definiran je ***skalarni produkt*** s

$$(P \mid Q) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

koji definira ***euklidsku normu***

$$\|P\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,.$$

Koristeći Cauchyevu nejednakost, pokazuje se da norma $\|\ \|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ima sljedeća svojstva:

(N1) $\|P\| \geq 0\,, \quad P \in \mathbb{R}^n$
(N2) $\|P\| = 0 \Leftrightarrow P = 0$
(N3) $\|\lambda P\| = |\lambda|\|P\|\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}, P \in \mathbb{R}^n$
(N4) $\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|\,, \quad P, Q \in \mathbb{R}^n$,

pa je $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$ ***normiran vektorski prostor***.

Pomoću norme definirana je (standardna) ***euklidska metrika*** ili ***udaljenost***

$$d(P, Q) := \|P - Q\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Metrika $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ima sljedeća svojstva:

(M1) $d(P, Q) \geq 0\,, \quad P, Q \in \mathbb{R}^n$
(M2) $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$
(M3) $d(P, Q) = d(Q, P)\,, \quad P, Q \in \mathbb{R}^n$
(M4) $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)\,, \quad P, Q, R \in \mathbb{R}^n$.

Mi ćemo u $\mathbb{R}^n$ koristiti isključivo euklidsku normu odnosno euklidsku metriku. Za definiciju nekih drugih normi i metrika na $\mathbb{R}^n$, kao i odnose prema euklidskoj normi i metrici, vidi zadatke 24–29 i 34.

Za matematičku analizu je, osim vektorske, važna i topološka struktura prostora $\mathbb{R}^n$.

Važan tip podskupova na pravcu, tj. u $\mathbb{R}$, su ***otvoreni intervali***

$$\langle a, b\rangle := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Uz oznake $x_0 := \dfrac{a+b}{2}$ (središte) i $r := \dfrac{b-a}{2}$, je $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$.

Ovakav opis otvorenog intervala je pogodan za generalizaciju. Za točku $P_0 \in \mathbb{R}^2$ i broj $r > 0$, ***otvoreni krug*** oko P_0 s radijusom r je skup

$$K(P_0, r) := \left\{P = (x, y) : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\right\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

a u $\mathbb{R}^3$ ćemo za $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i $r > 0$, skup

$$K(P_0, r) := \left\{P = (x, y, z) : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

zvati otvorenom kuglom oko P_0 radijusa r. Analogno za $P_0 \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$, skup

$$K(P_0, r) := \left\{P = (x_1, \ldots, x_n) : \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2} < r\right\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

zovemo ***otvorenom kuglom*** oko P_0 radijusa r. Koristeći pojam metrike, ovo se elegantnije zapisuje ovako :

$$K(P_0, r) = \{P \in \mathbb{R}^n : d(P, P_0) < r\}.$$

U mnogim razmatranjima koja ćemo provoditi neće biti važna algebarska struktura prostora, već samo metrička struktura. Stoga će često biti preglednije, i što se oznaka tiče jednostavnije, takva razmatranja vršiti na nivou metričkih prostora.

Definicija 1.1 Par (X, d) nepraznog skupa X i realne funkcije $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava uvjete (M1) – (M4) zove se ***metrički prostor***. Funkciju d zvat ćemo ***razdaljinskom funkcijom*** ili ***metrikom*** na X.

Ukoliko je nevažno o kojoj se konkretnoj funkciji d radi ili kada je to iz konteksta jasno, govorit ćemo naprosto o metričkom prostoru X.

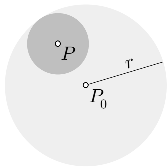
Skup $K(P_0, r) := \{P \in X : d(P, P_0) < r\}$ zovemo ***otvorenom kuglom*** oko P_0 radijusa r. U slučaju kada želimo naglasiti o kojem se prostoru radi koristit ćemo oznaku $K_X(P_0, r)$.

Za skup $U \subseteq X$ kažemo da je ***otvoren*** ako za svaku točku $P \in U$, postoji broj $r > 0$ takav da je $K(P, r) \subseteq U$. Dakle otvoreni skupovi su točno oni skupovi koji se mogu prikazati kao unije nekih familija otvorenih kugala. Prazan skup $\emptyset$ smatramo otvorenim po definiciji.

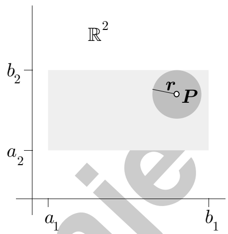
Primjeri 1.1 (i) Otvorena kugla $K(P_0, r)$ je otvoren skup. Zaista, neka je $P \in K(P_0, r)$ i neka je $r_1 := r - d(P, P_0)$. Tada za proizvoljnu točku $P' \in K(P, r_1)$ vrijedi

$$d(P', P_0) \leq d(P', P) + d(P, P_0) < r_1 + d(P, P_0) = r$$

pa je $K(P, r_1) \subseteq K(P_0, r)$.



Otvorena kugla



Otvoren pravokutnik

(ii) Produkt otvorenih intervala $\mathring{I}^n := \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ je otvoren skup i zvat ćemo ga ***otvoreni paralelepiped*** (otvoren pravokutnik, u dimenziji $n = 2$). Zaista, za točku $P = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathring{I}^n$, neka je $r := \min\{|x_i - a_i|, |x_i - b_i| : i = 1, \ldots, n\}$. Lako je provjeriti da je $K(P, r) \subseteq \mathring{I}^n$.

Familija $\mathcal{U}$ svih otvorenih skupova u metričkom prostoru (X, d) ima sljedeća svojstva:

(T1) prazan skup $\emptyset$ i čitav prostor X su otvoreni skupovi, tj. pripadaju familiji $\mathcal{U}$

(T2) unija proizvoljne familije otvorenih skupova je otvoren skup

(T3) presjek svake konačne familije otvorenih skupova je otvoren skup.

Općenito, ako je X neprazan skup, a $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ neka familija podskupova od X koja ima svojstva $(T1), (T2)$ i $(T3)$, onda uređen par $(X, \mathcal{U})$ zovemo ***topološki prostor***, a familiju $\mathcal{U}$ ***topološkom strukturom*** ili ***topologijom*** na X. Elemente familije $\mathcal{U}$ zovemo ***otvorenim skupovima***.

Napomena 1.1 Kada se ne specificira metrika d, trebalo bi zapravo govoriti o *metrizabilnom prostoru* X, i pod tim podrazumijevati (topološki) prostor X s bilo kojom metrikom koja inducira dânu topologiju. S druge strane, *metrički* *prostor* bi uvijek trebao biti par (X, d) skupa X i neke metrike d. Naime, neke stvari, kao naprimjer neprekidnost i konvergencija, ovise samo o topološkoj strukturi prostora, dok neke, kao uniformna neprekidnost i potpunost, ovise o odabranoj metrici. Ipak, najčešće se ne postupa tako pedantno, i govori se jednostavno o metričkom prostoru X.

Okolina točke $P \in X$ je svaki otvoreni skup U koji sadrži točku P, tj. $P \in U$. ***Okolina skupa*** $S \subseteq X$ je svaki otvoren skup U koji sadrži skup S, tj. $S \subseteq U$. Primijetimo da je otvoren skup okolina svake svoje točke.

Definicija 1.2 Za skup F u topološkom prostoru X kažemo da je ***zatvoren***, ukoliko je njegov komplement $X \setminus F$ otvoren skup.

Primjeri zatvorenih skupova u euklidskim prostorima su :

zatvoren interval ili ***segment*** $I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

zatvoren paralelepiped $I^n = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$

n-***dimenzionalna sfera*** $\mathbb{S}^n = \{P \in \mathbb{R}^{n+1} : \|P\| = 1\}$

zatvorena kugla $\overline{K}(P_0, r) := \{P : d(P_0, P) \leq r\}$.

Teorem 1.1 *Neka je* $A \subseteq \mathbb{R}$ *zatvoren neprazan skup koji je omeđen odozdo. Tada je* $\inf A \in A$*, tj. skup* A *ima minimum. Analogno, ukoliko je* A *omeđen odozgo, onda je* $\sup A \in A$*, tj.* A *ima maksimum.*

Dokaz: Pretpostavimo da $\inf A \notin A$, tj. $\inf A \in \mathbb{R} \setminus A$. Kako je A zatvoren, tj. $\mathbb{R} \setminus A$ otvoren, postoji $r > 0$ takav da je $\langle \inf A - r, \inf A + r \rangle \subseteq \mathbb{R} \setminus A$. No tada bi i broj $\inf A + \frac{r}{2}$ bio donja međa skupa A, koja je veća od $\inf A$, što je u suprotnosti s definicijom infimuma kao najveće donje međe. Analogno se dokazuje tvrdnja za supremum. ■

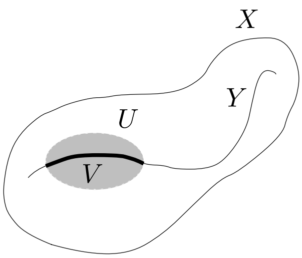
Koristeći svojstva $(T1) - (T3)$ otvorenih skupova i De Morganovih[1] jednakosti, lako se dokazuje da su prazan skup $\emptyset$ i čitav prostor X zatvoreni skupovi, da je presjek proizvoljne familije zatvorenih skupova zatvoren skup i da je unija konačne familije zatvorenih skupova zatvoren skup.

Uočimo na ovom mjestu da ima skupova koji nisu niti otvoreni niti zatvoreni, npr. ***poluotvoren interval*** $[a, b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ ili skup $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \geq 0\}$,

[1] Augustus De Morgan (1806–1971), engleski matematičar

ali i takvih skupova koji su i otvoreni i zatvoreni, npr. prazan skup $\emptyset$ i čitav prostor X.

Neka je (X,d) metrički prostor, a $Y \subseteq X$ podskup. Tada restrikcija $d_Y := d|_{Y\times Y} : Y \times Y \to \mathbb{R}$ očito zadovoljava uvjete (M1) – (M4), pa je (Y, d_Y) također metrički prostor koji zovemo ***potprostor*** od (X,d). Udaljenost dviju točaka iz Y jednaka je bez obzira da li na njih gledamo kao na točke iz Y ili iz X, pa ćemo i metriku d_Y označavati jednostavno s d. Za otvorene kugle očito vrijedi $K_Y(P,r) = K_X(P,r) \cap Y$. Ako je $U \subseteq X$ otvoren skup, onda je presjek $U \cap Y$ otvoren u potprostoru Y. Ali i obratno, ako je $V \subset Y$ otvoren u potprostoru Y, onda postoji skup U otvoren u X takav da je $V = U \cap Y$. Ova činjenica, koju nije teško provjeriti, služi kao definicija potprostora topološkog prostora X: Za podskup $Y \subseteq X$ kaže se da ima ***relativnu*** ili ***induciranu topologiju*** ukoliko je skup $V \subseteq Y$ otvoren u Y ako i samo ako postoji skup $U \subseteq X$ otvoren u X takav da je $V = Y \cap U$. U tom se slučaju kaže da je Y ***potprostor topološkog prostora*** X. Lako se pokazuje da je skup $E \subseteq Y$ zatvoren u potprostoru Y ako i samo ako postoji skup $F \subseteq X$ zatvoren u X takav da je $E = Y \cap F$.



Primijetimo da ako je $Y \subseteq X$ otvoren i $U \subseteq Y$ otvoren u Y (tj. s obzirom na topologiju potprostora Y), onda je U otvoren i u X. Analogno, ako je $Y \subseteq X$ zatvoren i $A \subseteq Y$ zatvoren u Y onda je A zatvoren i u X.

Definicija 1.3 Neka je $A \subseteq X$ proizvoljan podskup (topološkog) prostora X. Tada definiramo skupove:

$$\operatorname{Int} A := \bigcup\{U : U \subseteq A,\ U \text{ otvoren u } X\}$$
$$\overline{A} := \operatorname{Cl} A := \bigcap\{F : F \supseteq A,\ F \text{ zatvoren u } X\}$$
$$\partial A := \operatorname{Fr} A := \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$$

Skup $\operatorname{Int} A$ zovemo ***nutrinom*** ili ***interiorom skupa*** A. Zbog svojstava $(T1) - (T3)$ je $\operatorname{Int} A$ otvoren skup i to je očito najveći otvoren (u X) skup koji je sadržan u A. Skup A je otvoren ako i samo ako je $A = \operatorname{Int} A$.

Skup $\overline{A}$ zovemo ***zatvaračem*** ili ***zatvorenjem*** skupa A. Zbog svojstava familije svih zatvorenih skupova je $\overline{A}$ zatvoren skup i to je najmanji zatvoren (u X) skup koji sadrži skup A. Skup A je zatvoren ako i samo ako je $A = \overline{A}$. Za svaki podskup $A \subseteq X$ je $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Skup ∂A je zatvoren skup koji zovemo ***rubom*** ili ***granicom*** skupa A.

Napomenimo odmah da su nutrina, zatvarač i rub skupa A gotovo uvijek ovisni o tome u kojem prostoru se skup A nalazi.

Primjeri 1.2

(i) Za interval $A = \langle 0,1\rangle \subseteq \mathbb{R}$ je $\operatorname{Int} A = \langle 0,1\rangle = A$, $\overline{A} = [0,1], \partial A = \{0,1\}$.

(ii) Za kuglu $A = K(P_0,r) \subseteq \mathbb{R}^n$ je $\operatorname{Int} A = K(P_0,r) = A$, $\overline{A} = \overline{K}(P_0,r)$, $\partial A = \{P : d(P,P_0) = r\} = \overline{K}(P_0,r) \setminus K(P_0,r)$.

Specijalno je $\partial K(0,1) = \mathbb{S}^{n-1}$, gdje je $K(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$ jedinična kugla oko ishodišta.

(iii) Za $A = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ je $\operatorname{Int} A = \emptyset$, $\overline{A} = \mathbb{R}$, $\partial A = \mathbb{R}$.

(iv) Za $A = \{(x,0) : 0 < x < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ je $\operatorname{Int} A = \emptyset$, $\overline{A} = \{(x,0) : 0 \leq x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$, $\partial A = \overline{A}$.

(v) U segmentu $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ kao potprostoru od $\mathbb{R}$, tj. obzirom na euklidsku metriku $d(x,y) = |x-y|$, $x,y \in [a,b]$, su tipične okoline krajeva a i b, poluotvoreni intervali $[a,t\rangle$ odnosno $\langle t,b]$, $t \in \langle a,b\rangle$. Tipične okoline ostalih točaka, tj. točaka $x \in \langle a,b\rangle$, su otvoreni intervali $\langle t_1,t_2\rangle$ takvi da je $a \leq t_1 < x < t_2 \leq b$.

(vi) Identificiramo li realan broj $x \in \mathbb{R}$ s parom $(x,0) \in \mathbb{R}^2$, možemo na $\mathbb{R}$ gledati kao na vektorski i topološki potprostor od $\mathbb{R}^2$.

Uoči da je skup A u (i) i (iv) zapravo 'isti' skup, ali su $\operatorname{Int} A$ i ∂A različiti, ovisno o tome da li na A gledamo kao na skup u $\mathbb{R}$ ili u $\mathbb{R}^2$.

Definicija 1.4 Neka je A podskup metričkog prostora X. Za točku $P_0 \in X$ kažemo da je ***gomilište skupa*** A ako svaka okolina U točke P_0 sadrži beskonačno mnogo elemenata skupa A. Skup svih gomilišta skupa A označavamo s A^d. Skup A^d ponekad se naziva ***derivatom*** skupa A, pa otuda i oznaka.

Primijetimo da gomilište skupa A može, ali i ne mora, pripadati skupu A. Za točku skupa A koja nije ujedno i njegovo gomilište kažemo da je ***izolirana točka*** skupa A.

Primjeri 1.3

(i) $A = \langle 0,1\rangle \subseteq \mathbb{R},\ A^d = [0,1]$.

(ii) $A = [0,1] \cup \{3\} \subseteq \mathbb{R},\ A^d = [0,1]$. Uoči da točka 3 nije gomilište skupa A, iako mu pripada.

(iii) $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R},\ A^d = \{0\}$.

(iv) $A = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R},\ A^d = \emptyset$.

(v) $A = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R},\ A^d = \mathbb{R}$.

Dokažimo sada neke osnovne činjenice o uvedenim pojmovima.

Teorem 1.2 *Neka je A podskup metričkog prostora X. Točka $P_0 \in X$ je gomilište skupa A ako i samo ako svaka okolina U točke P_0 sadrži barem jednu točku skupa A različitu od točke P_0, tj. $U \cap (A \setminus \{P_0\}) \neq \emptyset$.*

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Ovaj smjer je trivijalan.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je U proizvoljna okolina točke P_0. Po pretpostavci postoji točka $P_1 \in U \cap (A \setminus \{P_0\})$. Kako je jednočlan skup $\{P_1\}$ zatvoren, to je skup $U_1 := U \setminus \{P_1\} = U \cap (X \setminus \{P_1\})$ otvorena okolina točke P_0. Stoga po pretpostavci postoji točka $P_2 \in U_1 \cap (A \setminus \{P_0\}) \subseteq U$. Skup $U_2 := U_1 \setminus \{P_2\} = U \setminus \{P_1, P_2\}$ je okolina točke P_0 pa odaberemo točku $P_3 \in U_2 \cap (A \setminus \{P_0\})$ i taj postupak nastavimo dalje. Prema izboru točaka $P_n, n \in \mathbb{N}$, očito je da je skup $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ beskonačan skup točaka iz A u zadanoj okolini U točke P_0, pa je P_0 gomilište skupa A. ■

Svojstvo iz prethodnog teorema nije općenito u topološkom prostoru ekvivalentno definiciji gomilišta skupa. U dokazu dovoljnosti koristili smo zapravo činjenicu da je u metričkom prostoru skup koji se sastoji od jedne točke zatvoren. U topološkim prostorima u kojima to nije ispunjeno, teorem zaista ne vrijedi. U nekim kasnijim razmatranjima koristit ćemo činjenicu da u metričkom prostoru svake dvije različite točke imaju međusobno disjunktne okoline (također jedno svojstvo koje nema svaki topološki prostor). Stoga ćemo odsada, da ne bismo često mijenjali ambijent, raditi u metričkim prostorima, a samo ponekad ćemo ukazati kako se postupa općenito u topološkim prostorima.

Teorem 1.3 *Podskup A metričkog prostora X je zatvoren ako i samo ako sadrži sva svoja gomilišta.*

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je skup A zatvoren i P_0 gomilište od A. Pretpostavimo da $P_0 \notin A$. Tada je $P_0 \in X \setminus A$ što je otvoren skup oko točke P_0 pa bi, prema definiciji gomilišta, moralo biti $(X \setminus A) \cap A \neq \emptyset$, što nije.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka skup A sadrži sva svoja gomilišta. Dokažimo da je A zatvoren, tj. $X \setminus A$ otvoren skup. Neka je $P \in X \setminus A$. Tvrdimo da postoji otvoren skup U

takav da je $P \in U \subseteq X \setminus A$. Kada tako ne bi bilo onda bi svaka okolina U točke P sadržavala barem jednu točku skupa A (koja bi morala biti različita od P jer $P \notin A$), pa bi, prema prethodnom Teoremu 1.2, točka P bila gomilište skupa A, te bi moralo biti $P \in A$. ■

Dokažimo sada neka osnovna svojstva zatvarača, nutrine, ruba i skupa gomilišta, koja ćemo koristiti u različitim situacijama u ovom i narednim poglavljima.

Propozicija 1.4 *Neka su A i B podskupovi metričkog prostora X. Tada vrijedi sljedeće:*

(i) *Ako je $A \subseteq B$ onda je $A^d \subseteq B^d$ i $\overline{A} \subseteq \overline{B}$*

(ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(iii) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

(iv) $(A^d)^d \subseteq A^d$

(v) *A^d je zatvoren skup.*

(vi) $\overline{A} = A \cup A^d$.
Stoga je $x \in \overline{A}$ ako i samo ako svaka okolina U točke x sadrži barem jednu točku skupa A, tj. $U \cap A \neq \emptyset$, a $x \in \partial A$ ako i samo ako svaka okolina U točke x sadrži barem jednu točku skupa A i barem jednu točku skupa $X \setminus A$ (komplementa), tj. $U \cap A \neq \emptyset$ i $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

(vii) $\overline{A} = \operatorname{Int} A \cup \partial A$ *i pritom je* $\operatorname{Int} A \cap \partial A = \emptyset$, *te je* $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$

($viii$) $\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus B}$

(ix) $\partial(A \cup B) \cup \partial(A \cap B) \cup (\partial A \cap \partial B) = \partial A \cup \partial B$

Dokaz:

(i) Slijedi neposredno iz definicije gomilišta, odnosno zatvarača skupa.

(ii) Zbog $A \subseteq \overline{A}$ i $B \subseteq \overline{B}$ je $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Kako su skupovi $\overline{A}$ i $\overline{B}$ zatvoreni to je, po definiciji zatvarača, $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Obratna inkluzija dobije se primjenom svojstva (i).

(iii) Neposredno iz (i).

(iv) Neka je $P_0 \in (A^d)^d$ i neka je U proizvoljna okolina točke P_0. Tada je, prema definiciji gomilišta, skup $U \cap A^d$ beskonačan. Neka je $P \in U \cap A^d$. Kako je $P \in A^d$, a U okolina točke P, to je i skup $U \cap A$ beskonačan, tj. $P_0 \in A^d$.

(v) Zatvorenost skupa A^d slijedi iz svojstva (iv) i Teorema 1.3

(*vi*) Dokažimo najprije da je $\overline{A} \subseteq A \cup A^d$. Neka je $P \in \overline{A}$. Ako $P \notin A^d$ onda postoji okolina U točke P takva da je $U \cap (A \setminus \{P\}) = \emptyset$. Pretpostavimo da P ne pripada niti skupu A, tj. $P \notin A$. Tada je $A \setminus \{P\} = A$, pa je $U \cap A = \emptyset$, tj. $A \subseteq X \setminus U$. Kako je skup $X \setminus U$ zatvoren to je, po definiciji zatvarača, i $\overline{A} \subseteq X \setminus U$, čime smo dobili kontradikciju, jer je $P \in \overline{A}$ i $P \in U$.

Da dokažemo obratnu inkluziju, primijetimo da je $A \subseteq \overline{A}$, a kako je skup $\overline{A}$ zatvoren prema svojstvu (*i*) i Teoremu 1.3 vrijedi $A^d \subseteq (\overline{A})^d \subseteq \overline{A}$ pa je i $A \cup A^d \subseteq \overline{A}$.

(*vii*) Pokažimo da je $\overline{A} \subseteq \operatorname{Int} A \cup \partial A$, obratna inkluzija je očita. Neka je $P \in \overline{A}$. Ako $P \notin \operatorname{Int} A$ onda svaka okolina U točke P siječe komplement $X \setminus A$, pa je $P \in \overline{X \setminus A}$. Stoga je $P \in \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \partial A$.

(*viii*) Neka je $P \in \overline{A} \setminus \overline{B} = \overline{A} \cap (X \setminus \overline{B})$ i neka je U otvorena okolina točke P. Tada je i $V := U \cap (X \setminus \overline{B}) \subseteq X \setminus \overline{B}$ otvorena okolina točke P, pa je $V \cap A \cap (X \setminus \overline{B}) \neq \emptyset$. Stoga je i $U \cap \big(A \cap (X \setminus \overline{B})\big) \neq \emptyset$, tj. $P \in \overline{A \cap (X \setminus \overline{B})} = \overline{A \setminus \overline{B}} \subseteq \overline{A \setminus B}$.

(*ix*) $\boxed{\subseteq}$ Očito je $\partial A \cap \partial B \subseteq \partial A \cup \partial B$. Pokažimo da su i ostala dva člana unije na lijevoj strani sadržana u desnoj strani.

$$\begin{aligned}
\partial(A \cup B) &= \overline{A \cup B} \cap \overline{X \setminus (A \cup B)} = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{(X \setminus A) \cap (X \setminus B)} = \\
&= \big(\overline{A} \cap \overline{(X \setminus A) \cap (X \setminus B)}\big) \cup \big(\overline{B} \cap \overline{(X \setminus A) \cap (X \setminus B)}\big) \subseteq \\
&\subseteq (\overline{A} \cap \overline{X \setminus A} \cap \overline{X \setminus B}) \cup (\overline{B} \cap \overline{X \setminus A} \cap \overline{X \setminus B}) \subseteq \\
&\subseteq (\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}) \cup (\overline{B} \cap \overline{X \setminus B}) = \partial A \cup \partial B
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\partial(A \cap B) &= \overline{A \cap B} \cap \overline{X \setminus (A \cap B)} = \overline{A \cap B} \cap \overline{(X \setminus A) \cup (X \setminus B)} = \\
&= \overline{A \cap B} \cap (\overline{X \setminus A} \cup \overline{X \setminus B}) \subseteq \overline{A} \cap \overline{B} \cap (\overline{X \setminus A} \cup \overline{X \setminus B}) \subseteq \\
&\subseteq (\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}) \cup (\overline{B} \cap \overline{X \setminus B}) = \partial A \cup \partial B.
\end{aligned}$$

$\boxed{\supseteq}$ Pokažimo najprije da je skup ∂A sadržan u lijevoj strani. Vrijedi $X = \operatorname{Int} B \cup \partial B \cup (X \setminus \overline{B})$, pa je $\partial A = (\partial A \cap \operatorname{Int} B) \cup (\partial A \cap \partial B) \cup \big(\partial A \cap (X \setminus \overline{B})\big)$.

Srednji sumand je već sadržan u lijevoj strani. Dokažimo to i za prvi i treći sumand.

Vrijedi

$$\begin{aligned}
\partial A \cap \operatorname{Int} B &= (\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}) \cap (X \setminus \overline{X \setminus B}) \subseteq \overline{A} \cap (X \setminus X \setminus B) = \\
&= \overline{A} \setminus \overline{X \setminus B} \subseteq \overline{A \setminus (X \setminus B)} = \overline{A \cap B},
\end{aligned}$$

i $\partial A \cap \operatorname{Int} B \subseteq \partial A \subseteq \overline{X \setminus A} \subseteq \overline{X \setminus (A \cap B)}$, pa je $\partial A \cap \operatorname{Int} B \subseteq \partial(A \cap B)$. Nadalje,

$$\begin{aligned}\partial A \cap (X \setminus \overline{B}) &= \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} \cap (X \setminus \overline{B}) \subseteq \overline{X \setminus A} \setminus \overline{B} \subseteq \\ &\subseteq \overline{(X \setminus A) \setminus B} = \overline{(X \setminus A) \cap (X \setminus B)} = \overline{X \setminus (A \cup B)},\end{aligned}$$

i $\partial A \cap (X \setminus \overline{B}) \subseteq \overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$, pa je $\partial A \cap (X \setminus \overline{B}) \subseteq \partial(A \cup B)$. ■

Napomena 1.2 Općenito je $(A^d)^d \neq A^d$. Jednostavan primjer koji to pokazuje je skup $A := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$, za koji je $A^d = \{0\}$, a $(A^d)^d = \emptyset$.

Definicija 1.5 ***Udaljenost točke*** x ***do skupa*** A u metričkom prostoru (X, d) definira se kao broj

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Iz tvrdnje (vi) prethodnog teorema lako se dokazuje sljedeća ***karakterizacija zatvarača u metričkim prostorima***:

Korolar 1.5 *Neka je* X *metrički prostor i* $A \subseteq X$ *proizvoljan podskup. Tada je* $\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$.

Dokaz: Ako je $x \in \overline{A} = A \cup A^d$, onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $a \in A$ takav da je $a \in K(x, \varepsilon)$, tj. $d(x, a) < \varepsilon$. Stoga je $d(x, A) = 0$. Obratno, ako je $d(x, A) = 0$ onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $a \in A$ takav da je $d(x, a) < \varepsilon$, pa je $K(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, tj. $x \in A \cup A^d = \overline{A}$. ■

Slično se definira ***udaljenost skupova*** $A, B \subseteq X$ kao

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Napomena 1.3 Primijetimo da vrijedi

$$\begin{aligned}d(A, B) &= \inf\{d(a, B) : a \in A\} \\ &= \inf\{d(A, b) : b \in B\}.\end{aligned}$$

Zaista, za svake dvije točke $a \in A$ i $b \in B$ je $d(a, b) \geq d(a, B) \geq \inf\limits_{a \in A} d(a, B)$, pa je $\inf\limits_{a \in A} d(a, B) \leq \inf\limits_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b) = d(A, B)$.

Pretpostavimo da je $\inf_{a\in A} d(a,B) < d(A,B)$. Tada postoji $a \in A$ takav da je $d(a,B) < d(A,B)$, tj. $\inf_{b\in B} d(a,b) < d(A,B)$, pa postoji i $b \in B$ takav da je $d(a,b) < d(A,B)$, što je nemoguće. Mora dakle biti $\inf_{a\in A} d(a,B) = d(A,B)$. Analogno se dokazuje i druga jednakost.

Sljedeći pojam koji ćemo uvesti je povezanost. Intuitivno, želimo opisati prostore koji su sastavljeni od 'jednog komada'.

Definicija 1.6 Za metrički prostor X kažemo da je ***nepovezan*** ako postoje neprazni otvoreni podskupovi $U, V \subseteq X$ takvi da je $X = U \cup V$ i $U \cap V = \emptyset$. Prostor X je ***povezan*** ako nije nepovezan, tj. ako se ne može prikazati kao disjunktna unija dvaju nepraznih otvorenih podskupova. Skup $A \subsetneq X$ je povezan ukoliko je A povezan kao topološki potprostor.

Odmah je jasno da se riječ 'otvoren' u definiciji nepovezanog, odnosno povezanog prostora, može zamijeniti riječju 'zatvoren'.

Napomena 1.4 Za podskup A metričkog prostora X će povezanost značiti da je povezan kao potprostor od X, pa će *otvoren* u prethodnoj definiciji značiti *otvoren obzirom na* A. Drugim riječima, podskup $A \subseteq X$ je povezan ukoliko ne postoje neprazni otvoreni podskupovi $U, V \subseteq X$ takvi da je $A \subseteq U \cup V$ i $(U \cap V) \cap A \neq \emptyset$.

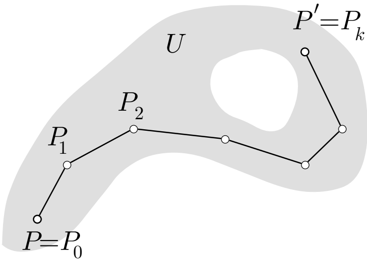
Prototip povezanog prostora je segment realnih brojeva. Da je to zaista tako, govori sljedeći teorem.

Teorem 1.6 *Segment* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ *je povezan.*

Dokaz: Pretpostavimo da nije, tj. da postoje neprazni, disjunktni, otvoreni u $[a,b]$ skupovi U i V takvi da je $[a,b] = U \cup V$. Neka je na primjer $a \in U$ i neka je $c := \inf V$. Mora biti ili $c \in U$ ili $c \in V$. Kako je $a \in U$ i U je otvoren, to postoji $r > 0$ takav da je $[a, a+r\rangle \subseteq U = [a,b] \setminus V$. Zato je $c \neq a$. Nadalje je $c \neq b$, jer bi inače bilo $V = \{b\}$ što nije otvoren skup u $[a,b]$. Stoga, kada bi bilo $c \in V$ onda bi postojao $r > 0$ takav da je $\langle c-r, c+r\rangle \subseteq V$, pa bi infimum skupa V bio manji od c. Mora dakle biti $c \in U$. No tada bi postojao $r > 0$ takav da je $\langle c-r, c+r\rangle \subseteq U$ pa bi infimum skupa V bio veći od c. Time smo dobili kontradikciju, pa je $[a,b]$ povezan. ■

Za metrički prostor X kažemo da je ***putovima povezan*** ako se svake dvije točke $x_0, x_1 \in X$ mogu spojiti **putom**, tj. postoji neprekidno preslikavanje[1] $\gamma : [0,1] \to X$ takvo da je $\gamma(0) = x_0$ i $\gamma(1) = x_1$. Otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ je povezan ako i samo ako je putovima povezan. Štoviše, vrijedi sljedeća karakterizacija:

> Otvoren skup $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je povezan ako i samo ako za svake dvije točke P i $P' \in U$, postoji konačno mnogo točaka $P_0 = P, P_1, P_2, \ldots, P_k = P'$ u U takvih da svi segmenti
>
> $$[P_{i-1}, P_i] := \{(1-t)P_{i-1} + tP_i : 0 \le t \le 1\}$$
>
> leže u U, tj. $[P_{i-1}, P_i] \subseteq U,\ i = 1, \ldots, k$.



Uniju $\Gamma = [P_0, P_1] \cup [P_1, P_2] \cup \ldots \cup [P_{k-1}, P_k]$ nazivamo ***poligonalnom linijom*** od $P = P_0$ do $P' = P_k$. Dakle, otvoren skup $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je povezan ako i samo ako se svake dvije točke iz U mogu unutar U spojiti poligonalnom linijom.

Dokaz navedenih karakterizacija povezanosti otvorenih skupova u $\mathbb{R}^n$ prelazi okvire ovog udžbenika i nećemo ga provoditi[1].

Otvoren povezan skup u $\mathbb{R}^n$ zovemo ***područjem***. Navedimo i primjer povezanog skupa u ravnini $\mathbb{R}^2$, ali koji nije putovima povezan, tj. kod kojeg se ne mogu svake dvije točke spojiti 'neprekidnom linijom' unutar tog skupa (naravno, takav skup ne može biti otvoren!).

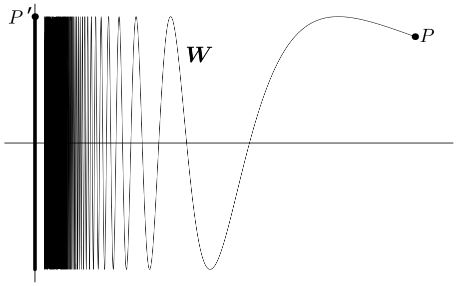
Primjer 1.4 Neka je

$$W = \{(x, \sin \tfrac{1}{x}) : 0 < x \le 1\} \bigcup \{(0, y) : -1 \le y \le 1\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

W je povezan skup (provjeri!) iako se, naprimjer, točke $P = (1, \sin 1)$ i $P' = (0, 1)$ ne mogu spojiti putom unutar W (dokaz ove činjenice nije sasvim jednostavan i potrebni su neki pojmovi koje nismo razmatrali).

[1] vidi Definiciju 2.1

[1] Za dokaz činjenice da je otvoren podskup u $\mathbb{R}^n$ povezan ako i samo ako je putovima povezan, vidi npr. J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston 1966, str. 166, a da je to ekvivalentno povezanosti poligonalnim linijama, slijedi jednostavno korištenjem kompaktnosti, vidi § 5.



Na kraju spomenimo još jedno svojstvo skupova u metričkom prostoru.

Definicija 1.7 Podskup A metričkog prostora (X, d) je ***ograničen*** ili ***omeđen*** ukoliko postoje točka $P_0 \in X$ i broj $r > 0$ takvi da je $A \subseteq K(P_0, r)$.

Lako se dokazuje:

Propozicija 1.7

(*i*) *Podskup A metričkog prostora (X, d) je ograničen ako i samo ako za svaku točku $P_0 \in X$ postoji broj $r > 0$ takav da je $A \subseteq K(P_0, r)$.*

(*ii*) *Unija od konačno mnogo ograničenih skupova je opet ograničen skup.*

(*iii*) *Svaki podskup B ograničenog skupa A je i sâm ograničen.*

(*iv*) *Podskup $A \subseteq \mathbb{R}$ je ograničen ako i samo ako postoje brojevi $m, M \in \mathbb{R}$ takvi da je $m \leq a \leq M$ za sve $a \in A$.* ■

Definicija 1.8 ***Dijametar*** skupa A u metričkom prostoru (X, d) definira se kao $\operatorname{diam} A := \sup\{d(P, P') : P, P' \in A\}$.

Očito vrijedi:

Propozicija 1.8 *Skup A u metričkom prostoru (X, d) je omeđen ako i samo ako je $\operatorname{diam} A < \infty$.* ■

§ 2 Neprekidna preslikavanja

Ono što su za vektorske prostore linearni operatori, za grupe—homomorfizmi grupa, to su za metričke i topološke prostore neprekidna preslikavanja.

Definicija 2.1 Neka su X i Y metrički prostori. Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je ***neprekidno u točki*** $P_0 \in X$ ako za svaki realni broj $\varepsilon > 0$ postoji realni broj $\delta > 0$ takav da za svaku točku $P \in X$, ako je $d(P, P_0) < \delta$, onda je $d(f(P), f(P_0)) < \varepsilon$. Dakle,

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists \delta > 0\ ,\ \forall P \in X\ ,\ d(P, P_0) < \delta \ \Rightarrow\ d(f(P), f(P_0)) < \varepsilon\ .$$

Drugim riječima, preslikavanje f je neprekidno u točki P_0 ukoliko

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists \delta > 0 \text{ tako da je } f(K(P_0, \delta)) \subseteq K(f(P_0), \varepsilon)\ .$$

Preslikavanje f je ***neprekidno*** ukoliko je neprekidno u svakoj točki $P_0 \in X$.

Skup svih neprekidnih preslikavanja sa X u Y označavamo sa $C(X, Y)$. U slučaju $Y = \mathbb{R}$ se skup $C(X, \mathbb{R})$ svih neprekidnih realnih funkcija na X obično označava sa $C(X)$.

Primijetimo da ako je δ kao u definiciji neprekidnosti, onda je i svaki δ' takav da je $0 < \delta' < \delta$ također dobar.

Sljedeći teorem daje nekoliko korisnih karakterizacija neprekidnosti:

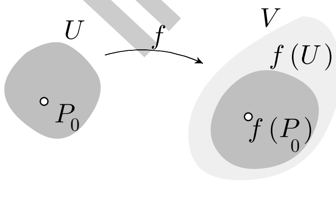
Teorem 2.1 *Neka je $f\colon X \to Y$ preslikavanje metričkih prostora.*

(a) *f je neprekidno u točki $P_0 \in X$ ako i samo ako za svaku okolinu V točke $f(P_0)$ u Y postoji okolina U točke P_0 u X takva da je $f(U) \subseteq V$.*

(b) *Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

- (i) *f je neprekidno.*
- (ii) *Za svaki otvoreni skup $V \subseteq Y$ je skup $f^{\leftarrow}(V)$ otvoren u X.*
- (iii) *Za svaki zatvoreni skup $F \subseteq Y$ je skup $f^{\leftarrow}(F)$ zatvoren u X.*

Dokaz: (a) Neka je f neprekidno u P_0, a $V \subseteq Y$ okolina točke $f(P_0)$.



Kako je V otvoren, postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $K(f(P_0), \varepsilon) \subseteq V$, a jer je f neprekidno u P_0, postoji $\delta > 0$ takav da za svaku točku $P \in X$ za koju je $d(P, P_0) < \delta$ vrijedi $d(f(P), f(P_0)) < \varepsilon$, tj. $f(K_X(P_0, \delta)) \subseteq K_Y(f(P_0), \varepsilon)$. Stavimo li $U := K_X(P_0, \delta)$ dobivamo traženu okolinu točke P_0.

Obratno, neka je $\varepsilon > 0$. Za okolinu $V := K_Y(f(P_0), \varepsilon)$ postoji okolina $U \subseteq X$ točke P_0 takva da je $f(U) \subseteq V$. Kako je U otvoren, postoji $\delta > 0$ takav da je $K_X(P_0, \delta) \subseteq U$, pa je $f(K_X(P_0, \delta)) \subseteq K_Y(f(P_0), \varepsilon)$, tj. f je neprekidno u P_0.

(b) (i) $\Rightarrow$ (ii) Neka je f neprekidno, $V \subseteq Y$ otvoren skup, a $P \in f^{\leftarrow}(V)$ proizvoljna točka. Kako je f neprekidno u P, postoji okolina $U \subseteq X$ točke P takva da je $f(U) \subseteq V$. Neka je $r > 0$ takav da je $K(P, r) \subseteq U$. Tada je $K(P, r) \subseteq f^{\leftarrow}(V)$. Kako je P proizvoljna točka iz $f^{\leftarrow}(V)$, zaključujemo da je $f^{\leftarrow}(V)$ otvoren skup u X.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Neka je $P_0 \in X$ i $\varepsilon > 0$. Kako je $K_Y(f(P_0), \varepsilon)$ otvoren skup u Y, to je, po pretpostavci, skup $f^{\leftarrow}(K_Y(f(P_0), \varepsilon))$ otvoren u X i sadrži točku P_0. Stoga postoji $\delta > 0$ takav da je $K_X(P_0, \delta) \subseteq f^{\leftarrow}(K_Y(f(P_0), \varepsilon))$, tj. $f(K_X(P_0, \delta)) \subseteq K_Y(f(P_0), \varepsilon)$, pa je f neprekidno u P_0.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Neka je $F \subseteq Y$ zatvoren skup. Tada je $Y \setminus F$ otvoren skup pa je, po pretpostavci, skup $X \setminus f^{\leftarrow}(F) = f^{\leftarrow}(Y \setminus F)$ otvoren u X, tj. $f^{\leftarrow}(F)$ je zatvoren.

Analogno se dokazuje da (iii) $\Rightarrow$ (ii). ■

U prethodnom teoremu neprekidnost je karakterizirana samo pomoću otvorenih skupova, tj. topološke strukture prostora X i Y. Stoga svojstva (a), odnosno (b), služe za definiciju neprekidnosti za preslikavanja topoloških prostora.

Da bismo mogli uopće govoriti o neprekidnosti nekog preslikavanja $f\colon X \to Y$, X i Y moraju biti snabdjeveni topološkom strukturom. To dakle ne mogu biti 'goli' skupovi već moraju biti ili topološki, ili metrički prostori, ili normirani vektorski prostori, ili njihovi podskupovi, što zapravo znači potprostori u topološkom smislu s relativnom topologijom. Stoga fraza kao naprimjer 'neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje...' zapravo znači 'neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje topološkog prostora X u topološki prostor Y...'. U situacijama kada iz nekog razloga X, odnosno Y, moraju biti naprimjer metrički ili neki drugi prostori, to ćemo i naglasiti, ukoliko to iz samog konteksta nije jasno.

Navedimo sada nekoliko osnovnih i jednostavnih primjera neprekidnih preslikavanja.

Primjeri 2.1

(i) ***Identiteta*** $id = 1_X \colon X \to X$ definirana s $id(P) = P,\ P \in X$.

(*ii*) ***Konstantno preslikavanje*** $c\colon X \to Y$ definirano s $c(P) = Q_0$, $P \in X$, gdje je $Q_0 \in Y$ neka točka.

(*iii*) ***Inkluzija*** $i\colon S \to X$ definirana s $i(P) = P$, $P \in S$, gdje je $S \subseteq X$ neki podskup s relativnom topologijom.

(*iv*) ***Koordinatne projekcije*** $p_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirane s $p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. Ima ih n.

(*v*) ***Norma*** $\|\ \|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(*vi*) Neka je X metrički prostor i $A \subseteq X$. Funkcija $x \mapsto d(x, A)$ (vidi definiciju na str. 11) je neprekidna na čitavom X. Zaista, neka su $x, y \in X$ proizvoljne točke. Tada za svaki $a \in A$ vrijedi $d(x, A) \le d(x, a) \le d(x, y) + d(y, a)$ pa je $d(x, A) \le d(x, y) + d(y, A)$ tj. vrijedi $d(x, A) - d(y, A) \le d(x, y)$. Analogno je $d(y, A) - d(x, A) \le d(x, y)$ pa je $|d(x, A) - d(y, A)| \le d(x, y)$ odakle neposredno slijedi neprekidnost funkcije $x \mapsto d(x, A)$.

Primjer 2.2 Promotrimo i primjer funkcije koja nije neprekidna. Neka je $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & , \text{za } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{za } (x, y) = (0, 0)\,. \end{cases}$$

f ***nije neprekidna*** u $0 = (0, 0)$, tj.

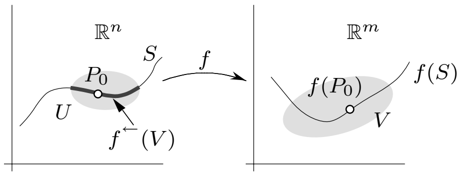
$$\exists \varepsilon > 0 \text{ t.d. } \forall \delta > 0,\ \exists P_\delta \in \mathbb{R}^2 \text{ t.d. je } d(P_\delta, 0) < \delta \text{ i } d(f(P_\delta), f(0)) \ge \varepsilon\,.$$

Zaista, za $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$, možemo za svaki $\delta > 0$ odabrati npr. točku $P_\delta = (\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})$. Za nju doista vrijedi $d(P_\delta, 0) = \dfrac{\delta}{\sqrt{2}} < \delta$ i $d(f(P_\delta), f(0)) = |f(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}) - 0| = \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3}$.

Uoči da unatoč prekidnosti ove funkcije u 0, njene restrikcije na koordinatne osi jesu neprekidne u 0. Kaže se da je ova funkcija 'neprekidna po svakoj varijabli posebno'. Graf funkcije f nalazi se na stranici 33.

Napomena 2.1 (*i*) (*Neprekidnost restrikcije*) Ako je preslikavanje $f\colon X \to Y$ neprekidno u točki P_0, onda je i restrikcija $f\big|_S\colon S \to Y$ neprekidna u P_0 za svaki potprostor $S \subseteq X$ koji sadrži točku P_0.

(*ii*) Često ćemo biti u situaciji da promatramo preslikavanje $f\colon S \to \mathbb{R}^m$, gdje je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ neki podskup. Ako je f neprekidno, a $V \subseteq \mathbb{R}^m$ otvoren



skup, onda je prema svojstvu (ii) u Teoremu 2.1, $f^{\leftarrow}(V)$ otvoren u S. To ne znači da je to otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$, već da postoji skup U otvoren u $\mathbb{R}^n$ takav da je $f^{\leftarrow}(V) = U \cap S$.

(iii) (*Lokalni karakter neprekidnosti*) Neka su $f, g\colon X \to Y$ dva preslikavanja i $P_0 \in X$. Ako je f neprekidno u P_0 i ako postoji okolina U točke P_0 takva da je $f|_U = g|_U$, tada je i g neprekidno u P_0. To slijedi neposredno iz Teorema 2.1(a) i činjenice da je presjek dvaju otvorenih skupova opet otvoren skup. Zbog toga se kaže da *neprekidnost je lokalno svojstvo.*

Često se koristi činjenica iskazana u sljedećem teoremu:

Teorem 2.2 (Lema o uniji preslikavanja) *Neka je $X = A \cup B$ gdje su A i B zatvoreni podskupovi od X te neka su $f\colon A \to Y$ i $g\colon B \to Y$ neprekidna preslikavanja takva da je $f|_{A\cap B} = g|_{A\cap B}$. Tada je i preslikavanje $h\colon X \to Y$ definirano s*

$$h(P) = \begin{cases} f(P) & , \text{ za } P \in A \\ g(P) & , \text{ za } P \in B \end{cases}$$

neprekidno. Ista tvrdnja vrijedi i ukoliko su A i B otvoreni podskupovi od X.

Dokaz: Uočimo najprije da je zbog $f|_{A\cap B} = g|_{A\cap B}$ preslikavanje h dobro definirano. Neka je $F \subseteq Y$ proizvoljan zatvoren skup. Tada je zbog neprekidnosti od f, skup $f^{\leftarrow}(F)$ zatvoren podskup od A, a kako je A zatvoren u X, to je $f^{\leftarrow}(F)$ zatvoren i u X. Analogno je i $g^{\leftarrow}(F)$ zatvoren u X. Stoga je i skup $h^{\leftarrow}(F) = f^{\leftarrow}(F) \cup g^{\leftarrow}(F)$ zatvoren u X pa je h neprekidno. ■

Prethodni teorem ne vrijedi ukoliko ne pretpostavimo da su skupovi A i B bilo oba zatvoreni, bilo oba otvoreni. Jednostavan kontraprimjer je naprimjer preslikavanje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirano s

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ 1 & , x > 0 \;. \end{cases}$$

U trećem poglavlju bit će nam korisna sljedeća činjenica:

Teorem 2.3 *Neka je $S \subseteq X$ podskup i $f\colon S \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje. Definirajmo preslikavanje $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{R}$ s*

$$\tilde{f}(P) = \begin{cases} f(P) & \text{za } P \in S \\ 0 & \text{za } P \notin S \ . \end{cases}$$

Ukoliko preslikavanje $\tilde{f}$ nije neprekidno u točki $P_0 \in X$, tada je $P_0 \in \partial S$.

Dokaz: Dokažimo najprije da je $P_0 \in \overline{S}$. Pretpostavimo da je $P_0 \in X \setminus \overline{S}$. Kako je $X \setminus \overline{S}$ otvorena okolina točke P_0 i $\tilde{f}|_{X\setminus\overline{S}} = 0$, to bi, zbog neprekidnosti konstantnog preslikavanja $0\colon X \to \mathbb{R}$ i Napomene 2.1(*iii*), $\tilde{f}$ bilo neprekidno u P_0. Pokažimo sada da je $P_0 \in \overline{X \setminus S}$. Pretpostavimo da nije, tj. da je $P_0 \in X \setminus (\overline{X \setminus S}) = \operatorname{Int}(X \setminus (\overline{X \setminus S}) \subseteq \operatorname{Int}(X \setminus (X \setminus S)) = \operatorname{Int} S$. Kako je $\operatorname{Int} S$ otvoren skup i $\tilde{f}|_{\operatorname{Int} S} = f|_{\operatorname{Int} S}$ to bi zbog neprekidnosti od f i činjenice da je neprekidnost lokalno svojstvo, i preslikavanje $\tilde{f}$ bilo neprekidno u P_0. Dakle, $P_0 \in \overline{S} \cap \overline{X \setminus S} = \partial S$. ■

Svakom skupu $S \subseteq X$ pridružena je njegova ***karakteristična funkcija*** $\chi_S : X \to \{0,1\} \subseteq \mathbb{R}$ definirana s

$$\chi_S(P) := \begin{cases} 1\,, & P \in S \\ 0\,, & P \in X \setminus S \end{cases} ,$$

i obratno, svakoj funkciji $\chi\colon X \to \{0,1\}$ jednoznačno je pridružen podskup $S := \chi^{\leftarrow}(1)$, pa je $\chi = \chi_S$. To opravdava identifikaciju skupa $2^X := \{0,1\}^X$ svih funkcija sa skupa X u ***dvočlani skup*** $\{0,1\}$, i skupa $\mathcal{P}(X)$ svih podskupova od X, tj. ***partitivnog skupa*** skupa X.

Korolar 2.4 *Neka je X metrički prostor, $S \subseteq X$ podskup, a $\chi_S : X \to \mathbb{R}$ pripadna karakteristična funkcija. Skup D točaka u kojima funkcija χ_S nije neprekidna jednak je ∂S.*

Dokaz: Neka je $\mathbf{1}\colon S \to \mathbb{R}$ konstantna funkcija $\mathbf{1}(P) = 1$ za sve $P \in S$. Uz oznake kao u prethodnom Teoremu 2.3, očito je $\tilde{\mathbf{1}} = \chi_S$, pa je $D \subseteq \partial S$.

Obratno, ako je $P_0 \in \partial S = \overline{S} \cap \overline{X \setminus S}$, onda svaka okolina U od P_0 siječe i S i $X \setminus S$, pa u U ima točaka u kojima χ_S poprima vrijednost 1, i točaka u kojima poprima vrijednost 0. Stoga χ_S nije neprekidna u P_0, tj. $P_0 \in D$, pa je i $\partial S \subseteq D$. ■

Jedno od osnovnih svojstava neprekidnih preslikavanja dano je sljedećim jednostavnim i važnim teoremom:

Teorem 2.5 (O neprekidnosti kompozicije) *Neka su $f: X \to Y$ i $g: Y \to Z$ preslikavanja. Ako je f neprekidno u točki $P_0 \in X$ i g neprekidno u točki $f(P_0) \in Y$, onda je kompozicija $g \circ f : X \to Z$ neprekidna u P_0. Ako su f i g neprekidna preslikavanja, onda je i kompozicija $g \circ f$ neprekidno preslikavanje.*

Dokaz: Neka je $W \subseteq Z$ proizvoljna okolina točke $(g \circ f)(P_0)$. Kako je g neprekidno u $f(P_0)$, to prema Teoremu 2.1(a) postoji okolina $V \subseteq Y$ točke $f(P_0)$ takva da je $g(V) \subseteq W$. Zbog neprekidnosti od f u točki P_0, postoji okolina $U \subseteq X$ točke P_0 takva da je $f(U) \subseteq V$. Stoga je $(g \circ f)(U) = g(f(U)) \subseteq g(V) \subseteq W$, pa je $g \circ f$ neprekidno u P_0. ■

Iako nam je cilj proučavati vektorske funkcije više realnih varijabli, dakle funkcije $f : S \to \mathbb{R}^m$, gdje je $S \subseteq \mathbb{R}^n$, mnoga pitanja o takvim funkcijama svode se na odgovarajuća pitanja za realne funkcije. Jedno takvo pitanje je i neprekidnost.

Preslikavanje $f : S \to \mathbb{R}^m$ određeno je svojim ***koordinatnim preslikavanjima*** $f_i : S \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, gdje je

$$f(P) = (f_1(P), f_2(P), \dots, f_m(P)) \,.$$

Pisat ćemo također i $f = (f_1, \dots, f_m) : S \to \mathbb{R}^m$.

Teorem 2.6 *Preslikavanje $f = (f_1, \dots, f_m) : S \to \mathbb{R}^m$ je neprekidno u točki $P_0 \in S$, ako i samo ako su sva preslikavanja $f_i : S \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, neprekidna u P_0. Preslikavanje f je neprekidno, ako i samo ako su neprekidna sva njegova koordinatna preslikavanja f_i, $i = 1, \dots, m$.*

Dokaz: Neka je f neprekidno u P_0. Tada su zbog neprekidnosti koordinatnih projekcija $p_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ i kompozicije $f_i = p_i \circ f$, $i = 1, \dots, m$, neprekidne u P_0.

Obratno, ako su sva preslikavanja f_i neprekidna u P_0, onda za svaki $\varepsilon > 0$, postoje $\delta_i > 0$ takvi da za svaku točku $P \in S$ za koju je $d(P, P_0) < \delta_i$ vrijedi $|f_i(P) - f_i(P_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$. Neka je $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$. Tada za $P \in S$, ako je $d(P, P_0) < \delta$, vrijedi

$$d(f(P), f(P_0)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |f_i(P) - f_i(P_0)|^2} < \varepsilon$$

pa je f neprekidno u P_0. ■

Propozicija 2.7 *Neka su* $f, g\colon S \to \mathbb{R}$ *funkcije neprekidne u točki* $P_0 \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ *i neka je* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Tada vrijedi:*

(*i*) *Funkcija* $f + g\colon S \to \mathbb{R}$ *neprekidna je u* P_0.

(*ii*) *Funkcija* $\lambda f\colon S \to \mathbb{R}$ *neprekidna je u* P_0.

(*iii*) *Funkcija* $f \cdot g\colon S \to \mathbb{R}$ *neprekidna je u* P_0.

(*iv*) *Ako je* $g(P_0) \neq 0$, *onda je i funkcija* $\frac{f}{g}$ *definirana na nekoj okolini od* P_0 *i neprekidna je u* P_0.

(*v*) *Funkcija* $|f|\colon S \to \mathbb{R}$ *neprekidna je u* P_0.

(*vi*) *Funkcije* $\min\{f, g\}, \max\{f, g\}\colon S \to \mathbb{R}$ *neprekidne su u* P_0.

Zbog Teorema 2.6 i neprekidnosti norme, tvrdnje (*i*),(*ii*) i (*v*) jednako vrijede i u slučaju vektorskih funkcija $f, g\colon S \to \mathbb{R}^m$. Tvrdnja (*iii*) također vrijedi za vektorske funkcije ukoliko se za produkt uzme skalarni produkt. U slučaju dimenzije $m = 3$, tvrdnja (*iii*) vrijedi i za vektorski produkt.

Dokaz: (*i*) Kako su f i g neprekidne u P_0, to za svaki $\varepsilon > 0$ postoje brojevi $\delta_1, \delta_2 > 0$ takvi da za $P \in S$ za koje je $d(P, P_0) < \delta_1$ vrijedi $|f(P) - f(P_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, odnosno ako je $d(P, P_0) < \delta_2$ onda je $|g(P) - g(P_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. No tada za točku $P \in S$ za koju je $d(P, P_0) < \delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ vrijedi

$$\begin{aligned}|(f+g)(P) - (f+g)(P_0)| &= |f(P) + g(P) - f(P_0) - g(P_0)| \leq \\ &\leq |f(P) - f(P_0)| + |g(P) - g(P_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,\end{aligned}$$

pa je $f + g$ neprekidno u P_0.

(*ii*) Za $\lambda = 0$ je funkcija λf konstantna funkcija, pa je neprekidna. Za $\lambda \neq 0$, zbog neprekidnosti od f u P_0, za $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za točku $P \in S$ za koju je $d(P, P_0) < \delta$ vrijedi $|f(P) - f(P_0)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Tada je

$$\begin{aligned}|(\lambda f)(P) - (\lambda f)(P_0)| &= |\lambda \cdot f(P) - \lambda \cdot f(P_0)| = \\ &= |\lambda|\,|f(P) - f(P_0)| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon\,,\end{aligned}$$

pa je λf neprekidna u P_0.

Za dokaz neprekidnosti produkta potrebna nam je sljedeća lema koju ćemo i inače više puta koristiti:

Lema 2.8 (O lokalnoj ograničenosti neprekidne funkcije) *Neka je preslikavanje* $f\colon S \to \mathbb{R}^m$ *neprekidno u točki* $P_0 \in S \subseteq \mathbb{R}^n$*. Tada je* f *ograničeno na nekoj okolini točke* P_0*, tj. postoje brojevi* $r > 0$ *i* $M > 0$ *takvi da za svaku točku* $P \in S$ *za koju je* $d(P, P_0) < r$*, vrijedi* $\|f(P)\| < M$*.*

Dokaz: Kako je f neprekidno u P_0, za $\varepsilon = 1$ postoji $r > 0$ takav da za $P \in S$ za koje je $d(P, P_0) < r$, vrijedi $\|f(P) - f(P_0)\| < 1$. Stavimo li $M := 1 + \|f(P_0)\|$ dobivamo

$$\|f(P)\| \leq \|f(P) - f(P_0)\| + \|f(P_0)\| < M\,. \qquad \blacksquare$$

(*iii*) Prema lemi možemo odabrati $r > 0$ i $M > 0$ takve da za $P \in S$ za koje je $d(P, P_0) < r$, vrijedi $\|f(P)\| < M$ i $\|g(P)\| < M$. Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog neprekidnosti od f i g u P_0 postoji $\delta > 0$ takav da za $P \in S$ za koje je $d(P, P_0) < \delta$, vrijedi $|f(P) - f(P_0)| < \frac{\varepsilon}{2M}$ i $|g(P) - g(P_0)| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Možemo također pretpostaviti da je $\delta \leq r$. Stoga je

$$\begin{aligned}
|(f \cdot g)(P) - (f \cdot g)(P_0)| &= |f(P) \cdot g(P) - f(P_0) \cdot g(P_0)| = \\
&= |f(P)[g(P) - g(P_0)] + [f(P) - f(P_0)]g(P_0)| \leq \\
&\leq |f(P)| \cdot |g(P) - g(P_0)| + |f(P) - f(P_0)| \cdot |g(P_0)| < \\
&< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M = \varepsilon
\end{aligned}$$

pa je $f \cdot g$ neprekidno u P_0.

Za dokaz tvrdnje (*iv*) također trebamo jednu lemu.

Lema 2.9 *Neka je* $f\colon S \to \mathbb{R}$ *funkcija neprekidna u* $P_0 \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ *i neka je* $f(P_0) \neq 0$*. Tada postoji* $\delta > 0$ *takav da za sve* $P \in S$ *za koje je* $d(P, P_0) < \delta$*, vrijedi* $f(P) > \frac{1}{2}f(P_0)$ *u slučaju da je* $f(P_0) > 0$*, odnosno* $f(P) < \frac{1}{2}f(P_0)$ *u slučaju da je* $f(P_0) < 0$ *.*

Dokaz: Neka je najprije $f(P_0) > 0$. Tada zbog neprekidnosti od f u P_0, za $\varepsilon = \frac{1}{2}f(P_0) > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za $P \in S$ za koje je $d(P, P_0) < \delta$ vrijedi $|f(P) - f(P_0)| < \frac{1}{2}f(P_0)$. Stoga je $f(P) > \frac{1}{2}f(P_0)$.

U slučaju $f(P_0) < 0$ dokaz je analogan uz $\varepsilon = -\frac{1}{2}f(P_0)$. $\blacksquare$

(*iv*) Zbog (*iii*) dovoljno je dokazati da je funkcija $\dfrac{1}{g}$ neprekidna u P_0. Da je ona definirana na nekoj okolini (u S) točke P_0 slijedi iz prethodne leme.

Zbog neprekidnosti funkcije g u točki P_0, postoji $\delta > 0$ takav da za točke $P \in S$ za koje je $d(P, P_0) < \delta$ vrijedi $|g(P) - g(P_0)| < \frac{1}{2}|g(P_0)|^2\varepsilon$. Također, prema lemi možemo δ odabrati tako da je i $|g(P)| > \frac{1}{2}|g(P_0)|$. Tada je

$$\left|\frac{1}{g(P)} - \frac{1}{g(P_0)}\right| = \frac{|g(P) - g(P_0)|}{|g(P)| \cdot |g(P_0)|} < \frac{\frac{1}{2}|g(P_0)|^2\varepsilon}{\frac{1}{2}|g(P_0)| \cdot |g(P_0)|} = \varepsilon\,,$$

pa je funkcija $\frac{1}{g}$ neprekidna u točki P_0.

(v) Slijedi iz neprekidnosti norme i neprekidnosti kompozicije neprekidnih preslikavanja.

(vi) Slijedi iz (i), (ii), (v), i jednakosti

$$\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$
$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$

Time je dokaz Propozicije 2.7 završen. ■

Kao posljedice Propozicije 2.7 i Teorema o kompoziciji neprekidnih funkcija, dobivamo sljedeće činjenice:

Korolar 2.10

(i) *Zbrajanje i množenje realnih brojeva su neprekidne funkcije* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) *Polinomi (jedne ili više varijabli) su neprekidne funkcije.*

(iii) *Racionalne funkcije su neprekidne (naravno tamo gdje pitanje neprekidnosti ima smisla, tj. u točkama u kojima je funkcija definirana, a to su u ovom slučaju sve točke osim nultočaka nazivnika).*

(iv) *Neprekidne funkcije* $S \to \mathbb{R}^m$ *tvore (realni) vektorski prostor.* ■

U analizi se često primjenjuje i sljedeći teorem:

Teorem 2.11 *Neka su* X *i* Y *metrički prostori, a* $f, g\colon X \to Y$ *dva neprekidna preslikavanja. Tada je skup* $\{P \in X : f(P) = g(P)\}$ *zatvoren podskup od* X.

Dokaz: Označimo sa S skup točaka u kojima se f i g podudaraju. Treba pokazati da je skup $X \setminus S$ otvoren. Neka je $P_0 \in X \setminus S$ proizvoljna točka. Tada je

$f(P_0) \neq g(P_0)$, pa je broj $\varepsilon := \frac{1}{2}d(f(P_0), g(P_0))$ pozitivan. Zbog neprekidnosti preslikavanja f i g, postoje $\delta_f, \delta_g > 0$ takvi da je $f(K(P_0, \delta_f)) \subseteq K(f(P_0), \varepsilon)$ i $g(K(P_0, \delta_g)) \subseteq K(g(P_0), \varepsilon)$. To pokazuje da za svaku točku $P \in K(P_0, \delta)$, gdje je $\delta := \min\{\delta_f, \delta_g\}$, vrijedi $f(P) \neq g(P)$, pa je $K(P_0, \delta) \subseteq X \setminus S$, tj. skup $X \setminus S$ je otvoren. ■

Korolar 2.12 (Jedinstvenost neprekidnog proširenja na zatvarač) *Neka su X i Y metrički prostori, a $f, g\colon X \to Y$ dva neprekidna preslikavanja, te neka je $f\big|_A = g\big|_A$ za neki podskup $A \subseteq X$. Tada je i $f\big|_{\overline{A}} = g\big|_{\overline{A}}$.* ■

Tipična primjena ovog korolara je sljedeći korolar:

Korolar 2.13 *Neka su $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dvije neprekidne funkcije. Ako je $f\big|_{\mathbb{Q}} = g\big|_{\mathbb{Q}}$ onda je $f = g$.* ■

Neprekidna preslikavanja imaju i mnoga druga dobra svojstva. Jedno od njih je i da čuvaju povezanost. No najprije dokažimo jednu karakterizaciju povezanosti.

Teorem 2.14 *Topološki prostor X je nepovezan ako i samo ako postoji neprekidna surjekcija $f\colon X \to \{0,1\}$.*

Drugim riječima, X je povezan ako i samo ako ne postoji neprekidna surjekcija na dvočlani skup $\{0,1\} \subseteq \mathbb{R}$.

Dokaz: Neka prostor X nije povezan i neka je $X = A \cup B$, gdje su A i B disjunktni zatvoreni neprazni podskupovi od X. Tada je funkcija $f\colon X \to \{0,1\}$ definirana s

$$f(P) = \begin{cases} 0 & , P \in A \\ 1 & , P \in B \end{cases}$$

neprekidna surjekcija.

Obratno, ako je $f\colon X \to \{0,1\}$ neprekidna surjekcija, onda su skupovi $A := f^{\leftarrow}(0)$ i $B := f^{\leftarrow}(1)$ neprazni zatvoreni disjunktni podskupovi od X i vrijedi $X = A \cup B$. Stoga X nije povezan. ■

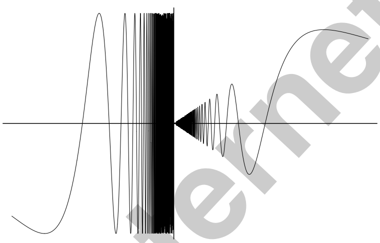
Korolar 2.15 *Svaki putovima povezan prostor je i povezan.*

Dokaz: Neka je prostor X putovima povezan, i pretpostavimo da nije povezan. Tada postoji neprekidna surjekcija $f\colon X \twoheadrightarrow \{0,1\}$. Odaberimo točke $P_0 \in f^{\leftarrow}(0)$ i $P_1 \in f^{\leftarrow}(1)$. Kako je X putovima povezan, postoji put $\gamma\colon [0,1] \to X$ takav da je $\gamma(0) = P_0$ i $\gamma(1) = P_1$. Tada je kompozicija $f \circ \gamma\colon [0,1] \to \{0,1\}$ surjekcija, što je u suprotnosti s povezanošću segmenta, Teorem 1.6. ■

Teorem 2.16 *Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Ako je prostor X povezan, onda je i slika $f(X) \subseteq Y$ povezan skup.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $f(X)$ nepovezan. Tada bi, prema Teoremu 2.14, postojala neprekidna surjekcija $g\colon f(X) \twoheadrightarrow \{0,1\}$ pa bi i kompozicija $g \circ f\colon X \twoheadrightarrow \{0,1\}$ bila neprekidna surjekcija, a to bi opet po Teoremu 2.14 značilo da X nije povezan. ■

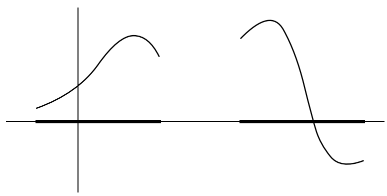
Napomena 2.2 Neka su X i Y proizvoljni skupovi. ***Graf funkcije*** $f\colon X \to Y$ definira se kao podskup $\Gamma_f := \big\{(x, f(x)) : x \in X\big\} \subseteq X \times Y$. Graf Γ_φ neprekidne realne funkcije $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definirane na segmentu $[a,b]$, povezan je skup, jer na Γ_φ možemo gledati kao na sliku funkcije $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ definirane s $f(t) := \big(t, \varphi(t)\big)$. Međutim općenito, čak niti za realne funkcije realne varijable, nije povezanost grafa niti nužna niti dovoljna za neprekidnost.



Funkcija

$$f(x) := \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & ,\ x < 0 \\ 0 & ,\ x = 0 \\ x \sin\frac{1}{x} & ,\ x > 0 \end{cases}$$

nije neprekidna u 0 iako je njen graf povezan



Primjer grafa neprekidne funkcije koji nije povezan

Dokažimo sada nekoliko posljedica Teorema 2.16

Korolar 2.17

(a) *Neka je X povezan, $f\colon X \to \mathbb{R}$ omeđena neprekidna funkcija, i neka je $m := \inf f(X)$, $M := \sup f(X)$. Tada za svaki $t \in \langle m, M\rangle$ postoji točka $x \in X$ takva da je $f(x) = t$.*

(b) *Neka je $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i neka su $c, d \in \varphi([a,b])$. Tada je $[c,d] \subseteq \varphi([a,b])$, tj. za svaki broj $s \in [c,d]$ postoji $t \in [a,b]$ takav da je $\varphi(t) = s$.*

Neprekidna realna funkcija dakle, poprima sve međuvrijednosti.

Dokaz: (a) Pretpostavimo da postoji $s \in \langle m, M\rangle$ takav da $s \notin f(X)$. Tada su $U := f^{\leftarrow}(\langle -\infty, s\rangle)$ i $V := f^{\leftarrow}(\langle s, \infty\rangle)$ disjunktni, neprazni otvoreni podskupovi od X takvi da je $X = U \cup V$, što se protivi povezanosti od X.

(b) Kao i u dokazu tvrdnje (a), pretpostavimo da postoji $s \in \langle c, d\rangle$ takav da $s \notin \varphi([a,b])$. Tada su $U := \varphi^{\leftarrow}(\langle -\infty, s\rangle)$ i $V := \varphi^{\leftarrow}(\langle s, \infty\rangle)$ disjunktni neprazni otvoreni podskupovi od $[a,b]$ takvi da je $U \cup V = [a,b]$, što je kontradikcija s povezanošću segmenta $[a,b]$. ■

Korolar 2.18 *Neka je $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da su $\varphi(a)$ i $\varphi(b)$ brojevi različiti od nule i suprotnog predznaka. Tada postoji $t \in [a,b]$ takav da je $\varphi(t) = 0$.* ■

Korolar 2.19 (Lema o kontrakciji) *Neka je $\varphi\colon [a,b] \to [a,b]$ funkcija za koju postoji $q \in [0,1\rangle$, tj. $0 \le q < 1$, takav da je*

$$|\varphi(t) - \varphi(t')| \le q|t - t'|\ , \quad t, t' \in [a,b]\ .$$

Tada postoji jedinstvena točka $t^* \in [a,b]$ takva da je $\varphi(t^*) = t^*$.

Dokaz: Jedinstvenost: Pretpostavimo da je i $t_1^* \in [a,b]$ točka za koju vrijedi $\varphi(t_1^*) = t_1^*$. Ako je $t_1^* \neq t^*$, onda je

$$|t_1^* - t^*| = |\varphi(t_1^*) - \varphi(t^*)| \le q\,|t_1^* - t^*| < |t_1^* - t^*|$$

što je kontradikcija, pa mora biti $t_1^* = t^*$.

Egzistencija: Ako je $\varphi(a) = a$ onda je dokaz gotov. Isto tako ako je $\varphi(b) = b$. Neka je, dakle, $\varphi(a) \neq a$ i $\varphi(b) \neq b$. Zbog $\varphi([a,b]) \subseteq [a,b]$ mora biti $\varphi(a) > a$ i $\varphi(b) < b$. Primijetimo da je funkcija φ neprekidna (u dokazu neprekidnosti možemo uzeti $\delta = \varepsilon$). Stoga je neprekidna i funkcija $\psi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definirana sa $\psi(t) := t - \varphi(t)$. Kako je $\psi(a) < 0$ i $\psi(b) > 0$, po prethodnom Korolaru 2.18, postoji $t^* \in [a,b]$ takav da je $\psi(t^*) = 0$, tj. $\varphi(t^*) = t^*$. ∎

Za funkciju φ za koju postoji $q < 1$ kao u Korolaru 2.19 kažemo da je ***kontrakcija***, a za točku t^* takvu da je $\varphi(t^*) = t^*$ kažemo da je ***fiksna točka*** preslikavanja φ. Lema o kontrakciji, dakle, govori da svaka kontrakcija segmenta ima točno jednu fiksnu točku.

Primijetimo da smo za egzistenciju fiksne točke koristili samo neprekidnost funkcije φ, dok je jače svojstvo da je φ kontrakcija, bilo potrebno za jedinstvenost.

U nekim razmatranjima sâma neprekidnost preslikavanja nije dovoljna, već je potrebno nešto jače svojstvo.

Definicija 2.2 Neka su X i Y metrički prostori. Kažemo da je preslikavanje $f\colon X \to Y$ ***uniformno neprekidno*** ili ***jednoliko neprekidno*** ako za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ takav da za svake dvije točke $P, P' \in S$ za koje je $d(P,P') < \delta$, vrijedi $d(f(P), f(P')) < \varepsilon$.

Očito je da je uniformno neprekidno preslikavanje neprekidno. Obratno međutim, ne vrijedi. Jednostavni primjeri neprekidnih, ali ne i uniformno neprekidnih funkcija su, naprimjer, funkcija $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) = \dfrac{1}{x}$, ili funkcija $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dâna s $g(x) = x^2$.

Jednu korisnu klasu funkcija, koje su i uniformno neprekidne, čine funkcije koje imaju tzv. Lipschitzovo svojstvo.

Definicija 2.3 Neka su X i Y metrički prostori. Za preslikavanje $f\colon X \to Y$ kažemo da ima ***Lipschitzovo***[1] ***svojstvo*** ako postoji broj $\lambda \geq 0$ takav da za svake dvije točke $P, P' \in X$ vrijedi $d(f(P), f(P')) \leq \lambda \cdot d(P,P')$.

Teorem 2.20 *Ako preslikavanje $f\colon X \to Y$ metričkih prostora ima Lipschitzovo svojstvo, onda je ono uniformno neprekidno.*

Dokaz: Neka je $\lambda \geq 0$ takav da je $d(f(P), f(P')) \leq \lambda d(P,P')$, $P, P' \in X$. Ako je $\lambda = 0$, onda f mora biti konstantno preslikavanje, koje je uniformno neprekidno. Neka je $\lambda > 0$, i neka je $\varepsilon > 0$. Za $\delta := \frac{\varepsilon}{\lambda}$ vrijedi: ako je $d(P,P') < \delta$ onda je $d(f(P), f(P')) \leq \lambda \cdot d(P,P') < \lambda \cdot \delta = \varepsilon$, pa je f uniformno neprekidno. ∎

[1] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832–1903), njemački matematičar

Primjeri preslikavanja s Lipschitzovim svojstvom su koordinatne projekcije $p_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. I ostali linearni operatori među konačnodimenzionalnim prostorima su takvi. Vrijedi naime:

Teorem 2.21 *Svaki linearni operator $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je* ***ograničen****, tj. postoji broj $\mu \geq 0$ takav da je $\|A(P)\| \leq \mu \cdot \|P\|$ za svaki $P \in \mathbb{R}^n$.*

Dokaz: Neka je $(e_1, \ldots, e_n)$ standardna baza u $\mathbb{R}^n$ i definirajmo broj $\mu := n \cdot \max\{\|A(e_i)\| : i = 1, \ldots, n\}$. Tada je

$$\|A(P)\| = \|A(x_1, \ldots, x_n)\| = \|A(\sum_{i=1}^n x_i e_i)\| = \|\sum_{i=1}^n x_i A(e_i)\| \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|A(e_i)\| \leq \sum_{i=1}^n \|P\| \cdot \frac{\mu}{n} = \mu \|P\| . \qquad \blacksquare$$

Napomenimo da je, ovisno o normi koju koristimo, moguće naći i bolje ocjene za konstantu μ nego u našem dokazu.

Primjer 2.3 Za dokaz ograničenosti linearnog operatora u prethodnom teoremu, bitna je bila konačna dimenzionalnost prostora $\mathbb{R}^n$. Općenito, nije svaki linearni operator ograničen, a pokazuje se da to onda znači i da nije neprekidan. Naprimjer, deriviranje $\frac{d}{dt}\colon BC^\infty(\mathbb{R}) \to BC^\infty(\mathbb{R})$, gdje je $BC^\infty(\mathbb{R})$ prostor omeđenih realnih funkcija na $\mathbb{R}$ koje su beskonačno puta derivabilne i čije su sve derivacije omeđene funkcije, uz tzv. sup-normu, vidi str. 87 i Napomenu 4.2, nije ograničen. Zaista, za $\mu > 0$, neka je $f_\mu\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $f_\mu(t) := \sin 2\mu t$. Tada je $\|f_\mu\| = 1$, a $\|\frac{d}{dt}(f_\mu)\| = 2\mu$, što nije manje od $\mu\|f_\mu\|$.

Uočimo još i to da svojstvo ograničenosti linearnog operatora iz Teorema 2.21 ne znači da je operator $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ograničen kao funkcija, tj. da je slika $A(\mathbb{R}^n)$ ograničen skup. Slika linearnog operatora A je vektorski potprostor prostora $\mathbb{R}^m$ i to je ograničen skup jedino kada je A nul-operator.

Korolar 2.22 *Svaki linearni operator $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ima Lipschitzovo svojstvo, pa je, prema Teoremu* 2.20*, uniformno neprekidan.*

Dokaz: Neka je $\mu \geq 0$ takav da je $\|A(P)\| \leq \mu\|P\|$, $\forall P \in \mathbb{R}^n$. Tada za svake dvije točke $P, P' \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$d(A(P), A(P')) = \|A(P) - A(P')\| = \|A(P - P')\| \leq \mu\|P - P'\| = \mu d(P, P'). \qquad \blacksquare$$

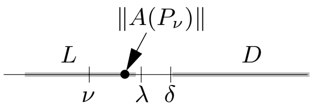
Sada ćemo definirati normu na vektorskom prostoru $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ svih linearnih operatora s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$. U tu svrhu dokažimo najprije sljedeću lemu:

Lema 2.23 *Za svaki linearni operator $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vrijedi*

$$\sup\big\{\|A(P)\| : \|P\| = 1\big\} = \inf\big\{\mu : \|A(P)\| \le \mu\|P\|,\ P \in \mathbb{R}^n\big\}.$$

Dokaz: Neka je

$\lambda := \sup L$ gdje je $L := \{\|A(P)\| : \|P\| = 1\}$
$\delta := \inf D$ gdje je $D := \{\mu : \|A(P)\| \le \mu\|P\|,\ P \in \mathbb{R}^n\}$



Pokažimo najprije da je $\lambda \le \delta$. Po definiciji supremuma, za svaki $\nu < \lambda$ postoji točka P_ν, $\|P_\nu\| = 1$, takva da je $\|A(P_\nu)\| > \nu = \nu\|P_\nu\|$. Stoga je $\nu \notin D$. Kako $D \supseteq \langle\delta, +\infty\rangle$, zaključujemo da je $\nu \le \delta$ pa je i $\lambda = \sup\{\nu : \nu < \lambda\} \le \delta$.

Pokažimo da je i $\delta \le \lambda$. Ako je $\delta = 0$ onda je zbog $0 \le \lambda \le \delta$, i $\lambda = 0 = \delta$. Neka je $\delta > 0$. Ako je $0 \le \nu < \delta$ onda $\nu \notin D$ pa postoji $P_\nu \in \mathbb{R}^n$ takav da je $\|A(P_\nu)\| > \nu\|P_\nu\| \ge 0$, pa je $P_\nu \ne 0$. Zbog toga je

$$\nu < \frac{\|A(P_\nu)\|}{\|P_\nu\|} = \Big\|A\Big(\frac{P_\nu}{\|P_\nu\|}\Big)\Big\| \le \lambda = \sup L,$$

jer je $\Big\|\dfrac{P_\nu}{\|P_\nu\|}\Big\| = 1$. Stoga je $\delta = \sup\{\nu : \nu < \delta\} \le \lambda$. ■

Definicija 2.4 Za linearni operator $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiramo

$$\begin{aligned}\|A\| &:= \inf\{\mu : \|A(P)\| \le \mu\|P\|\ ,\ P \in \mathbb{R}^n\}\\ &= \sup\{\|A(P)\| :\ \|P\| = 1\}\ .\end{aligned}$$

Teorem 2.24

(*i*) *Za svaki linearni operator $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vrijedi*

$$\|A(P)\| \le \|A\|\|P\|\ ,\ P \in \mathbb{R}^n\,.$$

(*ii*) *Funkcija* $\|\ \|\colon \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ *iz prethodne definicije, je norma na vektorskom prostoru* $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

(iii) Za linearne operatore $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $B \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ *vrijedi*

$$\|B \circ A\| \leq \|B\|\|A\| \quad .$$

Dokaz: (i) Slijedi neposredno iz definicije operatorske norme i definicije infimuma.

(ii) Očito za svaki $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ vrijedi $\|A\| \geq 0$ i $\|0\| = 0$. Ako je $\|A\| = 0$, onda je prema (i) $\|A(P)\| \leq 0$ za sve $P \in \mathbb{R}^n$ pa je $A = 0$.

Za $\alpha \in \mathbb{R}$ je

$$\begin{aligned} \|\alpha A\| &= \sup\{\|\alpha A(P)\| : \|P\| = 1\} = \\ &= \sup\{|\alpha|\|A(P)\| : \|P\| = 1\} = \\ &= |\alpha| \sup\{\|A(P)\| : \|P\| = 1\} = |\alpha|\|A\|. \end{aligned}$$

Konačno, za $A_1, A_2 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ je

$$\begin{aligned} \|A_1 + A_2\| &= \sup\{\|A_1(P) + A_2(P)\| : \|P\| = 1\} \leq \\ &\leq \sup\{\|A_1(P)\| + \|A_2(P)\| : \|P\| = 1\} \leq \\ &\leq \sup\{\|A_1(P)\| : \|P\| = 1\} + \sup\{\|A_2(P)\| : \|P\| = 1\} = \\ &= \|A_1\| + \|A_2\|. \end{aligned}$$

(iii) Za svaki $P \in \mathbb{R}^n$ je prema (i)

$$\|B(A(P))\| \leq \|B\|\|A(P)\| \leq \|B\|\|A\|\|P\|$$

pa je

$$\|B \circ A\| = \inf\left\{\mu : \|B(A(P))\| \leq \mu\|P\|\right\} \leq \|B\|\|A\| \,. \qquad \blacksquare$$

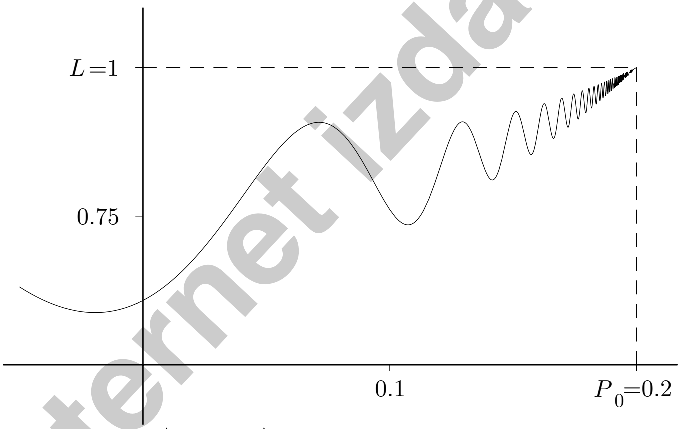
Napomena 2.3 Operatorska norma o kojoj govori prethodni teorem, različita je od euklidske norme dobivene identifikacijom prostora $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ i $\mathbb{R}^{nm}$. Naprimjer, operatorska norma identitete $id \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jednaka je 1, dok je njena euklidska norma jednaka $\sqrt{n}$.

§ 3 Limes funkcije

Neprekidnost preslikavanja f u točki P_0 govori o ponašanju tog preslikavanja u i oko točke P_0. Ponekad to ipak ne daje pravu sliku o preslikavanju f. Ukoliko je naprimjer P_0 izolirana točka domene preslikavanja f, onda je f uvijek neprekidno u P_0. Stoga podatak o neprekidnosti u izoliranoj točki zapravo ne govori ništa o sâmom preslikavanju. S druge strane, ako P_0 nije izolirana točka domene, promjena vrijednosti preslikavanja f samo u jednoj točki, točki P_0, od neprekidnog će preslikavanja napraviti prekidno, iako je u 'većini' točaka funkcija ostala nepromijenjena. Osim toga, nekada nas interesira i ponašanje funkcije u okolini točke u kojoj ona nije definirana. U ovakvim je situacijama koristan pojam limesa preslikavanja.

Definicija 3.1 Neka su X, Y metrički prostori, a $S \subseteq X$ podskup. Za preslikavanje $f\colon S \to Y$ kažemo da ***ima limes*** u gomilištu $P_0 \in X$ skupa S, tj. $P_0 \in S^d$, ukoliko postoji $L \in Y$ takav da za svaku okolinu $V \subseteq Y$ točke L postoji okolina $U \subseteq X$ točke P_0 takva da je $f(U \cap (S \setminus \{P_0\})) \subseteq V$.

U tom slučaju L zovemo ***limesom*** ili ***graničnom vrijednosti*** preslikavanja f u točki P_0 i pišemo $L = \lim\limits_{P_0} f$. Koriste se i oznake $\lim\limits_{P \to P_0} f$, $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$, a govori se i da '$f$ teži ka L kada P teži prema P_0', i piše '$f(P) \to L$ za $P \to P_0$'.



Funkcija $f : \langle -\infty, 0.2\rangle \to \mathbb{R}$ definirana sa
$f(x) := \Big((x-0.2)\sin\frac{1}{x-0.2} + x + 0.8\Big)\big(10(x-0.1)^2 + 0.9\big)$
ima u točki $P_0 = 0.2$ limes jednak $L = 1$

Koristeći metrike prostora X i Y, vidimo da će L biti limes preslikavanja $f\colon S \to Y$ u točki $P_0 \in S^d$, ukoliko za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ takav da za sve točke $P \in S$, za koje je $0 < d(P, P_0) < \delta$ vrijedi $d(f(P), L) < \varepsilon$.

Oznaka $L = \lim\limits_{P_0} f$ opravdana je sljedećom činjenicom:

Teorem 3.1 (O jedinstvenosti limesa funkcije) *Neka su X i Y metrički prostori, $S \subseteq X$ podskup. Ukoliko preslikavanje $f\colon S \to Y$ ima limes u točki $P_0 \in S^d$ onda je taj limes jedinstven.*

Dokaz: Pretpostavimo da dvije različite točke $L_1, L_2 \in Y$ imaju svojstvo iz definicije limesa i neka su $V_1, V_2 \subseteq Y$ disjunktne okoline tih točaka, tj. $L_1 \in V_1$, $L_2 \in V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (možemo uzeti $V_i = K(L_i, \frac{1}{2}d(L_1, L_2))$, $i = 1, 2$). Prema definiciji limesa, postoje okoline $U_1, U_2 \subseteq X$ točke P_0 takve da je $f(U_i \cap (S \setminus \{P_0\})) \subseteq V_i$, $i = 1, 2$. No tada bi za okolinu $U = U_1 \cap U_2$ točke P_0 vrijedilo $f(U \cap (S \setminus \{P_0\})) \subseteq V_1 \cap V_2 = \emptyset$, čime smo dobili kontradikciju. ∎

Napomena 3.1 Sâma definicija limesa preslikavanja ima smisla i za preslikavanja među proizvoljnim topološkim prostorima. Međutim, bez nekih dodatnih zahtjeva na prostor Y, kao što je naprimjer postojanje metrike ili zahtjeva da svake dvije različite točke imaju međusobno disjunktne okoline, limes ne mora biti jedinstven.

Uočimo da u definiciji limesa nigdje ne sudjeluje vrijednost $f(P_0)$ čak ni u slučaju da postoji, tj. da je $P_0 \in S$. Odlučujuće su jedino vrijednosti funkcije u susjednim točkama.

Neposredno iz definicije slijedi sljedeća činjenica:

Korolar 3.2 (O limesu restrikcije) *Neka su X i Y metrički prostori, $S \subseteq X$ podskup i $f\colon S \to Y$ preslikavanje, te neka je $T \subseteq S$. Ako f ima limes u točki $P_0 \in T^d$ (dakle, u gomilištu skupa T), onda i restrikcija $f\big|_T\colon T \to Y$ ima limes u P_0 i ta su dva limesa jednaka, tj. $\lim\limits_{P_0} f\big|_T = \lim\limits_{P_0} f$.*

Dokaz: Za dokaz treba jedino primijetiti da je prema Propoziciji 1.4(i), $T^d \subseteq S^d$, pa tvrdnja slijedi neposredno iz definicije limesa. ∎

Za limes restrikcije $\lim\limits_{P_0} f\big|_T$ koristi se i oznaka $\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P \in T}} f$. Specijalno, za funkcije realne varijable, umjesto $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f$, uobičajena je oznaka $\lim\limits_{x \to x_0 - 0}$ ili $\lim\limits_{x \to x_0 -}$. Analogno se piše $\lim\limits_{x \to x_0 + 0}$ ili $\lim\limits_{x \to x_0 +}$ umjesto $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f$.

Napomena 3.2 Kao i neprekidnost, tako je i pojam limesa lokalnog karaktera. Naime, ukoliko su $f, g\colon S \to Y$ dva preslikavanja koja se podudaraju na nekoj okolini točke $P_0 \in S^d$, onda ako funkcija f ima u P_0 limes — ima ga i funkcija g, i oba su limesa jednaka.

Primjeri 3.1

(*i*) Realna funkcija realne varijable $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ ima limes u točki $x_0 = 1$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$, iako u točki x_0 funkcija f nije definirana.

(*ii*) Funkcija

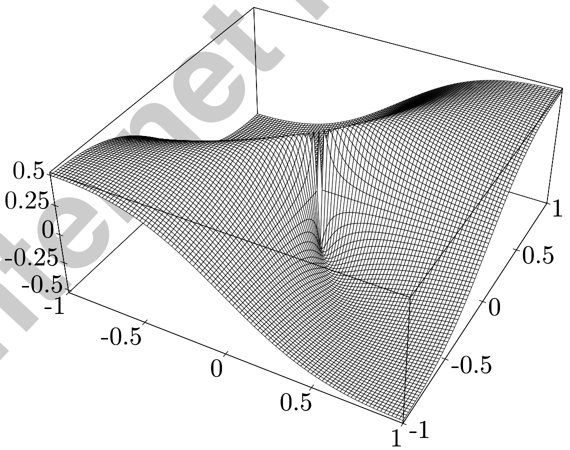
$$g(x) = \begin{cases} x+1 & , \ x \neq 1 \\ 0 & , \ x = 1 \end{cases}$$

ima limes u točki $x_0 = 1$, $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$, iako je vrijednost $g(1) = 0$.

(*iii*) Funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

nema limes u točki $0 = (0,0)$, iako restrikcije na koordinatne osi imaju limes u 0 i oba su jednaki 0.



Graf funkcije $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Zaista, kada bi funkcija f imala limes u 0, onda bi i restrikcija od f na proizvoljan pravac kroz 0 imala limes u 0 i svi bi limesi takvih restrikcija bili međusobno jednaki, dakle jednaki 0. Međutim, iako sve te restrikcije imaju limese, oni se međusobno razlikuju. Tako je naprimjer za restrikciju na pravac s jednadžbom $y = x$, taj limes jednak $\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{(x,x)\to 0} f(x,x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2+x^2} = \dfrac{1}{2}$. Dakle, funkcija f nema limes u $0 = (0,0)$.

(iv) Funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

nema limes u $0 = (0,0)$ iako restrikcije na sve pravce kroz ishodište 0 imaju limese i svi su međusobno jednaki i imaju vrijednost $f(0,0) = 0$.

Zaista, za restrikcije na 'kose' pravce, tj. na pravce s jednadžbom $y = ax$, $a \neq 0$, imamo

$$\lim_{x\to 0} f(x,ax) = \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{(ax-x^2)^2+x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{a^2-2ax+x^2+x^6} = 0 \,.$$

Za restrikciju na os x, tj. na pravac s jednadžbom $y = 0$, imamo

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x^4+x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+x^3} = 0 \quad ,$$

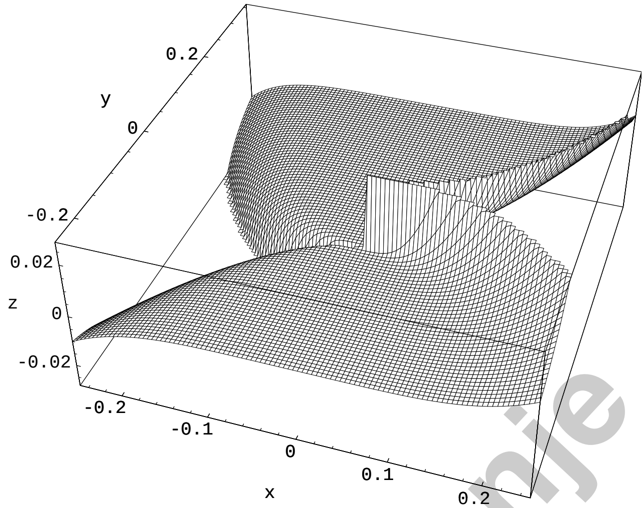
dok za restrikciju na os y, tj. na pravac s jednadžbom $x = 0$, imamo

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0 \,.$$

Kada bi funkcija f imala limes u 0, onda bi taj isti limes u 0 imala i restrikcija od f na svaki podskup od $\mathbb{R}^2$ kojem je 0 gomilište. Međutim, ako pogledamo restrikciju od f na graf funkcije $y = x^2$, tj. na standardnu parabolu, nalazimo da je za $x \neq 0$, $f(x,x^2) = \dfrac{x^5}{x^8} = \dfrac{1}{x^3}$, a ta funkcija nema limes u 0. Stoga niti naša funkcija f nema limes u $0 = (0,0)$.

Promotrimo sada vezu neprekidnosti i limesa preslikavanja.

Teorem 3.3 *Neka su X i Y metrički prostori, $S \subseteq X$ podskup i P_0 točka skupa S koja je ujedno i njegovo gomilište, $P_0 \in S \cap S^d$. Preslikavanje $f\colon S \to Y$ je neprekidno u točki P_0, ako i samo ako f ima u P_0 limes i on je jednak $f(P_0)$.*



Graf funkcije $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Ako je f neprekidno u P_0 onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve točke $P \in S$ za koje je $d(P, P_0) < \delta$ vrijedi $d(f(P), f(P_0)) < \varepsilon$, što prema definiciji limesa znači da limes $\lim\limits_{P_0} f$ postoji i jednak je $f(P_0)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Obratno, ukoliko postoji limes funkcije f u točki P_0 i jednak je $f(P_0)$, onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve točke $P \in S$ za koje je $0 < d(P, P_0) < \delta$ vrijedi $d(f(P), f(P_0)) < \varepsilon$. Kako je i $d(f(P_0), f(P_0)) = 0 < \varepsilon$, to je $f(K(P_0, \delta)) \subseteq K(f(P_0, \varepsilon))$, što znači da je preslikavanje f neprekidno u točki P_0. ■

Drugim riječima, za neprekidno preslikavanje je

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0) = f(\lim_{P \to P_0} P)$$

pa se kaže da 'neprekidno preslikavanje komutira s limesom'.

Korolar 3.4 *Neka su X, Y metrički prostori, $S \subseteq X$, i $P_0 \in S^d$ gomilište skupa S. Preslikavanje $f \colon S \to Y$ ima u točki P_0 limes L, ako i samo ako* *je preslikavanje* $\tilde{f}\colon S\cup\{P_0\}\to Y$, *definirano s* $\tilde{f}(P) := \begin{cases} f(P)\,, & P\neq P_0 \\ L\,, & P = P_0 \end{cases}$, *neprekidno u* P_0. ■

Kao posljedice Teorema 2.6 i Propozicije 2.7 dobivamo i sljedeće činjenice:

Korolar 3.5 *Neka je* $S\subseteq\mathbb{R}^n$ *i* $P_0\in S^d$ *gomilište skupa* S. *Preslikavanje* $f=(f_1,\dots,f_m)\colon S\to\mathbb{R}^m$ *ima u točki* P_0 *limes* $L=(l_1,\dots,l_m)\in\mathbb{R}^m$ *ako i samo ako funkcije* $f_i\colon S\to\mathbb{R}$ *imaju u* P_0 *limes* l_i , $i=1,\dots,m$. ■

Dakle, i u pitanjima limesa vektorskih funkcija dovoljno je promatrati realne funkcije.

Korolar 3.6 *Neka su* $f,g\colon S\to\mathbb{R}$, $S\subseteq\mathbb{R}^n$, *funkcije,* $\lambda\in\mathbb{R}$ *realan broj i* $P_0\in S^d$ *gomilište skupa* S. *Ako funkcije* f *i* g *imaju u* P_0 *limese tada i funkcije* $f+g$, λf, $f\cdot g$, $|f|$, $\min\{f,g\}$, $\max\{f,g\}$ *imaju limese u* P_0 *i vrijedi*

$$\lim_{P_0}(f+g)=\lim_{P_0}f+\lim_{P_0}g$$

$$\lim_{P_0}(\lambda f)=\lambda\lim_{P_0}f$$

$$\lim_{P_0}(f\cdot g)=\lim_{P_0}f\cdot\lim_{P_0}g$$

$$\lim_{P_0}|f|=|\lim_{P_0}f|$$

$$\lim_{P_0}\min\{f,g\}=\min\{\lim_{P_0}f,\lim_{P_0}g\}\,,\quad \lim_{P_0}\max\{f,g\}=\max\{\lim_{P_0}f,\lim_{P_0}g\}$$

U slučaju da je $\lim\limits_{P_0}g\neq 0$ *tada i funkcija* $\frac{f}{g}$ *ima u* P_0 *limes i vrijedi*

$$\lim_{P_0}\frac{f}{g}=\frac{\lim\limits_{P_0}f}{\lim\limits_{P_0}g}.$$ ■

Napomena 3.3 Limes funkcije više varijabli, kakve smo razmatrali u ovom paragrafu, ponekad se naziva i ***višestruki limes***. To treba razlikovati od tzv. ***uzastopnih limesa***. Naprimjer, u slučaju funkcije dvije varijable, promatraju se uzastopni limesi $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ i $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$. U svakom od tih 'limesa' radi se zapravo o dva limesa funkcije jedne varijable, i općenito su ti 'limesi' međusobno različiti i razlikuju se od (dvostrukog) limesa $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$. Štoviše, čak niti egzistencija (i jednakost) dvaju od tih limesa ne garantira egzistenciju trećeg (vidi Zadatke 5, 6 i 7).

§ 4 Nizovi u $\mathbb{R}^n$

Niz u skupu X je svako preslikavanje $f\colon \mathbb{N} \to X$, gdje je $\mathbb{N}$ skup prirodnih brojeva. U slučaju kada je X skup realnih brojeva $\mathbb{R}$, govori se o ***nizu realnih brojeva***, kada je X neki skup funkcija, govori se o ***nizu funkcija***, itd. Ukoliko elemente skupa X označavamo s $P, P', P_1, \ldots$, onda je običaj ***vrijednosti niza*** f označavati s $P_k := f(k)$, $k \in \mathbb{N}$. S tim u vezi su i uobičajene oznake za niz: $(P_k)_k$, $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(P_k)_{k=1}^{\infty}$, (P_k), ili jednostavno P_k.

Ovakav način označavanja je uobičajen i praktičan, ali ima i nekih mâna. Jedna od njih je da, lažno, sugerira identifikaciju niza s njegovim ***skupom vrijednosti***, tj. skupom $\{P_k : k \in \mathbb{N}\}$, dakle slikom $f(\mathbb{N}) \subseteq X$.

Naprimjer, nizovi

$$x_k = \frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N} \quad i \quad y_k = \begin{cases} 1 & , k \text{ neparan} \\ \frac{2}{k} & , k \text{ paran} \end{cases}$$

su po svojim svojstvima bitno različiti nizovi realnih brojeva, iako im je skup vrijednosti isti.

Najvažnije svojstvo nizova je konvergencija. Međutim, o tome se može govoriti jedino kada je skup X snabdjeven topološkom strukturom, dakle kada se radi o nizovima u nekom topološkom prostoru. Da osiguramo jedinstvenost limesa, mi ćemo se zbog jednostavnosti, ograničiti na metričke prostore.

Definicija 4.1 Za niz $(P_k)_k$ u metričkom prostoru X kažemo da je ***konvergentan*** ili da ***konvergira*** ako postoji točka $P_0 \in X$ sa svojstvom da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodni broj $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $k \in \mathbb{N}$ takve da je $k \geq k_0$, vrijedi $d(P_k, P_0) < \varepsilon$. Dakle,

$$\exists P_0 \in X \ , \ \forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists k_0 \in \mathbb{N} \ , \ \forall k \geq k_0 \ , \ d(P_k, P_0) < \varepsilon \ .$$

Za točku P_0 kažemo da je ***limes*** ili ***granična vrijednost niza*** i pišemo $\lim\limits_k P_k = P_0$ ili $\lim\limits_{k\to\infty} P_k = P_0$. Govori se, također, da niz $(P_k)_k$ teži prema P_0 i piše se $(P_k)_k \to P_0$.

Kao i u slučaju limesa funkcija dokazuje se sljedeći teorem:

Teorem 4.1 (O jedinstvenosti limesa niza) *Ukoliko niz $(P_k)_k$ u metričkom prostoru X konvergira, onda je njegov limes jedinstven.* ■

Napomena 4.1 Limes niza može se interpretirati i kao specijalan slučaj limesa funkcije. Označimo s $\mathring{N} := \{1 - \frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $\overline{N} = \mathring{N} \cup \{1\}$. $\mathring{N}$ i $\overline{N}$ su (metrički) potprostori od $\mathbb{R}$, a točka 1 je (jedino) gomilište skupa $\mathring{N}$. Skup $\mathring{N}$ možemo identificirati sa skupom $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva uzlaznom bijekcijom $1 - \dfrac{1}{k} \mapsto k$, $k \in \mathbb{N}$. Stoga na nizove u metričkom prostoru X možemo gledati kao na preslikavanja sa skupa $\mathring{N}$ u X i vrijednosti niza $f \colon \mathring{N} \to X$ označavati s $P_k := f(1 - \dfrac{1}{k})$. Tada niz $(P_k)_k$ konvergira i ima limes P_0 ako i samo ako funkcija $f \colon \mathring{N} \to X$ ima limes (u smislu Definicije 3.1), i on je jednak P_0.

Pomoću konvergentnih nizova mogu se karakterizirati zatvoreni skupovi. Točnije, vrijedi:

Teorem 4.2 *Neka je X metrički prostor. Skup $S \subseteq X$ je zatvoren ako i samo ako svaki niz $(P_k)_k$ iz S koji konvergira u X, ima limes u S.*

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $S \subseteq X$ zatvoren, neka je $(P_k)_k$ konvergentan niz iz S te neka je $P_0 = \lim\limits_k P_k \in X$. Pretpostavimo da $P_0 \notin S$ tj. $P_0 \in X \setminus S$. Kako je S zatvoren to je skup $X \setminus S$ otvoren pa postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $K(P_0, \varepsilon) \subseteq X \setminus S$. Kako niz $(P_k)_k$ konvergira prema P_0, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za sve $k \geq k_0$, $P_k \in K(P_0, \varepsilon) \subseteq X \setminus S$, što se protivi činjenici da je $(P_k)_k$ niz iz S.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $S \subseteq X$ skup sa svojstvom da sadrži limese svih svojih konvergentnih nizova. Pretpostavimo da S nije zatvoren, tj. da skup $X \setminus S$ nije otvoren. Tada postoji točka $P_0 \in X \setminus S$ takva da niti za jedan $r > 0$ kugla $K(P_0, r)$ nije sadržana u skupu $X \setminus S$. To znači da je za svaki $r > 0$ skup $K(P_0, r) \cap S \neq \emptyset$. Specijalno za svaki broj $k \in \mathbb{N}$ postoji točka $P_k \in K(P_0, \frac{1}{k}) \cap S$. $(P_k)_k$ je očito niz u S koji konvergira točki $P_0 \notin S$, što je u suprotnosti s pretpostavljenim svojstvom skupa S. ■

Prethodni teorem pokazuje da su nizovi dovoljni da opišu topološku strukturu metričkih prostora. Naime, ako poznajemo sve konvergentne nizove u metričkom prostoru X, onda zatvorenima proglasimo sve one podskupove koji sadrže limese svih svojih konvergentnih nizova. Otvoreni skupovi su tada komplementi zatvorenih. Kod općenitih topoloških prostora stvar je složenija i tamo konvergentni nizovi nisu dovoljni da opišu topološku strukturu.

Kako je topološka struktura metričkih prostora određena konvergentnim nizovima, to je prirodno očekivati da se i neprekidnost preslikavanja metričkih prostora može karakterizirati pomoću konvergentnih nizova.

Teorem 4.3 (Heineova[1] karakterizacija neprekidnosti) *Neka su X i Y metrički prostori. Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je neprekidno u točki $P_0 \in X$ ako i samo ako za svaki niz $(P_k)_k$ u X koji konvergira prema P_0, niz $(f(P_k))_k$ u Y konvergira prema $f(P_0)$.*

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je f neprekidno u P_0, a $(P_k)_k$ niz u X koji konvergira prema P_0. Zbog neprekidnosti od f, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve točke $P \in X$ za koje je $d(P, P_0) < \delta$, vrijedi $d(f(P), f(P_0)) < \varepsilon$. Kako je $\lim_k P_k = P_0$, to za taj δ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $k \geq k_0$ vrijedi $d(P_k, P_0) < \delta$. Stoga je $d(f(P_k), f(P_0)) < \varepsilon$, što pokazuje da niz $(f(P_k))_k$ teži k $f(P_0)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $f\colon X \to Y$ preslikavanje koje 'čuva konvergenciju' u P_0, tj. $(f(P_k))_k \to f(P_0)$ u Y čim $(P_k)_k \to P_0$ u X. Tvrdimo da je f neprekidno u P_0. Pretpostavimo da nije. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ postoji točka $P_\delta \in X$ takva da je $d(P_\delta, P_0) < \delta$ i za koju je $d(f(P_\delta), f(P_0)) \geq \varepsilon$. Specijalno, za svaki $k \in \mathbb{N}$, postoji točka $P_k \in X$ takva da je $d(P_k, P_0) < \frac{1}{k}$ i da vrijedi $d(f(P_k), f(P_0)) \geq \varepsilon$. Očito je $\lim_k P_k = P_0$, ali niz $(f(P_k))_k$ ne konvergira točki $f(P_0)$. ■

Zbog činjenice iskazane prethodnim teoremom, govori se da 'neprekidno preslikavanje komutira s limesom niza'. Naime, ako je $\lim_k P_k = P_0$ i preslikavanje $f\colon X \to Y$ je neprekidno u P_0, onda niz $(f(P_k))_k$ konvergira i vrijedi

$$\lim_k f(P_k) = f(P_0) = f(\lim_k P_k)$$

što formalno izgleda kao da f i $\lim_k$ komutiraju.

Neposredno iz definicije konvergencije, vidimo da niz $(P_k)_k$ u metričkom prostoru X konvergira prema P_0 ako i samo ako niz realnih brojeva $d(P_k, P_0)$ konvergira k nuli. Na tu činjenicu, zbog neprekidnosti metrike d, možemo gledati i kao na specijalan slučaj prethodnog teorema.

Za nizove u $\mathbb{R}^n$ vrijedi analogon Teorema 2.6.

[1] Heinrich Eduard Heine (1821–1881), njemački matematičar

Teorem 4.4 *U prostoru* $\mathbb{R}^n$ *niz* $P_k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$, $k \in \mathbb{N}$, *konvergira točki* $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *ako i samo ako nizovi realnih brojeva* $(x_i^k)_k$ *konvergiraju prema* x_i^0, $i = 1, \ldots, n$.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $\lim\limits_k P_k = P_0$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $k \geq k_0$ vrijedi $\|P_k - P_0\| < \varepsilon$. Stoga za svaki $i = 1, \ldots, n$ vrijedi $|x_i^k - x_i^0| \leq \|P_k - P_0\| < \varepsilon$, pa niz $(x_i^k)_k$ konvergira prema $x_i^0 \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ako nizovi $(x_i^k)_k$ konvergiraju prema x_i^0, $i = 1, \ldots, n$ onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoje brojevi $k_i^0 \in \mathbb{N}$ takvi da za sve prirodne brojeve $k \geq k_i^0$ vrijedi $|x_i^k - x_i^0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Tada za svaki $k \geq k_0 := \max\{k_1^0, \ldots, k_n^0\}$ vrijedi $\|P_k - P_0\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i^k - x_i^0)^2} < \varepsilon$, pa je $\lim\limits_k P_k = P_0$. ■

Intuitivno je jasno što je to podniz nekog niza, a definicija je sljedeća:

Definicija 4.2 Neka je $f\colon \mathbb{N} \to X$ neki niz. ***Podniz*** niza f je svaki niz oblika $f \circ u\colon \mathbb{N} \to X$, gdje je $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ neka ***strogo uzlazna funkcija***, tj. takva funkcija da je $u(i) < u(j)$ čim je $i < j$. Kako je funkcija u zapravo niz u $\mathbb{N}$, to je oznaka $(P_{k_j})_j$ za podniz $j \mapsto k_j := u(j) \mapsto P_{k_j}$, $j \in \mathbb{N}$, u skladu sa ranijim dogovorom o označavanju nizova.

Teorem 4.5 *Neka je* $(P_k)_k$ *niz u metričkom prostoru* X. *Ako niz* $(P_k)_k$ *konvergira točki* P_0, *onda je svaki podniz* $(P_{k_j})_j$ *tog niza konvergentan i limes mu je također* P_0.

Dokaz: Kako je $\lim\limits_k P_k = P_0$, to za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $k > k_0$ vrijedi $d(P_k, P_0) < \varepsilon$. Neka je $(P_{k_j})_j$ proizvoljan podniz niza $(P_k)_k$. Tada za $j \geq k_0$ vrijedi $k_j \geq j \geq k_0$ pa je $d(P_{k_j}, P_0) < \varepsilon$. Time smo pokazali da je $\lim\limits_j P_{k_j} = P_0$. ■

Definicija 4.3 Za točku $P_0 \in X$ kažemo da je ***gomilište niza*** $(P_k)_k$ ako postoji podniz $(P_{k_j})_j$ tog niza koji konvergira ka P_0.

Primijetimo da ako je $(P_k)_k$ konvergentan niz, onda je, zbog Teorema 4.5, njegov limes ujedno i jedino gomilište.

Primjeri 4.1

(i) Niz realnih brojeva $x_k = (-1)^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, ima dva gomilišta: -1 i 1.

(ii) Niz $y_k = (-\frac{1+(-1)^k}{2})^{\frac{k}{2}} + \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, ima tri gomilišta: -1, 0 i 1.

(iii) Niz $z_k = k$, $k \in \mathbb{N}$, nema niti jedno gomilište.

(iv) Niz $v_k = k(1 + (-1)^k)$, $k \in \mathbb{N}$, ima samo jedno gomilište, ali nije konvergentan.

(v) Nije teško konstruirati primjere nizova koji imaju beskonačno (prebrojivo ili neprebrojivo) mnogo gomilišta. Takav je u $\mathbb{R}^2$, naprimjer, niz $P_k = (\cos k, \sin k)$, $k \in \mathbb{N}$, kome je svaka točka jedinične kružnice S^1 gomilište.

Uočimo ovdje da su 'gomilište niza' i 'gomilište skupa vrijednosti niza' različite stvari. Tako u primjeru (i) niz $(x_k)_k$ ima dva gomilišta, dok je skup njegovih vrijednosti dvočlani skup $\{-1, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ koji nema gomilišta.

Teorem 4.6 *Točka* $P_0 \in X$ *je gomilište niza* $(P_k)_k$ *ako i samo ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *i svaki* $k \in \mathbb{N}$ *postoji* $k' > k$ *takav da je* $d(P_{k'}, P_0) < \varepsilon$.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je P_0 gomilište niza $(P_k)_k$ i neka je $(P_{k_j})_j$ podniz koji konvergira prema P_0. Tada za $\varepsilon > 0$ postoji $j_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $j \geq j_0$ vrijedi $d(P_{k_j}, P_0) < \varepsilon$. Za zadani $k \in \mathbb{N}$ neka je $l > \max\{j_0, k\}$, te neka je

$k' = k_l$. Tada je $k' = k_l \geq l \geq j_0$ pa je $d(P_{k'}, P_0) = d(P_{k_l}, P_0) < \varepsilon$ i vrijedi $k' \geq l > k$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Prema pretpostavci za $\varepsilon = 1$ i $j = 1$ postoji $k_1 > 1$ takav da je $d(P_{k_1}, P_0) < 1$. Analogno, za $\varepsilon = \frac{1}{2}$ i $j = 2$ postoji $k_2 > \max\{2, k_1\}$ takav da je $d(P_{k_2}, P_0) < \frac{1}{2}$. Općenito, za zadani $j \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon = \frac{1}{j}$ postoji $k_j > \max\{j, k_{j-1}\}$ takav da je $d(P_{k_j}, P_0) < \frac{1}{j}$. $(P_{k_j})_j$ je očito podniz koji konvergira prema P_0. ∎

Za niz $(x_k)_k$ realnih brojeva kažemo da je ***monoton*** ako vrijedi ili $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots$ ili $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots$. Među osnovna svojstva nizova realnih brojeva spadaju činjenice da svaki niz u $\mathbb{R}$ ima monoton podniz i da svaki monoton ograđen niz u $\mathbb{R}$ konvergira. Točnije, vrijede sljedeće dvije leme:

Lema 4.7 *Svaki niz* $(x_k)_k$ *realnih brojeva ima monoton podniz.*

Dokaz: Neka je $A := \{n : \forall m \geq n \text{ vrijedi } x_m \geq x_n\} \subseteq \mathbb{N}$. Razlikujemo dva slučaja:

(i) *Skup A je beskonačan.* U tom slučaju postoji niz $k_1 < k_2 < \ldots$ u A, pa je po definiciji skupa A, $x_{k_1} \leq x_{k_2} \leq \ldots$, tj. niz $(x_k)_k$ ima uzlazan podniz.

(ii) *Skup A je konačan.* Neka je $k_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_1 > k$ za sve $k \in A$ (takav k_1 postoji jer je skup A konačan). Tada postoji $k_2 > k_1$ takav da je $x_{k_2} < x_{k_1}$ (jer bi inače bio $k_1 \in A$). Ali i $k_2 \notin A$, pa postoji $k_3 > k_2$ takav da je $x_{k_3} < x_{k_2} < x_{k_1}$, itd. Indukcijom dakle dobivamo silazan podniz zadanog niza $(x_k)_k$. ■

Lema 4.8 *Svaki omeđen monoton niz realnih brojeva konvergira.*

Dokaz: Ako je niz $(x_k)_k$ uzlazan, onda se iz definicije supremuma skupa realnih brojeva lako vidi da je $\lim\limits_k x_k = \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. Analogno, ako je niz $(x_k)_k$ silazan, onda je $\lim\limits_k x_k = \inf\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. ■

Sada možemo dokazati sljedeći važan teorem:

Teorem 4.9 (Bolzano[1]-Weierstrassov[2] teorem za nizove) *Svaki ograđen niz $(P_k)_k$ u $\mathbb{R}^n$ ima gomilište.*

Dokaz: Dokaz ćemo provesti indukcijom po dimenziji n prostora $\mathbb{R}^n$.

Za $n = 1$ neka je $(x_k)_k$ omeđen niz u $\mathbb{R}$. Prema Lemi 4.7 taj niz ima monoton podniz $(x_{k_j})_j$ koji je, prema Lemi 4.8, konvergentan, pa niz $(x_k)_k$ ima gomilište.

Pretpostavimo induktivno da teorem vrijedi u $\mathbb{R}^n$ i dokažimo da tada vrijedi i u $\mathbb{R}^{n+1}$. Neka je $Q_k = (x_1^k, \ldots, x_n^k, x_{n+1}^k)$, $k \in \mathbb{N}$, omeđen niz u $\mathbb{R}^{n+1}$. Tada je $P_k := (x_1^k, \ldots, x_n^k)$, $k \in \mathbb{N}$, omeđen niz u $\mathbb{R}^n$ pa, po pretpostavci indukcije, postoji konvergentan podniz $(P_{k_j})_j$. Promotrimo podniz $(x_{n+1}^{k_j})_j$. To je omeđen niz realnih brojeva pa on prema već dokazanom slučaju $n = 1$ ima konvergentan podniz $(x_{n+1}^{k_{j_i}})_i$. Kako je podniz konvergentnog niza i sâm konvergentan, to je i $(P_{k_{j_i}})_i$ konvergentan niz u $\mathbb{R}^n$. Prema Teoremu 4.4 je tada $Q_{k_{j_i}} = (x_1^{k_{j_i}}, \ldots, x_n^{k_{j_i}}, x_{n+1}^{k_{j_i}})$, $i \in \mathbb{N}$, konvergentan podniz niza $(Q_k)_k$, pa niz $(Q_k)_k$ ima gomilište. ■

Da se dokaže konvergencija nekog niza koristeći definiciju konvergencije, treba se na bilo koji način najprije 'dočepati' granične točke P_0. To nekad (u praksi

[1]Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781–1848), češki filozof, matematičar i teolog

[2]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897), njemački matematičar

gotovo nikad) nije lako. Ponekad je, međutim, dovoljno znati da promatrani niz konvergira, a sâm limes nas ne zanima. U tu se svrhu često koristi sljedeće svojstvo:

Definicija 4.4 Za niz $(P_k)_k$ u metričkom prostoru (X, d) kažemo da je ***Cauchyev***[1] ***niz*** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $k, m \in \mathbb{N}$ za koje je $k, m \geq k_0$ vrijedi $d(P_k, P_m) < \varepsilon$.

Ekvivalentno, može se reći da je niz $(P_k)_k$ Cauchyev, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji broj $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $k \geq k_0$ i sve brojeve $j \in \mathbb{N}$ vrijedi $d(P_k, P_{k+j}) < \varepsilon$.

Teorem 4.10

(i) Svaki konvergentan niz je Cauchyev.

(ii) Svaki Cauchyev niz je ograničen.

Dokaz: (i) Neka $(P_k)_k \to P_0$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $k \geq k_0$ vrijedi $d(P_k, P_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tada za $k, m \geq k_0$ vrijedi $d(P_k, P_m) \leq d(P_k, P_0) + d(P_0, P_m) < \varepsilon$, pa je niz Cauchyev.

(ii) Neka je $(P_k)_k$ Cauchyev niz. Tada za $\varepsilon = 1$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $m \geq k_0$ vrijedi $d(P_m, P_{k_0}) < 1$. Odaberemo li broj $r := \max\{d(P_i, P_{k_0}) : i = 1, \ldots, k_0\} + 1$, bit će $\{P_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq K(P_{k_0}, r)$. ■

Općenito, Cauchyev niz ne mora konvergirati. Naprimjer, niz $x_k = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, u prostoru $X = \langle 0, 2\rangle \subseteq \mathbb{R}$ uz euklidsku metriku, Cauchyev je niz, ali ne konvergira. Niz decimalnih aproksimacija broja π je Cauchyev niz racionalnih brojeva koji u $\mathbb{Q}$ nije konvergentan. Isto je tako u $\mathbb{R}$ niz prirodnih brojeva $y_k = k$, $k \in \mathbb{N}$, ali uz metriku $\rho(x, y) := \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$, $x, y \in \mathbb{R}$, vidi zadatak 34, Cauchyev niz koji ne konvergira.

Definicija 4.5 Za metrički prostor (X, d) kažemo da je ***potpun*** ako u njemu svaki Cauchyev niz konvergira. Za potpun normiran vektorski prostor kažemo da je ***Banachov***[2].

Teorem 4.11 (O potpunosti prostora $\mathbb{R}^n$) *$\mathbb{R}^n$ (uz standardnu metriku) je potpun metrički prostor, tj. svaki Cauchyev niz u $\mathbb{R}^n$ konvergira.*

[1] Augustin Louis Cauchy (1789–1857), francuski matematičar
[2] Stefan Banach (1892–1945), poljski matematičar

Dokaz: Neka je $(P_k)_k$ Cauchyev niz u $\mathbb{R}^n$. Prema Teoremu 4.10(ii) taj je niz ograničen, pa, prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu 4.9, ima konvergentan podniz $(P_{k_j})_j \to P_0$. Neka je za zadani $\varepsilon > 0$, $j_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $j \geq j_0$ vrijedi $d(P_{k_j}, P_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Kako je niz $(P_k)_k$ Cauchyev, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $k, m \geq k_0$ vrijedi $d(P_k, P_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Neka je $k \geq \max\{k_0, j_0\}$. Tada zbog $k_k \geq k$ vrijedi $d(P_k, P_0) \leq d(P_k, P_{k_k}) + d(P_{k_k}, P_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, pa je niz $(P_k)_k$ konvergentan. ■

Pomoću Teorema 4.2 dobivamo:

Korolar 4.12 *Neka je (X, d) potpun metrički prostor. Podskup $F \subseteq X$ je zatvoren ako i samo ako je potpun (kao potprostor od (X, d), tj. s metrikom $d|_{F \times F}$).*

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $(P_k)_k$ Cauchyev niz u F. Kako je to ujedno i Cauchyev niz u X, on konvergira nekoj točki $P_0 \in X$. Ali zbog zatvorenosti skupa F je tada $P_0 \in F$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $F \subseteq X$ potpun potprostor, i neka je $(P_k)_k$ niz u F koji konvergira nekoj točki $P_0 \in X$. To znači da je $(P_k)_k$ Cauchyev niz u X, pa je on Cauchyev i kao niz u F. Zbog potpunosti skupa F, on konvergira nekoj točki $P_0' \in F$, a zbog jedinstvenosti limesa mora biti $P_0' = P_0$, tj. $P_0 \in F$, što pokazuje da je F zatvoren. ■

Dokažimo sada dva poznata i važna teorema o potpunim metričkim prostorima. Prvi je:

Teorem 4.13 (Cantorov[1] teorem o presjeku) *Neka je (X, d) potpun metrički prostor, $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \ldots$ silazni niz nepraznih zatvorenih podskupova od X takvih da je $\lim\limits_k \operatorname{diam} F_k = 0$. Tada je presjek $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} F_k$ neprazan i sastoji se od točno jedne točke.*

Dokaz: Za svaki $k \in \mathbb{N}$ odaberimo neku točku $P_k \in F_k$. Tada je $(P_k)_k$ Cauchyev niz. Zaista, kako je $\lim\limits_k \operatorname{diam} F_k = 0$ to za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $k \geq k_0$ vrijedi $\operatorname{diam} F_k < \varepsilon$, specijalno $\operatorname{diam} F_{k_0} < \varepsilon$. Tada za sve $k, m \geq k_0$ vrijedi $P_k \in F_k \subseteq F_{k_0}$, $P_m \in F_m \subseteq F_{k_0}$, pa je $d(P_k, P_m) \leq \operatorname{diam} F_{k_0} < \varepsilon$.

[1] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918), njemački matematičar

Zbog potpunosti prostora X niz $(P_k)_k$ konvergira. Neka je $\lim\limits_k P_k =: P_0$. Pokažimo najprije da je $P_0 \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} F_k$, tj. $P_0 \in F_k$ za sve $k \in \mathbb{N}$.

Kako je $P_k \in F_k \subseteq F_1$, $k \geq 1$, to je $(P_k)_{k\geq 1}$ zapravo niz u F_1. Budući je F_1 zatvoren skup to je, prema Teoremu 4.2, $P_0 \in F_1$.

Promotrimo sada podniz $(P_k)_{k\geq 2} = (P_{1+l})_{l\in\mathbb{N}}$ našeg niza $(P_k)_{k\geq 1}$. Kako je za $k \geq 2$, $P_k \in F_k \subseteq F_2$, to se radi o konvergentnom nizu u zatvorenom skupu F_2 pa je $P_0 \in F_2$.

Općenito za $m \in \mathbb{N}$ promatramo podniz $(P_k)_{k\geq m} = (P_{m-1+l})_{l\in\mathbb{N}}$. To je konvergentan niz u F_m pa je i njegov limes $P_0 \in F_m$.

Ostaje još pokazati da se u presjeku $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} F_k$ ne mogu nalaziti dvije različite točke. Zaista, neka su $P, P' \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} F_k$, tj. $P, P' \in F_k$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Kako je $\lim\limits_k \operatorname{diam} F_k = 0$, to za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\operatorname{diam} F_{k_0} < \varepsilon$, pa je i $d(P, P') \leq \operatorname{diam} F_{k_0} < \varepsilon$. Kako to vrijedi za svaki $\varepsilon > 0$, zaključujemo da je $d(P, P') = 0$, tj. $P = P'$. ■

Sljedeći teorem poopćuje Lemu o kontrakciji (Korolar 2.19):

Teorem 4.14 (Banachov teorem o fiksnoj točki) *Neka je (X, d) potpun metrički prostor, a $f\colon X \to X$* ***kontrakcija****, tj. preslikavanje takvo da postoji $q < 1$ sa svojstvom da je $d(f(P), f(P')) \leq q\, d(P, P')$ za sve $P, P' \in X$. Tada f ima jednu jedinu* ***fiksnu točku****, tj. postoji jedinstvena točka $P^* \in X$ takva da je $f(P^*) = P^*$.*

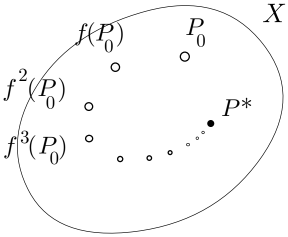
Dokaz: Odaberimo proizvoljnu točku $P_0 \in X$ i za $k \in \mathbb{N}$ definirajmo $P_k := f(P_{k-1})$. Pokažimo da je niz $(P_k)_k$ Cauchyev niz.

$$d(P_k, P_{k+1}) = d(f(P_{k-1}), f(P_k)) \leq q\, d(P_{k-1}, P_k) \leq \ldots \leq q^k\, d(P_0, P_1)\ .$$

Stoga je za svaki $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(P_k, P_{k+j}) &\leq d(P_k, P_{k+1}) + d(P_{k+1}, P_{k+2}) + \ldots + d(P_{k+j-1}, P_{k+j}) \leq \\ &\leq (q^k + q^{k+1} + \ldots + q^{k+j-1})\, d(P_0, P_1) \leq \\ &\leq \sum_{i=k}^{\infty} q^i d(P_0, P_1) = \frac{q^k}{1-q}\, d(P_0, P_1)\ , \end{aligned}$$

jer je $q<1$. Nadalje je $\lim\limits_k q^k=0$ pa odavde zaključujemo da je $(P_k)_k$ Cauchyev niz. Zbog potpunosti prostora (X,d) niz $(P_k)_k$ konvergira. Neka je $\lim\limits_k P_k =: P^*$.



Uočimo da preslikavanje f ima Lipschitzovo svojstvo pa je neprekidno. Stoga je

$$P^*=\lim_k P_k=\lim_k f(P_{k-1})=f(\lim_k P_{k-1})=f(P^*).$$

Pokažimo još i jedinstvenost. Pretpostavimo da je i $f(P')=P'$ za neki $P'\in X$. Tada je

$$d(P^*,P')=d(f(P^*),f(P'))\le q\,d(P^*,P')\ .$$

Kako je $q<1$, to je moguće jedino za $d(P^*,P')=0$, tj. $P'=P^*$. ■

Osim euklidskih prostora $\mathbb{R}^n$, u analizi su važni i neki drugi potpuni metrički prostori. Jedan od njih ćemo sada opisati.

Neka je S neki skup, a (Y,d) metrički prostor. Označimo s $B(S,Y)$ skup svih omeđenih funkcija sa S u Y. Udaljenost dviju funkcija $f,g\in B(S,Y)$ definirajmo kao $\rho(f,g):=\sup\{d(f(P),g(P)) : P\in S\}$. Lako se vidi da je ρ zaista metrika na $B(S,Y)$, pa govorimo o metričkom ***prostoru svih omeđenih funkcija*** sa S u Y.

Teorem 4.15 *Neka je S proizvoljan skup, a (Y,d) potpun metrički prostor. Tada je i prostor $(B(S,Y),\rho)$ svih omeđenih funkcija sa S u Y potpun.*

Dokaz: Neka je $(f_k)_k$ Cauchyev niz u $B(S,Y)$. Tada za svaki $\varepsilon>0$ postoji $k_0\in\mathbb{N}$ takav da za $k,m\ge k_0$ vrijedi

$$\sup\{d(f_k(P),f_m(P)) : P\in S\}<\varepsilon\ .$$

No tada i za svaki $P\in S$ i sve $k,m\ge k_0$ vrijedi

$$d(f_k(P),f_m(P))<\varepsilon \tag{1}$$

pa je $(f_k(P))_k$ Cauchyev niz u Y. Zbog potpunosti prostora (Y,d) taj niz konvergira. Označimo $\lim\limits_k f_k(P) =: f_0(P)$. Time smo dobili funkciju $f_0\colon S\to Y$. Pokažimo da je funkcija f_0 omeđena. Uzmemo li u (1) $\lim\limits_m$ dobivamo

$$d(f_k(P),f_0(P))\le\varepsilon\ ,\ \ \forall P\in S \tag{2}$$

(to je stoga što je d neprekidno preslikavanje pa komutira s limesom po m), pa ako je $f_k(S) \subseteq K(y_0, r) \subseteq Y$ za neki $r > 0$, onda je $f_0(S) \subseteq K(y_0, r + \varepsilon)$, te je $f_0 \in B(S, Y)$. Nadalje, budući (2) vrijedi za sve $P \in S$ i sve $k \geq k_0$, zaključujemo da je i

$$\sup \{d(f_k(P), f_0(P)) : P \in S\} \leq \varepsilon \; , \quad \forall k \geq k_0 \quad ,$$

tj. $\rho(f_k, f_0) \leq \varepsilon$ za sve $k \geq k_0$, pa niz $(f_k)_k$ konvergira, s obzirom na metriku ρ, funkciji f_0. ■

U slučaju kada je S snabdjeven topološkom strukturom važan je potprostor omeđenih neprekidnih preslikavanja.

Teorem 4.16 *Neka su X, Y metrički prostori, a $BC(X, Y)$ skup svih omeđenih neprekidnih preslikavanja sa X u Y. $BC(X, Y)$ je zatvoren potprostor od $B(X, Y)$, tj. limes (s obzirom na metriku ρ u prostoru $B(X, Y)$) niza neprekidnih omeđenih preslikavanja je neprekidno omeđeno preslikavanje.*

Dokaz: Neka je $(f_k)_k$ niz u $BC(X, Y)$ koji konvergira omeđenoj funkciji $f_0 \in B(X, Y)$. Treba pokazati da je f_0 neprekidna. Neka je $P_0 \in X$ i $\varepsilon > 0$. Kako je $\lim\limits_k f_k = f_0$ to postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $k \geq k_0$ vrijedi $\sup \{d(f_k(P), f_0(P)) : P \in X\} < \frac{\varepsilon}{3}$. Specijalno je $d(f_{k_0}(P), f_0(P)) < \frac{\varepsilon}{3}$ za sve $P \in X$.

Kako je preslikavanje f_{k_0} neprekidno u P_0, postoji $\delta > 0$ takav da za sve $P \in K(P_0, \delta) \subseteq X$ vrijedi $d(f_{k_0}(P), f_{k_0}(P_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Stoga za sve $P \in K(P_0, \delta)$ vrijedi

$$d(f_0(P), f_0(P_0)) \leq d(f_0(P), f_{k_0}(P)) + d(f_{k_0}(P), f_{k_0}(P_0)) + d(f_{k_0}(P_0), f_0(P_0)) < \varepsilon$$

tj. $f_0 \in BC(X, Y)$. ■

Kao posljedicu prethodna dva teorema i Korolara 4.12 dobivamo:

Korolar 4.17 *Prostor $BC(X, Y)$ svih omeđenih neprekidnih preslikavanja metričkog prostora X u potpun metrički prostor (Y, d) je potpun metrički prostor.* ■

Napomena 4.2 U slučaju kad je Y normiran vektorski prostor onda se i u vektorskom prostoru $B(S,Y)$ definira norma s $\|f\| := \sup\{\|f(P)\| : P \in S\}$. Tada je naša metrika ρ upravo metrika inducirana tom normom. Ako je prostor Y Banachov, onda Teorem 4.15 tvrdi da je i prostor $B(S, Y)$ Banachov, a ako je X metrički prostor (naprimjer normirani vektorski prostor), a Y Banachov, onda Korolar 4.17 pokazuje da je i $BC(X, Y)$ Banachov.

Specijalno je prostor $BC(X)$ svih neprekidnih omeđenih realnih funkcija na metričkom prostoru X, potpun normiran vektorski prostor, dakle, Banachov prostor.

Napomena 4.3 Topološka struktura koju na prostoru $B(S, Y)$ inducira metrika ρ, zove se ***topologija uniformne konvergencije***, a konvergencija s obzirom na metriku ρ ***uniformna konvergencija***. Niz $(f_k)_k$ omeđenih funkcija sa S u Y, dakle, ***uniformno konvergira*** funkciji $f_0 \colon S \to Y$ ako je $\lim\limits_k \rho(f_k, f_0) = 0$, tj. ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji k_0 tako da za sve $k \geq k_0$ i sve $P \in S$ vrijedi $d(f_k(P), f_0(P)) < \varepsilon$. Očito je da uniformno konvergentni niz funkcija ***konvergira*** i ***obično*** ili ***po točkama***, tj. za svaki $P \in S$ niz $(f_k(P))_k$ konvergira prema $f_0(P)$. Obrat, međutim, općenito ne vrijedi.

O ovim i nekim drugim tipovima konvergencije nizova funkcija, bit će još govora u kasnijim poglavljima.

Promotrimo na kraju vezu neprekidnih preslikavanja i Cauchyevih nizova. Primijetimo da neprekidna slika Cauchyevog niza ne mora biti Cauchyev niz. Naprimjer, preslikavanje $f \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definirano s $f(x) := \dfrac{1}{x}$, preslikava Cauchyev niz $x_k = \dfrac{1}{k}$, u niz $f(x_k) = k$ koji nije Cauchyev. Međutim, uniformno neprekidna preslikavanja čuvaju Cauchyeve nizove. Točnije, vrijedi

Teorem 4.18 *Neka je $f \colon X \to Y$ uniformno neprekidno preslikavanje metričkih prostora. Ako je $(P_k)_k$ Cauchyev niz u X onda je $(f(P_k))_k$ Cauchyev niz u Y.*

Dokaz: Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je f uniformno neprekidno, postoji $\delta > 0$ takav da za svake dvije točke $P, P' \in X$ za koje je $d(P, P') < \delta$ vrijedi $d(f(P), f(P')) < \varepsilon$, a jer je niz $(P_k)_k$ Cauchyev, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $k, m \geq k_0$ vrijedi $d(P_k, P_m) < \delta$. Stoga je $d(f(P_k), f(P_m)) < \varepsilon$, pa je niz $(f(P_k))_k$ Cauchyev. ■

Često se promatra sljedeći problem: Zadano je preslikavanje $f \colon A \to Y$ gdje je $A \subseteq X$ neki podskup. Da li se preslikavanje f ***može proširiti*** na čitav X, tj. da li postoji preslikavanje $\hat{f} \colon X \to Y$ takvo da je $f\big|_A = f$? Općenito, ako se ništa ne zahtjeva, onda je to uvijek moguće. Međutim, ukoliko je naprimjer, preslikavanje f neprekidno, obično se zahtijeva da je i proširenje $\hat{f}$ neprekidno, a to nije uvijek moguće postići. Naprimjer, funkciju $f \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiranu s $f(x) := \dfrac{1}{x}$, nije moguće neprekidno proširiti na čitav $\mathbb{R}$. Međutim, u nekim situacijama to je moguće, kao što pokazuje sljedeći teorem.

Teorem 4.19 *Neka su X i Y metrički prostori, $A \subseteq X$ gust podskup, i neka je $f\colon A \to Y$ uniformno neprekidno preslikavanje. Ako je prostor Y potpun, onda se f može proširiti, i to na na jedinstven način, na čitav X, tj. postoji jedno jedino neprekidno preslikavanje $\hat{f}\colon X \to Y$ takvo da je $\hat{f}\big|_A = f$. Preslikavanje $\hat{f}$ čak je uniformno neprekidno.*

Dokaz: Jedinstvenost neprekidnog proširenja, ukoliko ono uopće postoji, slijedi iz teorema o jedinstvenosti proširenja na zatvarač, Korolar 2.12.

Dokažimo da neprekidno proširenje zaista postoji. Neka je $x \in X$ proizvoljna točka. Kako je podskup A gust na X, postoji niz $(a_k)_k$ u A koji konvergira k x. Niz $(a_k)_k$ je Cauchyev, pa je, prema prethodnom teoremu 4.18, i niz $(f(a_k))_k$ Cauchyev niz u Y. Zbog potpunosti prostora Y taj niza konvergira, pa definirajmo

$$\hat{f}(x) := \lim_k f(a_k)\ .$$

Pokažimo da je preslikavanje $\hat{f}$ dobro definirano, tj. da ako su $(a_k)_k$ i $(a'_k)_k$ dva niza u A takva da je $\lim_k a_k = \lim_k a'_k = x$, onda je $\lim_k f(a_k) = \lim_k f(a'_k)$. Neka je niz $(b_n)_n$ definiran s

$$b_n := \begin{cases} a_k\,, & \text{za } n = 2k-1 \\ a'_k\,, & \text{za } n = 2k \end{cases}\quad, n \in \mathbb{N}\ .$$

Lako se vidi da je niz $(b_n)_n$ konvergentan, dakle i Cauchyev, pa je, prema prethodnom teoremu 4.18, niz $(f(b_n))_n$ također Cauchyev, a zbog potpunosti prostora Y, i konvergentan. Kako su nizovi $(f(a_k))_k$ i $(f(a'_k))_k$ podnizovi niza $(f(b_n))_n$, to su i oni konvergentni i imaju isti limes, tj. $\lim_k f(a_k) = \lim_n f(b_n) = \lim_k f(a'_k)$, pa je preslikavanje $\hat{f}$ zaista dobro definirano.

Preslikavanje $\hat{f}$ proširuje f. Zaista, za $x \in A$ možemo uzeti konstantan niz $a_k = x$, $k \in \mathbb{N}$, pa je $\hat{f}(x) = \lim_k f(a_k) = \lim_k f(x) = f(x)$.

Dokažimo, konačno, da je preslikavanje $\hat{f}$ uniformno neprekidno. Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog uniformne neprekidnosti preslikavanja f, postoji $\delta > 0$ takav da za sve točke $a, b \in A$ za koje je $d(a,b) < \delta$, vrijedi $d(f(a), f(b)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Neka su $x, y \in X$ točke takve da je $d(x,y) < \frac{\delta}{3}$, i neka su $(a_k)_k$ i $(b_k)_k$ nizovi u A takvi da je $\lim_k a_k = x$ i $\lim_k b_k = y$. Prema definiciji preslikavanja $\hat{f}$, tada je $\lim_k f(a_k) = \hat{f}(x)$ i $\lim_k f(b_k) = \hat{f}(y)$. Neka je $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $k \geq k_0$

vrijedi $d(a_k, x) < \frac{\delta}{3}$, $d(b_k, y) < \frac{\delta}{3}$, $d(f(a_k), \hat{f}(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ i $d(f(b_k), \hat{f}(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Tada za $k \geq k_0$ vrijedi $d(a_k, b_k) \leq d(a_k, x) + d(x, y) + d(y, b_k) < \delta$, pa je

$$d(\hat{f}(x), \hat{f}(y)) \leq d(\hat{f}(x), f(a_k)) + d(f(a_k), f(b_k)) + d(f(b_k), \hat{f}(y)) < \varepsilon ,$$

tj. preslikavanje $\hat{f}$ je uniformno neprekidno. ■

§ 5 Kompaktnost u $\mathbb{R}^n$

Iako nam je cilj proučavanje euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ i preslikavanja među takvim prostorima, i ovdje je prirodnije raditi u apstraktnijem ambijentu.

Definicija 5.1 Neka je X metrički prostor. Za potprostor $K \subseteq X$ kažemo da je ***kompaktan*** ukoliko svaki niz $(P_k)_k$ u K ima konvergentan podniz čiji je limes u K.

Dokažimo najprije da se kompaktnost prenosi na zatvorene podskupove.

Teorem 5.1 *Neka je $K \subseteq X$ kompaktan potprostor metričkog prostora X, a $F \subseteq K$ zatvoren podskup. Tada je i F kompaktan.*

Dokaz: Neka je $(P_k)_k$ proizvoljan niz u F. Kako je to ujedno i niz u K to postoji konvergentan podniz $(P_{k_j})_j$ s limesom $P_0 \in K$. Kako je F zatvoren, to je, prema Teoremu 4.2, $P_0 \in F$ pa je F kompaktan. ■

Sada ćemo dokazati neke karakterizacije kompaktnosti koje su obično operativnije od same definicije. U tu svrhu dokažimo najprije

Teorem 5.2 *Neka je K kompaktan potprostor metričkog prostora X. Tada je K **potpuno omeđen**, tj. za svaki $\varepsilon > 0$ postoje točke $P_1, \dots , P_k \in K$ takve da je $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} K(P_i, \varepsilon)$. Za skup $\{P_1, \dots , P_k\}$ kaže se da je ε-**mreža**.*

Dokaz: Neka je K kompaktan i pretpostavimo da nema svojstvo iz teorema. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da se K ne može pokriti s konačno mnogo ε-kugala. Neka je $P_1 \in K$ proizvoljna točka. Kako $K \not\subseteq K(P_1, \varepsilon)$ to postoji točka $P_2 \in K \setminus K(P_1, \varepsilon)$. Budući $K \not\subseteq K(P_1, \varepsilon) \cup K(P_2, \varepsilon)$, to postoji točka $P_3 \in K \setminus$

$(K(P_1,\varepsilon)\cup K(P_2,\varepsilon))$. Nastavimo li tim postupkom dalje, dolazimo do niza $(P_k)_k$ u K tako da je $P_k \in K \setminus \bigcup\limits_{i<k} K(P_i,\varepsilon)$.

Budući je K kompaktan, postoji podniz $(P_{k_j})_j$ koji konvergira nekoj točki $P_0 \in K$. Neka je $j_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $j \geq j_0$ vrijedi $d(P_{k_j},P_0) < \varepsilon/2$. Tada za $l > j \geq j_0$ vrijedi

$$d(P_{k_l},P_{k_j}) \leq d(P_{k_l},P_0) + d(P_0,P_{k_j}) < \varepsilon$$

pa je $P_{k_l} \in K(P_{k_j},\varepsilon)$, što je u suprotnosti s konstrukcijom niza $(P_k)_k$ jer je $k_l > k_j$. ■

Korolar 5.3 *Kompaktan potprostor K metričkog prostora X omeđen je i zatvoren.*

Dokaz: Prema prethodnom teoremu K je potpuno omeđen, dakle i sadržan u konačnoj uniji kugala, koje su omeđeni skupovi. Omeđenost od K sada slijedi iz Propozicije 1.7.

Neka je $(P_k)_k$ niz u K koji konvergira točki $P_0 \in X$. Kako je K kompaktan, postoji podniz $(P_{k_j})_j$ s limesom u K. Međutim prema Teoremu 4.5 je $\lim\limits_j P_{k_j} = \lim\limits_k P_k$ pa je $P_0 \in K$. Stoga je, prema Teoremu 4.2, skup K zatvoren. ■

Kao posljedicu, dobivamo sljedeću važnu karakterizaciju kompaktnosti u euklidskim prostorima:

Teorem 5.4 *Skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktan ako i samo ako je omeđen i zatvoren.*

Dokaz: Jedan smjer je specijalan slučaj Korolara 5.3. Obratno, neka je K omeđen i zatvoren te neka je $(P_k)_k$ niz u K. Kako je i taj niz omeđen, to, prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu 4.9, ima konvergentan podniz. Zbog zatvorenosti skupa K, limes tog podniza leži u K, pa je K kompaktan. ■

Primjeri 5.1 Navedimo nekoliko jednostavnih primjera kompaktnih skupova u $\mathbb{R}^n$.

(i) segment $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$

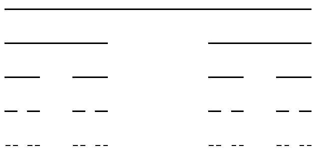
(ii) (zatvoren) paralelepiped $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$

(iii) zatvorena kugla $\overline{K}(P_0,r) = \{P \in \mathbb{R}^n : d(P,P_0) \leq r\}$

(iv) sfera $SSS^{n-1} = \{P \in \mathbb{R}^n : \|P\| = 1\}$

(v) ***Cantorov trijadski skup*** $\mathsf{C} \subseteq [0,1] \subseteq \mathbb{R}$.

$E_1 = \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$ srednja trećina segmenta $I = [0,1]$, $E_2 = \langle \frac{1}{9}, \frac{2}{9} \rangle \cup \langle \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \rangle$ unija srednjih trećinâ komponenata skupa $I \setminus E_1$, $E_3 = \langle \frac{1}{27}, \frac{2}{27} \rangle \cup \langle \frac{7}{27}, \frac{8}{27} \rangle \cup \langle \frac{19}{27}, \frac{20}{27} \rangle \cup \langle \frac{25}{27}, \frac{26}{27} \rangle$ unija srednjih trećinâ komponenata skupa $I \setminus (E_1 \cup E_2)$, itd. Skup $\mathsf{C} := I \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ je Cantorov trijadski skup.



Prvih pet koraka u konstrukciji Cantorovog skupa

To je omeđen skup, a kao komplement otvorenog skupa $\bigcup\limits_i E_i$ je i zatvoren pa je kompaktan. Cantorov trijadski skup je neprebrojiv skup i ima mnoga interesantna svojstva. Često se pojavljuje kao primjer (ili kontraprimjer) u različitim granama matematike.

Dokažimo sada jedno važno svojstvo otvorenih skupova u $\mathbb{R}^n$.

Teorem 5.5 *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Tada postoji rastući niz kompaktnih skupova $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots \subseteq K_i \subseteq K_{i+1} \subseteq \ldots \subseteq U$ takvih da je $U = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} K_i$.*

Dokaz: Ako je $U = \mathbb{R}^n$, neka je $D_i := \mathbb{R}^n$ za sve $i \in \mathbb{N}$. U protivnom, za svaki $i \in \mathbb{N}$ neka je $D_i := \left\{P \in U : d(P, \mathbb{R}^n \setminus U) \geq \frac{1}{i}\right\} \subseteq U$. Kako je funkcija $P \mapsto d(P, \mathbb{R}^n \setminus U)$ neprekidna (vidi Primjer 2.1(iv)), to su skupovi D_i zatvoreni. Neka je $P_0 \in U$ proizvoljna točka. Definirajmo skupove $K_i := D_i \cap \overline{K}(P_0, i)$, $i \in \mathbb{N}$. Skupovi K_i su zatvoreni i omeđeni, dakle kompaktni. Pokažimo da je $U = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} K_i$.

Kako je U otvoren skup, za svaku točku $P \in U$ postoji $i_P \in \mathbb{N}$ takav da je $K(P, \dfrac{1}{i_P}) \subseteq U$, pa je $d(P, \mathbb{R}^n \setminus U) \geq \dfrac{1}{i_P}$. Stoga je $P \in D_i$ za sve $i \geq i_P$. Specijalno, za svaki $i \geq \max\{i_P, d(P, P_0)\}$ je $P \in D_i \cap \overline{K}(P_0, i) = K_i$, pa je $U \subseteq \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} K_i$.

Obratna inkluzija slijedi iz činjenice da je $K_i \subseteq U$ za sve $i \in \mathbb{N}$. ■

Za metrički prostor kaže se da je ***lokalno kompaktan*** ako za svaku točku P i svaku njenu okolinu U postoji okolina V točke P takva da je $V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ i da je $\overline{V}$ kompaktan skup. Za lokalno kompaktan metrički prostor kaže se da je ***σ-kompaktan*** ako je jednak uniji neke prebrojive familije kompaktnih podskupova. Kako je svaki otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ lokalno kompaktan, što se lako vidi, to prethodni teorem zapravo pokazuje da je svaki otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ σ-kompaktan.

Definicija 5.2 Neka je X prostor, a $S \subseteq X$. Za familiju $\mathcal{U}$ podskupova od X kažemo da je ***pokrivač*** skupa S ako je $S \subseteq \bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} U$. Za pokrivač $\mathcal{U}$ od S kažemo da je ***otvoren pokrivač*** ako su svi članovi $U \in \mathcal{U}$ otvoreni skupovi. Neka je X metrički prostor, a $\mathcal{U}$ pokrivač skupa $S \subseteq X$. Broj $\lambda > 0$ (ukoliko postoji) takav da za svaki podskup $A \subseteq S$ za koji je $\operatorname{diam} A \leq \lambda$, postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $A \subseteq U$, naziva se ***Lebesgueov***[1] ***broj*** pokrivača $\mathcal{U}$.

Teorem 5.6 (O Lebesgueovom broju) *Neka je $K \subseteq X$ kompaktan podskup metričkog prostora X. Tada za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ od K postoji Lebesgueov broj.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ kompaktnog skupa K za koji Lebesgueov broj ne postoji. Tada za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji skup $A_k \subseteq K$ s $\operatorname{diam} A_k \leq \frac{1}{k}$, koji nije sadržan niti u jednom članu pokrivača $\mathcal{U}$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ odaberimo točku $P_k \in A_k \subseteq K$. Kako je K kompaktan, to niz $(P_k)_k$ ima neki konvergentan podniz $(P_{k_j})_j$ s limesom $P_0 \in K$. Budući je $\mathcal{U}$ pokrivač od K, postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $P_0 \in U$. Kako je U otvoren, postoji $r > 0$ takav da je $K(P_0, r) \subseteq U$, a budući je $\lim\limits_j P_{k_j} = P_0$, postoji $j_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $j \geq j_0$ vrijedi $d(P_{k_j}, P_0) < \dfrac{r}{2}$. Neka je $j \geq \max\{j_0, \dfrac{2}{r}\}$. Tada za svaku točku $P \in A_{k_j}$ vrijedi

$$
\begin{aligned}
d(P, P_0) \leq d(P, P_{k_j}) + d(P_{k_j}, P_0) &< \operatorname{diam} A_{k_j} + \frac{r}{2} \leq \\
&\leq \frac{1}{k_j} + \frac{r}{2} \leq \frac{1}{j} + \frac{r}{2} \leq r
\end{aligned}
$$

pa je $A_{k_j} \subseteq K(P_0, r) \subseteq U \in \mathcal{U}$, što je u suprotnosti sa izborom skupova A_k. ■

Sada možemo dokazati jednu karakterizaciju kompaktnosti.

Teorem 5.7 *Neka je X metrički prostor. Skup $K \subseteq X$ je kompaktan ako i samo ako se svaki otvoreni pokrivač od K može* ***reducirati*** *na konačan* ***potpokrivač****, tj. za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ od K postoje indeksi $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A$ takvi da je $K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_{\alpha_i}$.*

[1] Henri Léon Lebesgue (1875–1941), francuski matematičar

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je K kompaktan, a $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ otvoren pokrivač od K, te neka je $\lambda > 0$ Lebesgueov broj pokrivača $\mathcal{U}$ (on postoji prema prethodnom teoremu). Jer je K potpuno omeđen (Teorem 5.2), postoje točke $P_1, \ldots, P_k \in K$ takve da je $K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} K(P_i, \lambda/2)$. Kako je $\operatorname{diam} K(P_i, \lambda/2) \le \lambda$ to postoje indeksi $\alpha_i \in A$ takvi da je $K(P_i, \lambda/2) \subseteq U_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, k$, pa je $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k}\}$ traženi konačni potpokrivač od $\mathcal{U}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka K ima svojstvo da se svaki otvoreni pokrivač od K može reducirati na konačan potpokrivač, i neka je $(P_k)_k$ proizvoljan niz u K. Pretpostavimo da $(P_k)_k$ nema gomilište u K, tj. da niti jedan podniz od $(P_k)_k$ ne konvergira u K. Tada oko svake točke $P \in K$ postoji okolina $U(P) \ni P$ koja sadrži najviše konačno mnogo članova niza $(P_k)_k$. Familija $\{U(P) : P \in K\}$ je očito otvoren pokrivač od K pa, po pretpostavci, postoje točke $Q_1, \ldots, Q_n \in K$ takve da je već $\{U(Q_1), \ldots, U(Q_n)\}$ pokrivač od K. Kako svaki od skupova $U(Q_i)$ sadrži samo konačno mnogo članova niza $(P_k)_k$, dobili smo kontradikciju s činjenicom da je skup $\mathbb{N}$ beskonačan. ■

Svojstvo kojim je u prethodnom teoremu karakterizirana kompaktnost često se naziva ***Heine-Borelovo***[1] ***svojstvo***. Uočimo da ono ne koristi niti nizove, niti metriku, pa se ovim svojstvom upravo i definira kompaktnost u općenitim topološkim prostorima, a naša Definicija 5.1 zapravo je karakterizacija kompaktnosti u metričkim prostorima.

Promotrimo sada neka svojstva neprekidnih funkcija kojima je domena kompaktna.

Teorem 5.8 *Neka su X i Y metrički prostori, $K \subseteq X$ kompaktan skup, a $f\colon K \to Y$ neprekidno preslikavanje. Tada je slika $f(K) \subseteq Y$ kompaktan skup u Y.*

Dokaz: Neka je $(Q_k)_k$ niz u $f(K)$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ neka je $P_k \in K$ takav da je $f(P_k) = Q_k$. Kako je K kompaktan, niz $(P_k)_k$ ima konvergentan podniz $(P_{k_j})_j$ s limesom $P_0 \in K$. Zbog neprekidnosti preslikavanja f, tada je, prema Teoremu 4.3, $Q_{k_j} = f(P_{k_j})$, $j \in \mathbb{N}$, konvergentan podniz niza $(Q_k)_k$ s limesom $f(P_0) \in f(K)$. ■

Napomenimo da je neprekidna slika kompaktnog skupa kompaktna i kada se radi o preslikavanjima topoloških prostora, samo dokaz mora biti drugačiji.

[1] Félix Édouard Justin Émile Borel (1871–1956), francuski matematičar

Kao posljedicu Teorema 5.8 i karakterizacije kompaktnosti u $\mathbb{R}^n$ (Teorem 5.4), dobivamo:

Korolar 5.9 (Weierstrassov teorem) *Neka je $f\colon K \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i neka je K kompaktan skup. Tada je f omeđena funkcija i poprima infimum i supremum, tj. f ima minimum i maksimum.*

Specijalno, neprekidna realna funkcija na segmentu ima minimum i maksimum.

Dokaz: Prema Teoremu 5.8 je skup $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ kompaktan, pa je, prema Teoremu 5.4, omeđen i zatvoren. Zbog omeđenosti postoji $\inf f(K)$, a zbog Teorema 1.1 je $\inf f(K) \in f(K)$. Postoji, dakle, točka $P_1 \in K$ takva da je $f(P_1) = \inf f(K)$, tj. $\inf f(K) = \min f(K)$. Analogno se dokazuje tvrdnja za maksimum. ■

Korolar 5.10 *Neka je K kompaktan skup u metričkom prostoru X, a U otvoren skup takav da je $K \subseteq U$ i $U \neq X$. Tada je $d(K, X \setminus U) > 0$.*

Dokaz: Funkcija $P \mapsto d(P, X \setminus U)$, $P \in K$, je neprekidna (vidi Primjer 2.1(vi)), pa na kompaktu K poprima minimum. Kako je skup $X \setminus U$ zatvoren i $P \notin X \setminus U$ za sve $P \in K$, to prema karakterizaciji zatvarača, Korolar 1.5, ta funkcija poprima samo pozitivne vrijednosti, pa je i njen minimum (strogo) pozitivan. Prema Napomeni 1.3 iza definicije udaljenosti skupova, taj je minimum, dakle infimum, upravo udaljenost $d(K, X \setminus U)$. ■

Korolar 5.11 *Neka je K kompaktan, a $f\colon K \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da je $f(P) > 0$ za sve $P \in K$. Tada postoji broj $c > 0$ takav da je $f(P) > c$ za sve $P \in K$.*

Dokaz: Možemo uzeti, naprimjer, $c := \frac{1}{2} \min f(K) > 0$, što postoji prema Weierstrassovom teoremu. ■

Teorem 5.12 *Neka je $f\colon K \to L$ neprekidna bijekcija metričkih prostora. Ako je K kompaktan onda je i inverzno preslikavanje $g = f^{-1}\colon L \to K$ neprekidno, tj. f je* ***homeomorfizam*** *s K na L.*

Dokaz: Dovoljno je pokazati (prema Teoremu 2.1(b)) da je za svaki zatvoreni skup $F \subseteq K$, skup $g^{\leftarrow}(F)$ zatvoren u L. Neka je $F \subseteq K$ zatvoren. Prema

Teoremu 5.1, F je kompaktan pa je $g^{\leftarrow}(F) = g^{-1}(F) = f(F)$ kompaktan u L kao neprekidna slika kompakta (Teorem 5.8). No tada je $g^{\leftarrow}(F)$ zatvoren, prema Korolaru 5.3, pa je g neprekidno. ∎

Teorem 5.13 *Neka su X i Y metrički prostori, $K \subseteq X$, i $f\colon K \to Y$ neprekidno preslikavanje. Ako je K kompaktan onda je preslikavanje f i uniformno neprekidno.*

Dokaz: Kako je f neprekidno, to za svaki $P \in K$ i svaki $\varepsilon > 0$, postoji broj $\delta_P > 0$ takav da je $f(K(P, \delta_P)) \subseteq K(f(P), \frac{\varepsilon}{2})$. Neka je $\delta > 0$ Lebesgueov broj pokrivača $\{K(P, \delta_P) : P \in K\}$ kompaktnog skupa K (postojanje je osigurano Teoremom 5.6). Tada, prema definiciji Lebesgueovog broja, za svake dvije točke $P', P'' \in K$ za koje je $d(P', P'') < \delta$, tj. $\operatorname{diam}\{P', P''\} < \delta$, postoji točka $P \in K$ takva da je $P', P'' \in K(P, \delta_P)$ pa je

$$d(f(P'), f(P'')) \leq d(f(P'), f(P)) + d(f(P), f(P'')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

što pokazuje uniformnu neprekidnost preslikavanja f. ∎

§ 6 Particija jedinice i Tietzeov teorem

Na kraju ovog poglavlja obradit ćemo dvije tehnike vrlo korisne u različitim situacijama — particiju jedinice i Tietzeov[1] teorem o neprekidnom proširenju realne funkcije. Postojanje particije jedinice dokazat ćemo za konačne otvorene pokrivače, što će biti dovoljna za naše potrebe. Tehnike i rezultati ovog paragrafa trebat će nam u trećem poglavlju pri dokazivanju teorema o zamjeni varijabli u višestrukom integralu

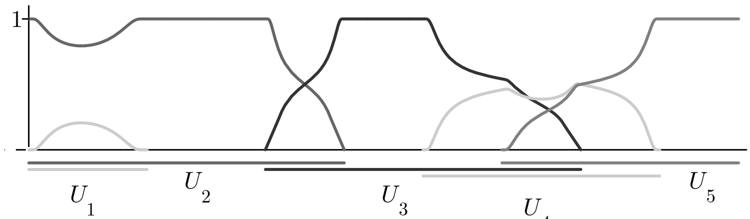
Definicija 6.1 Neka je $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ konačan otvoren pokrivač metričkog prostora X. Za familiju $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ neprekidnih realnih funkcija $\lambda_i\colon X \to [0,1]$ kažemo da je ***particija jedinice podređena pokrivaču*** $\mathcal{U}$ ako je

(*i*) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) = 1$ za sve $x \in X$, i

(*ii*) $\operatorname{supp} \lambda_i := \overline{\{x \in X : \lambda_i(x) \neq 0\}} \subseteq U_i,\ i = 1, \dots, n.$

[1] Heinrich Franz Friedrich Tietze (1880–1964), austrijsko-njemački matematičar

Skup supp λ, zatvarač skupa na kojem funkcija λ poprima vrijednosti različite od 0, naziva se ***nosač*** funkcije λ.



Da bismo dokazali egzistenciju particije jedinice, potrebne su nam najprije neke činjenice.

Lema 6.1 *Neka su F, G disjunktni zatvoreni podskupovi metričkog prostora X. Tada postoji neprekidna funkcija $\varphi\colon X \to [0,1]$ takva da je $\varphi|_F = \mathbf{0}$ i $\varphi|_G = \mathbf{1}$, tj. $F \subseteq \varphi^{\leftarrow}(0)$, $G \subseteq \varphi^{\leftarrow}(1)$.*

Dokaz: Definirajmo φ s

$$\varphi(x) := \frac{d(x,F)}{d(x,F) + d(x,G)} \ .$$

Kako su F i G disjunktni zatvoreni skupovi, to je prema Korolaru 1.14, $d(x,F) + d(x,G) > 0$ za sve $x \in X$, pa je φ dobro definirana, a zbog neprekidnosti funkcija $x \mapsto d(x,F)$ i $x \mapsto d(x,G)$, vidi Primjer 2.1(vi), je φ neprekidna. Očito je $\varphi(x) \in [0,1]$ za sve $x \in X$ i $\varphi|_F = \mathbf{0}$, $\varphi|_G = \mathbf{1}$. ■

Primijetimo da za funkciju φ u dokazu prethodne leme, vrijedi $F = \varphi^{\leftarrow}(0)$ i $G = \varphi^{\leftarrow}(1)$, tj. u metričkim prostorima vrijedi i više nego što se tvrdi u ovoj lemi.

Lema 6.2 *Neka je F zatvoren, a U otvoren podskup metričkog prostora X takav da je $F \subseteq U$. Tada postoji otvoren skup V takav da je*

$$F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U \ .$$

Dokaz: Skupovi F i $G := X \setminus U$ su disjunktni zatvoreni podskupovi od X pa, prema prethodnoj lemi, postoji neprekidna funkcija $\varphi\colon X \to [0,1]$ takva da je $\varphi|_F = \mathbf{0}$, $\varphi|_G = \mathbf{1}$. Neka je $V := \varphi^{\leftarrow}([0, \frac{1}{2}\rangle)$. Tada je

$$F \subseteq \varphi^{\leftarrow}(0) \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq \varphi^{\leftarrow}([0, \tfrac{1}{2}]) \subseteq X \setminus G = U \ . \qquad ■$$

Lema 6.3 *Neka je* $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ *otvoren pokrivač metričkog prostora* X. *Tada postoji otvoren pokrivač* $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_n\}$ *prostora* X *takav da je*

$$V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i \quad , \; i = 1, \ldots, n \; . \tag{1}$$

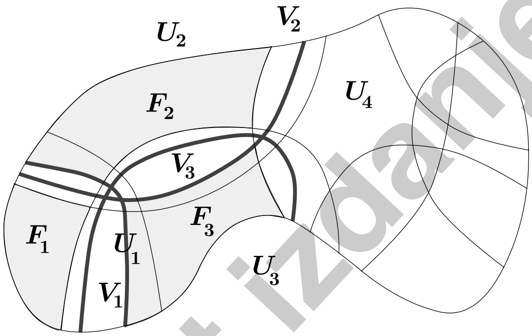
Za pokrivač $\mathcal{V}$ *kaže se da je dobiven* ***sažimanjem*** *pokrivača* $\mathcal{U}$.

Dokaz: Induktivno ćemo naći otvorene skupove $V_i \subseteq X$ takve da vrijedi (1) i

$$\{V_1, \ldots, V_i, U_{i+1}, \ldots, U_n\} \quad \text{je pokrivač od } X. \tag{2}$$

Neka je

$$F_1 := X \setminus \bigcup_{j \geq 2} U_j \;\; . \tag{3}$$



Kako je $\{U_1, \ldots, U_n\}$ pokrivač od X, to je $F_1 \subseteq U_1$. Prema Lemi 6.2 postoji otvoren skup V_1 takav da je

$$F_1 \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq U_1 \;\; . \tag{4}$$

Iz (3) i (4) se vidi da je $\{V_1, U_2, \ldots, U_n\}$ pokrivač od X.

Pretpostavimo da su već nađeni otvoreni skupovi $V_1, \ldots, V_{k-1}$ takvi da vrijedi (1) i (2). Neka je

$$F_k := X \setminus (\bigcup_{i<k} V_i \cup \bigcup_{j>k} U_j) \; . \tag{5}$$

Skup F_k je zatvoren, pa je, prema induktivnoj pretpostavci, familija $\{V_1, \ldots, V_{k-1}, U_k, U_{k+1}, \ldots, U_n\}$ pokrivač od X, te je $F_k \subseteq U_k$. Prema Lemi 6.2 postoji otvoren skup V_k takav da je

$$F_k \subseteq V_k \subseteq \overline{V_k} \subseteq U_k \; . \tag{6}$$

Iz (5) i (6) slijedi da je i $\{V_1, \ldots, V_{k-1}, V_k, U_{k+1}, \ldots, U_n\}$ pokrivač od X. ■

Teorem 6.4 *Za svaki konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ metričkog prostora X postoji particija jedinice $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ podređena tom pokrivaču.*

Dokaz: Prema Lemi 6.3 odaberimo otvoren pokrivač $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_n\}$ prostora X takav da je

$$V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i \quad , \; i = 1, \dots, n \, . \tag{7}$$

Ponovnom primjenom iste leme dobivamo još jedan otvoren pokrivač $\mathcal{W} = \{W_1, \dots, W_n\}$ takav da je

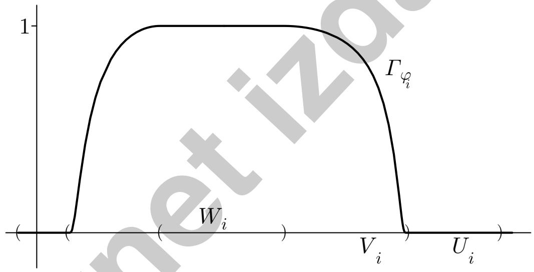
$$W_i \subseteq \overline{W_i} \subseteq V_i \quad , \; i = 1, \dots, n \, . \tag{8}$$

Zbog (8), za svaki $i = 1, \dots, n$, prema Lemi 6.1, postoji neprekidna funkcija $\varphi_i \colon X \to [0,1]$ takva da je $\varphi_i|_{\overline{W}_i} = \mathbf{1}$ i $\varphi_i|_{X \setminus V_i} = \mathbf{0}$, tj.

$$W_i \subseteq \overline{W}_i \subseteq \varphi_i^{\leftarrow}(1) \tag{9}$$

i

$$\varphi_i^{\leftarrow}(\langle 0, 1]) \subseteq V_i \, . \tag{10}$$



Graf funkcije φ_i

Definirajmo funkcije $\lambda_i \colon X \to [0,1]$ formulom

$$\lambda_i(x) := \frac{\varphi_i(x)}{\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x)} \quad , \; i = 1, \dots, n \, . \tag{11}$$

Kako je $\mathcal{W}$ pokrivač od X, to je zbog (9) nazivnik uvijek veći od nule, pa su funkcije λ_i dobro definirane i neprekidne, i očito je $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) = 1, \; x \in X$, tj. vrijedi (i). Nadalje, zbog (10) i (7) je

$$\operatorname{supp} \lambda_i = \operatorname{supp} \varphi_i = \overline{\varphi_i^{\leftarrow}(\langle 0, 1])} \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$$

pa vrijedi i (ii). ■

Dokažimo na kraju jedan važan teorem o proširenju neprekidnih realnih funkcija.

Teorem 6.5 (Tietzeov teorem) *Neka je X metrički prostor a $A \subseteq X$ zatvoren podskup. Svako neprekidno preslikavanje $f\colon A \to [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ može se proširiti na čitav X, tj. postoji neprekidno preslikavanje $\tilde{f}\colon X \to [a,b]$ takvo da je $\tilde{f}|A = f$.*

Dokaz: Teorem je očito dovoljno dokazati za segment $[a,b]=[0,1]$. Uvedimo sljedeću oznaku: za disjunktne zatvorene skupove $B, C \subseteq X$ neka je $\varphi_{BC}\colon X \to [0,1]$ neka neprekidna funkcija takva da je $\varphi_{BC}|_B = \mathbf{0}$ i $\varphi_{BC}|_C = \mathbf{1}$ — takve funkcije postoje prema Lemi 6.1.

Neka je $f_0 := f\colon A \to [0,1]$, i definirajmo skupove

$$B_0 := \{\, a \in A : f_0(a) \le \tfrac{1}{3} \,\}$$
$$C_0 := \{\, a \in A : f_0(a) \ge \tfrac{2}{3} \,\} .$$

Skupovi B_0 i C_0 su disjunktni i zatvoreni u A, dakle, zatvoreni i u X, pa definiramo funkciju $g_0\colon X \to [0,1]$ s

$$g_0(x) := \frac{1}{3}\,\varphi_{B_0C_0}(x) .$$

Pretpostavimo, induktivno, da je već definirano preslikavanje $f_n\colon A \to [0,1]$, pa definirajmo preslikavanja $g_n\colon X \to [0,1]$ i $f_{n+1}\colon A \to [0,1]$ na sljedeći način: Neka je

$$B_n := \{\, a \in A : f_n(a) \le \tfrac{1}{3}\big(\tfrac{2}{3}\big)^n \,\} \subseteq A$$
$$C_n := \{\, a \in A : f_n(a) \ge \tfrac{2}{3}\big(\tfrac{2}{3}\big)^n \,\} \subseteq A .$$

To su disjunktni zatvoreni skupovi, pa definiramo $g_n\colon X \to [0,1]$ s

$$g_n(x) := \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n \varphi_{B_nC_n}(x) .$$

Dokažimo da za sve $a \in A$ vrijedi

$$0 \le f_n(a) - g_n(a) \le 1 . \tag{12}$$

Za $a \in B_n$ nejednakosti očito vrijede, jer je tada $g_n(a) = 0$, a f_n je preslikavanje u $[0,1]$. Za $a \in A \setminus B_n$ je $f_n > \frac{1}{3}\big(\frac{2}{3}\big)^n$, dok je

$$g_n(x) \leq \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n , \quad x \in X , \tag{13}$$

pa nejednakosti (12) opet vrijede.

Sada možemo definirati $f_{n+1} \colon A \to [0,1]$ s

$$f_{n+1}(a) := f_n(a) - g_n(a) .$$

Pokažimo indukcijom, da za svaki $a \in A$ vrijedi nejednakost

$$f_n(a) \leq \Big(\frac{2}{3}\Big)^n . \tag{14}$$

Za $n = 0$ to očito vrijedi. Pretpostavimo da (14) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Za $a \in A \setminus C_n$ je, prema definiciji funkcije f_{n+1} i skupa C_n,

$$f_{n+1}(a) \leq f_n(a) < \Big(\frac{2}{3}\Big)^{n+1} ,$$

a za $a \in C_n$ je $g_n(a) = \frac{1}{3}\big(\frac{2}{3}\big)^n$, pa je, prema pretpostavci indukcije,

$$f_{n+1}(a) = f_n(a) - g_n(a) \leq \Big(\frac{2}{3}\Big)^n - \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n = \Big(\frac{2}{3}\Big)^{n+1} .$$

Definirajmo funkcije $s_n \colon X \to [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, sa

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} g_k(x) .$$

To su neprekidne funkcije, i zbog (13), zaista poprimaju vrijednosti u $[0,1]$. Nadalje, također zbog (13), niz funkcija $(s_n)_n$, tj. red $\sum g_k$, konvergira uniformno, vidi Napomenu 4.3, pa je, prema Teoremu 4.16, limes $s := \lim\limits_n s_n \colon X \to [0,1]$ neprekidna funkcija.

Prema definiciji funkcije f_{n+1}, za sve $a \in A$ je $g_n(a) = f_n(a) - f_{n+1}(a)$, pa zbog (14), za $a \in A$ vrijedi

$$s(a) = \lim_n s_n(a) = \lim_n \big(f_0(a) - f_{n+1}(a)\big) = f(a) ,$$

tj. $s \colon X \to [0,1]$ je neprekidno proširenje funkcije f. ∎

Zadaci

1. Dokažite da euklidska norma na $\mathbb{R}^n$ zadovoljava tzv. relaciju paralelograma: $\|P+Q\|^2 + \|P-Q\|^2 = 2\|P\|^2 + 2\|Q\|^2$, $\forall P, Q \in \mathbb{R}^n$.

2. Dokažite da je euklidska norma $\| \ \| \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Da li je i uniformno neprekidna?

3. Neka je funkcija $f \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Dokažite da restrikcija funkcije f na proizvoljan pravac kroz ishodište ima limes u točki $(0,0)$, ali ne postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

4. Neka je funkcija $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana formulom $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & , x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , x = y = 0 \end{cases}$. Pokažite da restrikcija funkcije f na proizvoljan pravac kroz ishodište ima limes 0 u točki $(0,0)$ iako f ima prekid, tj. nije neprekidna, u $(0,0)$.

5. Neka je $f \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x + y \neq 0\} \to \mathbb{R}$ definirana formulom $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$. Pokažite da je $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)) = 1$ i $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)) = -1$. Ima li funkcija f limes u točki $(0,0)$?

6. Neka je $f \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$. Dokažite da ne postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ iako je $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)) = \lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)) = 0$.

7. Neka je $f \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x, y \neq 0\} \to \mathbb{R}$ definirana formulom $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$. Dokažite da ne postoji ni $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ ni $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ no ipak vrijedi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

8. Pretpostavimo da je funkcija $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neprekidna u $(0,0)$ te da vrijedi $g(0,0) = 0$ i definirajmo $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ formulom
$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y)\,\dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \text{ za } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ za } x = y = 0 \end{cases}.$$
Dokažite da je tada i funkcija f neprekidna u $(0,0)$.

9. Može li se funkcija $f(x,y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ dodefinirati u točki $(0,0)$ tako da bude neprekidna na $\mathbb{R}^2$?

10. Neka je $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidna aditivna funkcija. Dokažite da je f linearan funkcional.

11. Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ njen graf. Dokažite:

    (a) Skup $\Gamma(f)$ je zatvoren.

    (b) Skup $\Gamma(f)$ je povezan.

    (c) Mogu li se bilo koje dvije točke skupa $\Gamma(f)$ povezati poligonalnom linijom unutar $\Gamma(f)$? Usporedite s karakterizacijom otvorenih povezanih skupova u $\mathbb{R}^n$!

12. Skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ nazivamo ***konveksnim*** ako je za sve točke $P, Q \in K$, i skup $\{P + t(Q-P) : t \in [0,1]\}$ sadržan u K. Dokažite:

    (a) Svaki konveksan skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je povezan.

    (b) Skup $K \subseteq \mathbb{R}$ je povezan ako i samo ako je konveksan.

13. Opišite sve povezane podskupove skupa $\mathbb{R}$!

14. Dokažite da neprekidna funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ne može biti injekcija!

15. Dokažite da je jedinična sfera $\mathbb{S}^{n-1} = \partial K(0,1) = \{P \in \mathbb{R}^n : \|P\| = 1\}$ kompaktan skup.

16. Dokažite sljedeći obrat Korolara 5.9: Ako je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ skup na kojem svaka neprekidna funkcija $f\colon K \to \mathbb{R}$ dostiže minimum i maksimum, onda je K kompaktan.

17. Vrijedi li tvrdnja iz prethodnog zadatka uz slabiju pretpostavku da svaka neprekidna funkcija $f\colon K \to \mathbb{R}$ dosiže svoj maksimum na K?

18. Neka je (P_k) niz točaka u kompaktnom skupu $K \subset \mathbb{R}^n$ s jedinstvenim gomilištem P_0. Dokažite da je tada $P_0 = \lim\limits_k P_k$.

19. Na skupu $\mathbb{N}^\infty := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definirajmo topologiju na sljedeći način: kažemo da je skup $V \subseteq \mathbb{N}^\infty$ otvoren ako je ili $V \subseteq \mathbb{N}$, ili je $\infty \in V$ i pritom je skup $\mathbb{N}^\infty \setminus V$ konačan. Dokažite:

(a) Topološki prostor $\mathbb{N}^\infty$ je kompaktan (ova konstrukcija je specijalan slučaj tzv. Aleksandrovljeve[1] kompaktifikacije jednom točkom; vidite [5, str. 241].

(b) Dokažite da je funkcija $f\colon \mathbb{N}^\infty \to \mathbb{R}$ neprekidna na $\mathbb{N}^\infty$ ako i samo ako je niz $(f(n))_n$ konvergentan, i pritom vrijedi $f(\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ (usporedite s napomenom na str. 38).

20. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S \neq \emptyset$. Udaljenost točke $P \in \mathbb{R}^n$ od skupa S definira se kao $d(P,S) := \inf\{\|P-Q\| : Q \in S\}$. Dokažite da je funkcija $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirana s $f(P) = d(P,S)$ uniformno neprekidna na $\mathbb{R}^n$. Usporedite s Primjerom 2.1(vi).

21. Neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan skup i $P \in \mathbb{R}^n$. Dokažite da postoji točka $Q_0 \in K$ takva da je $d(P,K) = \|P - Q_0\|$.

22. Udaljenost skupova $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, $A, B \neq \emptyset$ definiramo kao $d(A,B) := \inf\{\|P-Q\| : P \in A,\ Q \in B\}$. Pretpostavimo da vrijedi $A \cap B = \emptyset$.

    (a) Dokažite: ako je A kompaktan a B zatvoren skup onda je $d(A,B) > 0$.

    (b) Pokažite primjerom da udaljenost disjunktnih skupova A i B može biti 0 čak i ako su oba zatvoreni.

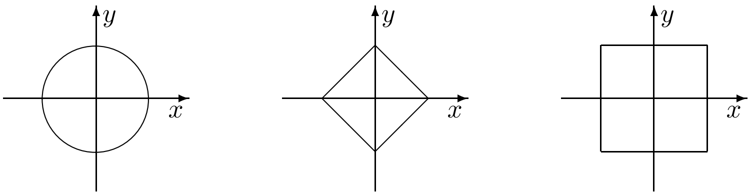
23. Definirajmo niz funkcija $f_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ formulom $f_k(t) := t^k$, $k \in \mathbb{N}$. Dokažite da niz (f_k) konvergira po točkama ali ne i uniformno na $[0,1]$.

24. Provjerite da su preslikavanja $\|\ \ \|_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $\|\ \ \|_\infty\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definirana s $\|P\|_1 := \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$, odnosno $\|P\|_\infty := \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$, također norme na $\mathbb{R}^n$. Pokažite da niti jedna od ove dvije norme ne zadovoljava relaciju paralelograma.

Relacija paralelograma je nužan i dovoljan uvjet za egzistenciju skalarnog produkta koji inducira zadanu normu na standardan način (ovdje tu činjenicu nećemo dokazivati). Stoga prethodni zadatak pokazuje da norme $\|\ \ \|_1$ i $\|\ \ \|_\infty$ ne potječu niti od jednog skalarnog produkta na $\mathbb{R}^n$. S druge strane svaka od ovih dviju normi inducira odgovarajuću metriku na $\mathbb{R}^n$: $d_1(P,Q) := \|P-Q\|_1$, $d_\infty(P,Q) := \|P-Q\|_\infty$. Na ovaj način definirali smo još dva metrička prostora: $(\mathbb{R}^n, d_1)$ i $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$. U svakome od njih također možemo promatrati

[1] Pavel Sergeevič Aleksandrov (1896–1982), ruski matematičar

kugle, otvorene skupove, konvergentne nizove, neprekidne funkcije... Na slici su prikazane jedinične kugle s centrom u $(0,0)$ u prostorima $(\mathbb{R}^2, d_2)$, $(\mathbb{R}^2, d_1)$ i $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ (u ovom kontekstu uobičajeno je euklidsku normu označavati s $\|\ \|_2$, i analogno, euklidsku metriku s d_2).



Značajno je, međutim, da su sva tri navedena metrička prostora u topološkom smislu ekvivalentna, to znači da sve tri navedene metrike dovode do jedne te iste familije otvorenih skupova. Štoviše, ako je $\|\ \|$ proizvoljna norma na $\mathbb{R}^n$ i d iz nje izvedena metrika, odgovarajuća topološka struktura bit će ekvivalentna euklidskoj topologiji na $\mathbb{R}^n$. Ovu činjenicu dokazat ćemo u Zadacima 26 i 28.

25. Neka je X realan vektorski prostor te neka su $\|\ \|$ i $\|\ \|'$ dvije norme na X. Kažemo da su norme $\|\ \|$ i $\|\ \|'$ ***ekvivalentne*** ako postoje brojevi $m, M > 0$ takvi da vrijedi $m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|$, $\forall x \in X$. Dokažite da je ekvivalentnost normi relacija ekvivalencije na skupu svih normi definiranih na X.

26. Neka su $\|\ \|$ i $\|\ \|'$ ekvivalentne norme na realnom vektorskom prostoru X. Dokažite:

    (a) Familije otvorenih skupova u X izvedene iz normi $\|\ \|$ i $\|\ \|'$ se podudaraju.

    (b) Neka je (x_k) niz u X i $x_0 \in X$. Tada je $x_0 = \lim_k x_k$ u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako je $x_0 = \lim_k x_k$ u metričkom prostoru (X, d'), (d i d' su izvedene metrike).

    (c) Preslikavanje $f\colon (X, d) \to \mathbb{R}$ je neprekidno u točki $x_0 \in X$ ako i samo ako je preslikavanje $f\colon (X, d') \to \mathbb{R}$ neprekidno u x_0.

27. Dokažite da su $\|\ \|_2$, $\|\ \|_1$ i $\|\ \|_\infty$ međusobno ekvivalentne norme na $\mathbb{R}^n$.

28. Sve norme na $\mathbb{R}^n$ su međusobno ekvivalentne. Dokažite!

29. Dokažite da su sve norme na proizvoljnom realnom konačno-dimenzionalnom prostoru X međusobno ekvivalentne. (Ako je $\dim X = \infty$ tvrdnja općenito ne vrijedi. Protuprimjer se može naći npr. u vektorskom prostoru $C([0,1]))$ svih neprekidnih realnih funkcija na segmentu $[0,1]$.

30. Neka su $(e_i)_1^n$, $(f_j)_1^m$ kanonske baze u $\mathbb{R}^n$, odnosno $\mathbb{R}^m$, te neka operatoru $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ u ovom paru baza pripada matrični zapis $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$. Pokažite da je formulom $\|A\|_\infty := \max\limits_{i,j} |\alpha_{i,j}|$ definirana norma na $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Možete li koristeći matrični zapis operatora definirati još koju normu na $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$?

31. Neka je $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Dokažite da su sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne:
    (a) A je neprekidan na $\mathbb{R}^n$.
    (b) A je neprekidan u točki $0 \in \mathbb{R}^n$.
    (c) A je ograničen.

32. Neka je $A \in \mathrm{Hom}\,\mathbb{R}^n$. Dokažite da su sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne:
    (a) A je regularan.
    (b) $\exists \delta > 0$ tako da je $\|Ax\| \geq \delta \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

33. Neka je $A_0, (A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Dokažite da su sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne:
    (a) $A_0 = \lim\limits_k A_k$.
    (b) $A_0 x = \lim\limits_k A_k x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
    (c) $(A_0 x \mid y) = \lim\limits_k (A_k x \mid y)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall y \in \mathbb{R}^m$.

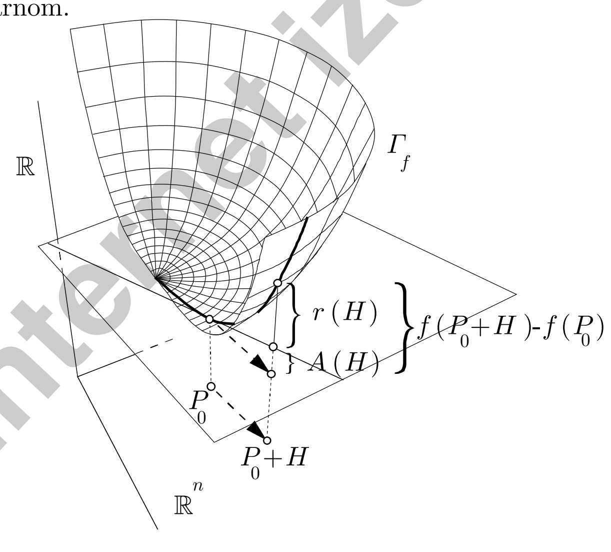
34. Neka je (X, d) metrički prostor. Dokažite da je sa $\rho(x,y) := \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$, $x, y \in X$, definirana nova metrika na X, koja je topološki ekvivalentna metrici d.

2

Diferencijal i derivacije

§ 7 Diferencijabilnost

Osnovna ideja diferencijalnog računa je zadanu funkciju što bolje lokalno aproksimirati linearnom.



Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup (to će nam odsad biti standardna oznaka), $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ preslikavanje, a $P_0 \in \Omega$ neka točka. Želimo prirast funkcije

$f(P_0+H)-f(P_0)$, gdje je $H \in \mathbb{R}^n$ takav da je $P_0+H \in \Omega$, aproksimirati vrijednošću $A(H)$, gdje je $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ neki, pogodno odabrani, linearni operator. Međutim, za neprekidno preslikavanje f, za svaki linearni operator $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ će greška $r(H) := f(P_0+H)-f(P_0)-A(H)$ težiti nuli za $H \to 0$ (zbog neprekidnosti linearnog operatora A). Stoga ćemo promatrati relativnu grešku $\frac{r(H)}{\|H\|}$ i preslikavanje f smatrati 'dobrim' ukoliko se ona može učiniti po volji malom za dovoljno malene H.

Definicija 7.1 Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, a $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ preslikavanje. Kažemo da je f ***diferencijabilno u točki*** $P_0 \in \Omega$ ukoliko postoji linearni operator $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ takav da postoji $\lim\limits_{H\to 0} \frac{f(P_0+H)-f(P_0)-A(H)}{\|H\|}$ i da je jednak nuli. f je ***diferencijabilno na*** Ω ukoliko je diferencijabilno u svakoj točki $P_0 \in \Omega$.

Propozicija 7.1 (Jedinstvenost diferencijala) *Ukoliko linearni operator A iz definicije diferencijabilnosti postoji, on je jedinstven.*

Dokaz: Pretpostavimo da je i $B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearni operator takav da je i $\lim\limits_{H\to 0} \frac{f(P_0+H)-f(P_0)-B(H)}{\|H\|} = 0$. Oduzimanjem ovog limesa od analognog limesa za operator A, dobivamo

$$\lim_{H\to 0} \frac{B(H)-A(H)}{\|H\|} = 0$$

tj.

$$\lim_{H\to 0} \frac{(B-A)(H)}{\|H\|} = 0\ .$$

Preslikavanje $C := (B-A)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je također linearan operator, te zbog neprekidnosti norme dobivamo

$$\lim_{H\to 0} \frac{\|C(H)\|}{\|H\|} = 0\ . \tag{1}$$

Tvrdimo da je C nul-operator, tj. da je $C(P)=0$ za sve $P \in \mathbb{R}^n$. Za $P=0$ je uvijek $C(P)=0$. Neka je dakle $P \neq 0$. Promatramo li restrikciju limesa (1) na potprostor razapet vektorom P, dobivamo

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}}} \frac{\|C(tP)\|}{\|tP\|} = 0\ . \tag{2}$$

No zbog linearnosti je

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|C(tP)\|}{\|tP\|}=\lim_{t\to 0}\frac{|t|\|C(P)\|}{|t|\|P\|}=\frac{\|C(P)\|}{\|P\|}\,,$$

pa zbog (2) zaključujemo $\|C(P)\|=0$, tj. $C(P)=0$, dakle $A=B$. ■

Ukoliko je, dakle, preslikavanje $f\colon \Omega\to\mathbb{R}^m$ diferencijabilno u točki $P_0\in\Omega$, onda je linearni operator A iz prethodne definicije jednoznačno određen. Taj linearni operator zovemo ***diferencijalom preslikavanja*** f u točki P_0 i označavamo s $Df(P_0)$ (koristi se i oznaka $df(P_0)$). Dakle, ako je f diferencijabilno u točki P_0, onda je diferencijal $Df(P_0)\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ jedinstveno određen linearni operator takav da je

$$f(P_0+H)-f(P_0)=Df(P_0)(H)+r(H)\quad \text{i}\quad \lim_{H\to 0}\frac{r(H)}{\|H\|}=0\,.$$

Napomena 7.1 (O lokalnom karakteru diferencijabilnosti) Diferencijabilnost je lokalno svojstvo preslikavanja. Iz definicije diferencijabilnosti i definicije limesa funkcije, očito vrijedi sljedeće: Neka su $f,g\colon\Omega\to\mathbb{R}^m$ dvije funkcije takve da postoji otvoren skup $U\subseteq\Omega$ oko točke P_0 takav da je $f|_U=g|_U$. Ako je f diferencijabilna u P_0 onda je i g diferencijabilna u P_0 i $Dg(P_0)=Df(P_0)$. Ovu ćemo primjedbu često koristiti.

Teorem 7.2 *Neka je $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ otvoren skup, a $f\colon\Omega\to\mathbb{R}^m$ diferencijabilno preslikavanje u $P_0\in\Omega$. Tada je f neprekidno u P_0.*

Dokaz: Zbog diferencijabilnosti je

$$f(P_0+H)-f(P_0)=Df(P_0)(H)+r(H)\,,\ \lim_{H\to 0}\frac{r(H)}{\|H\|}=0\,.$$

Kako je linearni operator $Df(P_0)$ neprekidan, dovoljno je pokazati neprekidnost u 0 preslikavanja r. Očito je $r(0)=0$ pa kako je $\lim_{H\to 0}\frac{r(H)}{\|H\|}=0$, zaključujemo da za svaki $\varepsilon>0$, postoji $\delta>0$ takav da za $\|H\|<\delta$ vrijedi $\|r(H)\|\le\varepsilon\|H\|$, pa je preslikavanje r neprekidno u 0. ■

Kod funkcija jedne realne varijable $f\colon\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$, osim o diferencijabilnosti, govori se i o ***derivabilnosti*** u točki $x_0\in\langle a,b\rangle$, a sâma ***derivacija***, tj. broj $f'(x_0):=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, je mjera brzine promjene funkcije f u točki x_0. Nešto slično se definira i za funkcije više varijabli, ali je jasno da, barem u principu, brzina promjene funkcije ovisi o smjeru promjene varijable.

Definicija 7.2 Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ preslikavanje, i neka je $V \in \mathbb{R}$ zadani vektor. Kažemo da f ima u točki $P_0 \in \Omega$ ***derivaciju duž vektora*** V, ako postoji limes $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(P_0+hV)-f(P_0)}{h}$. Taj broj, ukoliko postoji, označavat ćemo s $\partial_V f(P_0)$. Derivacija duž jediničnog vektora $\frac{V}{\|V\|}$ naziva se ***derivacija u smjeru*** vektora V. Derivacija duž vektora e_i, i-tog vektora standardne baze u $\mathbb{R}^n$, zove se ***parcijalna derivacija*** po i-toj varijabli funkcije f u točki P_0, i označava se s $\partial_i f(P_0)$ ili $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)$. Dakle

$$\begin{aligned}\partial_i f(P_0) &:= \lim_{h\to 0} \frac{f(P_0+he_i)-f(P_0)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^0,\dots,x_{i-1}^0,x_i^0+h,x_{i+1}^0,\dots,x_n^0) - f(x_1^0,\dots,x_i^0,\dots,x_n^0)}{h}\end{aligned}$$

Primijetimo da je parcijalna derivacija $\partial_j f(P_0)$ zapravo 'obična' derivacija u P_0 restrikcije funkcije f na pravac kroz P_0 koji je paralelan j-tom koordinatnom vektoru.

U malim dimenzijama, kad varijable od f označavamo s $x, y, z, \dots$ pisat ćemo i $\partial_x f(P_0)$, $\partial_y f(P_0)$ itd.

U definiciji derivacije duž vektora i parcijalnih derivacija, nije bilo nužno da se radi o realnoj funkciji. Na potpuno isti način definiraju se ti pojmovi i za vektorske funkcije, samo što to sada neće biti brojevi, nego vektori. Dakle, za preslikavanje $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ je

$$\begin{aligned}\partial_V f(P_0) &= (\partial_V f_1(P_0),\dots,\partial_V f_m(P_0)) \in \mathbb{R}^m \\ \partial_i f(P_0) &= (\partial_i f_1(P_0),\dots,\partial_i f_m(P_0)) \in \mathbb{R}^m, \quad i=1,\dots,n.\end{aligned}$$

Uočimo da su pojmovi diferencijabilnosti i diferencijala s jedne strane, i derivacije duž vektora odnosno parcijalnih derivacija s druge strane, nezavisno definirani. Uskoro ćemo vidjeti koja je veza između diferencijala i parcijalnih derivacija, a kasnije i derivacije duž vektora.

Promotrimo sada neke posebne slučajeve:

7.3 $n = m = 1$

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ otvoren skup, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ i $x_0 \in \Omega$. Ako je preslikavanje f diferencijabilno u točki x_0 onda je $Df(x_0)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jedinstveno određen linearni operator takav da je

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Df(x_0)(h)}{|h|} = 0 \ .$$

Međutim, za linearni operator (funkcional) $Df(x_0)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jedinstveno je određen broj $a \in \mathbb{R}$ takav da je $Df(x_0)(h) = a \cdot h$, za sve $h \in \mathbb{R}$. Stoga je $a \in \mathbb{R}$ jedinstveno određen broj za koji je $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-a\cdot h}{|h|} = 0$, odakle zaključujemo, promatrajući jednostrane limese $\lim\limits_{h\to 0+}$ i $\lim\limits_{h\to 0-}$, da je a jednak limesu $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, tj. funkcija f je derivabilna u točki x_0 i broj $a = f'(x_0)$ je derivacija funkcije f u točki x_0. Dakle, $Df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h$, tj. derivacija $f'(x_0)$ je numerički reprezentant diferencijala $Df(x_0)$. Uobičajena je i oznaka $\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$.

Obratno, ako postoji derivacija $f'(x_0)$ funkcije f u točki x_0, onda za linearni funkcional $h \mapsto f'(x_0) \cdot h$ vrijedi $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot h}{|h|} = 0$, pa je f diferencijabilna u x_0.

Dakle, za realne funkcije jedne varijable su diferencijabilnost i derivabilnost ekvivalentna svojstva. (Dok su *diferencijal* i *derivacija* različite stvari — diferencijal je linearan operator, a derivacija je broj!) Kod funkcija više varijabli stvar je, međutim, drukčija.

7.4 $m = 1$

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, a $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ preslikavanje diferencijabilno u $P_0 \in \Omega$. Za diferencijal $Df(P_0)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ postoji jedinstven vektor $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ takav da je

$$Df(P_0)(H) = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i \ , \ \forall H = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n \ ,$$

pa su $a_1, \ldots, a_n$ jedinstveno određeni realni brojevi takvi da je

$$\lim_{H\to 0} \frac{f(P_0+H) - f(P_0) - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i h_i}{\|H\|} = 0 \ .$$

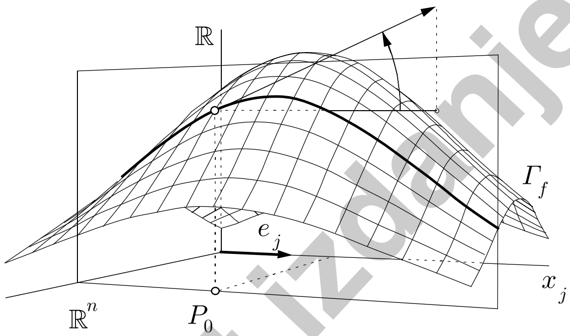
Specijalno, za $H = he_j$, gdje su $e_1, \dots, e_n$ vektori standardne ortonormirane baze u $\mathbb{R}^n$, je

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(P_0 + he_j) - f(P_0) - a_j h}{|h|} = 0$$

pa kao i u 7.3 zaključujemo da je

$$a_j = \lim_{h\to 0} \frac{f(P_0 + he_j) - f(P_0)}{h} \ ,$$

tj. koordinate vektora kojim je reprezentiran diferencijal $Df(P_0)$ su upravo parcijalne derivacije $\partial_i f(P_0)$ funkcije f u točki P_0.



Dakle, ako je funkcija f diferencijabilna u $P_0 \in \Omega$ onda postoje parcijalne derivacije po svim varijablama i vrijedi

$$Df(P_0)(H) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(P_0) h_i \ \ , \ H \in \mathbb{R}^n \ .$$

Obratno, međutim, ne vrijedi. Parcijalne derivacije mogu postojati i u slučaju kad funkcija nije diferencijabilna. Naprimjer, funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ima u točki $0 = (0,0)$ obje parcijalne derivacije i one su jednake 0, iako f nije diferencijabilna u 0 (jer nije niti neprekidna) pa diferencijal $Df(0)$ ne postoji.

Neka je $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vektorski prostor linearnih funkcionala na $\mathbb{R}^n$, dakle ***dualni prostor*** od $\mathbb{R}^n$, a $dx_1, \dots, dx_n \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vektori ***dualne baze*** s obzirom na standardnu bazu $e_1, \dots, e_n$. Dakle, $dx_i(H) = h_i$ za svaku točku $H = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$. Tada za diferencijal $Df(P_0)$ funkcije $f : \Omega \to \mathbb{R}$ imamo

$$Df(P_0)(H) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(P_0) h_i = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(P_0)\, dx_i(H)$$

za svaki $H \in \mathbb{R}^n$, pa je

$$Df(P_0) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(P_0)\, dx_i \tag{3}$$

prikaz diferencijala $Df(P_0)$ u standardnoj bazi prostora $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Oznake $dx_1, \dots, dx_n$ za vektore dualne baze, u kontekstu diferencijabilnih funkcija, su uobičajene. To dolazi od činjenice da dx_i možemo interpretirati kao diferencijal funkcije $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$, tj. i-te projekcije $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Budući su vektorski prostori $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ i $\mathbb{R}^n$ izomorfni, to se oni često identificiraju, i to tako da se linearnom funkcionalu (linearnom operatoru) pridruži njegova matrica s obzirom na standardne baze u prostorima $\mathbb{R}^n$ odnosno $\mathbb{R}$, dakle uređena n-torka realnih brojeva. Uz tu identifikaciju, diferencijal $Df(P_0)$ identificira se s vektorom $(\partial_1 f(P_0), \partial_2 f(P_0), \dots, \partial_n f(P_0))$ koji se naziva ***gradijent funkcije*** f u točki P_0 i označava s $\mathrm{grad}\, f(P_0)$ ili $\nabla f(P_0)$ (∇ se izgovara *nabla*). Veza diferencijala i gradijenta dâna je s

$$\begin{aligned} Df(P_0)(H) &= (\mathrm{grad}\, f(P_0) \mid H) \\ &= (\nabla f(P_0) \mid H)\,, \quad H \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

7.5 U općem slučaju, neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, a $f = (f_1, \dots, f_m) \colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ preslikavanje diferencijabilno u točki $P_0 \in \Omega$. Diferencijal $Df(P_0) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je jedinstven linearni operator takav da je

$$f(P_0 + H) - f(P_0) = Df(P_0)(H) + r(H) \tag{4}$$

pri čemu je $\displaystyle\lim_{H \to 0} \frac{r(H)}{\|H\|} = 0$.

Raspišemo li (4) po koordinatama, dobivamo

$$f_i(P_0 + H) - f_i(P_0) = (Df(P_0))_i(H) + r_i(H)$$

uz $\displaystyle\lim_{H \to 0} \frac{r_i(H)}{\|H\|} = 0$, $i = 1, \dots, m$, gdje je $(Df(P_0))_i$ i-ta koordinata preslikavanja $Df(P_0)$. Odavde zaključujemo da su funkcije $f_i \colon \Omega \to \mathbb{R}$ diferencijabilne u P_0 i zbog jedinstvenosti linearnog operatora u definiciji diferencijabilnosti je

$$(Df(P_0))_i = Df_i(P_0) \;, \tag{5}$$

tj. i-ta komponenta diferencijala preslikavanja f je diferencijal i-te komponente f_i preslikavanja f.

Stoga je $(Df(P_0)(H))_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \partial_j f_i(P_0) h_j$, $i = 1, \ldots, m$. Dakle, ako pišemo $f = (f_1, \ldots, f_m) = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i e_i$, onda je

$$Df(P_0)(H) = \sum_{i=1}^{m} Df_i(P_0)(H)\, e_i \;, \tag{6}$$

dakle

$$\underbrace{Df(P_0)(e_j)}_{j\text{-ti supac}} = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{Df_i(P_0)(e_j)}_{=\partial_j f_i(P_0)} e_i \,. \tag{7}$$

Matrica $\dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(P_0) := (\partial_j f_i(P_0))$ koja u i-tom retku i j-tom stupcu ima parcijalnu derivaciju i-te koordinatne funkcije po j-toj varijabli, naziva se ***Jacobijeva***[1] ***matrica*** preslikavanja f u točki P_0. To je, dakle, numerički reprezentant diferencijala $Df(P_0)$ u pâru standardnih baza prostora $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$. U analogiji s realnim funkcijama jedne varijable Jacobijevu matricu bi bilo opravdano zvati ***derivacijom*** vektorske funkcije više varijabli. U slučaju $m = n$, determinanta $\det Df(P_0) = \det \dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(P_0)$ naziva se ***Jacobijan preslikavanja*** f u točki P_0, i često se označava s $Jf(P_0)$.

7.6 $n = 1$

Za vektorsku funkciju *jedne realne* varijable $f = (f_1, \ldots, f_m) \colon \Omega \to \mathbb{R}^m$, gdje je $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, diferencijal u točki $x_0 \in \Omega$ je linearan operator $Df(x_0) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, i prema 7.5 za $h \in \mathbb{R}$ je

$$Df(x_0)(h) = (Df_1(x_0)(h), \ldots, Df_m(x_0)(h)) \;.$$

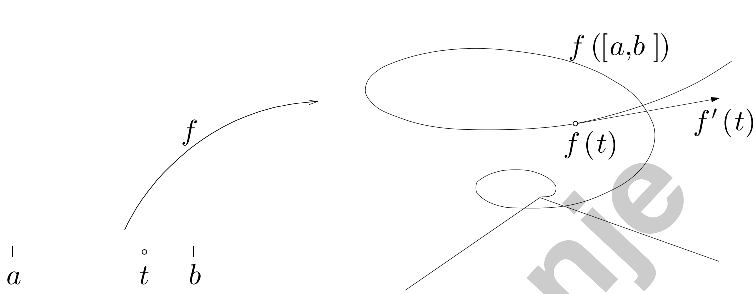
Budući su f_i realne funkcije, to je, prema 7.3, $Df_i(x_0)(h) = f_i'(x_0) \cdot h$, $i = 1, \ldots, m$. Stoga je

$$Df(x_0)(h) = (f_1'(x_0)h, \ldots, f_m'(x_0)h) = (f_1'(x_0), \ldots, f_m'(x_0)) \cdot h \;.$$

[1] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), njemački matematičar

Vektor $f'(x_0) := (f_1'(x_0), \ldots, f_m'(x_0)) \in \mathbb{R}^m$, čije su komponente derivacije koordinatnih funkcija, zove se ***derivacija*** (vektorske) ***funkcije*** f u točki x_0. Dakle i za vektorske funkcije realne varijable, diferencijabilnost je ekvivalentna postojanju derivacije i vrijedi

$$Df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h \,, \qquad h \in \mathbb{R} \,.$$



7.7 U čitavom poglavlju ćemo promatrati funkcije $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ ili $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, gdje je *uvijek* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Zbog jednostavnijeg zapisa, to ćemo obično označavati s $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

§ 8 Svojstva diferencijala i diferencijabilnih preslikavanja

Promotrit ćemo najprije neke primjere diferencijabilnih preslikavanja.

Primjer 8.1 Neka je $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ konstantno preslikavanje. Tada je f diferencijabilno u svakoj točki $P_0 \in \Omega$ i $Df(P_0) = 0$, tj. diferencijal konstantnog preslikavanja je nul-operator. Specijalno, sve su parcijalne derivacije konstantnog preslikavanja jednake nuli.

To slijedi iz toga što je

$$\begin{aligned} f(P_0 + H) - f(P_0) &= 0 \\ &= 0(H) + 0 \end{aligned}$$

i Propozicije 7.1 o jedinstvenosti diferencijala.

Primjer 8.2 Neka je $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearni operator. Tada je f diferencijabilan na $\mathbb{R}^n$ i $Df(P_0) = f$ u svakoj točki $P_0 \in \mathbb{R}^n$.

To slijedi iz činjenice da je

$$f(P_0 + H) - f(P_0) = f(H) + 0 \qquad \forall P_0, H \in \mathbb{R}^n \ .$$

Ova je činjenica u skladu s osnovnom idejom da se proizvoljno preslikavanje f lokalno aproksimira linearnim. Jer ako f već je linearno, onda je njegova najbolja linearna aproksimacija — sâmo preslikavanje f.

Kako je diferencijabilnost lokalno svojstvo, Napomena 7.1, zaključujemo da ukoliko je preslikavanje $g\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ restrikcija linearnog operatora $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g = f|_\Omega$, onda je i g diferencijabilno na Ω i $Dg(P_0) = f$, $\forall P_0 \in \Omega$.

Propozicija 8.1 *Neka su $f, g\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikavanja diferencijabilna u točki $P_0 \in \Omega$ i neka su $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada je i preslikavanje $\lambda f + \mu g\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilno u $P_0 \in \Omega$ i vrijedi*

$$D(\lambda f + \mu g)(P_0) = \lambda Df(P_0) + \mu Dg(P_0) \ .$$

Specijalno, za parcijalne derivacije vrijedi

$$\partial_i(\lambda f + \mu g)(P_0) = \lambda \partial_i f(P_0) + \mu \partial_i g(P_0) \ , \quad i = 1, \dots, n \ .$$

Dokaz: Zbog diferencijabilnosti preslikavanja f i g u P_0 je

$$f(P_0 + H) - f(P_0) = Df(P_0)(H) + r_1(H) \ , \ \lim_{H \to 0} \frac{r_1(H)}{\|H\|} = 0 \tag{1}$$

$$g(P_0 + H) - g(P_0) = Dg(P_0)(H) + r_2(H) \ , \ \lim_{H \to 0} \frac{r_2(H)}{\|H\|} = 0 \tag{2}$$

pa je

$$\begin{aligned}
(\lambda f + \mu g)&(P_0 + H) - (\lambda f + \mu g)(P_0) = \\
&= \lambda f(P_0 + H) - \lambda f(P_0) + \mu g(P_0 + H) - \mu g(P_0) = \\
&= \lambda\big(Df(P_0)(H) + r_1(H)\big) + \mu\big(Dg(P_0)(H) + r_2(H)\big) = \\
&= (\lambda Df(P_0) + \mu Dg(P_0))(H) + \lambda r_1(H) + \mu r_2(H)
\end{aligned}$$

i $\lim\limits_{H \to 0} \dfrac{\lambda r_1(H) + \mu r_2(H)}{\|H\|} = 0$. Tvrdnja sada slijedi iz jedinstvenosti diferencijala, Propozicija 7.1. ■

Propozicija 8.2 *Neka su $f, g\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ preslikavanja diferencijabilna u $P_0 \in \Omega$. Tada je i produkt $f \cdot g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ diferencijabilan u P_0 i vrijedi*

$$D(fg)(P_0) = f(P_0)Dg(P_0) + g(P_0)Df(P_0)\,.$$

Specijalno, za parcijalne derivacije vrijedi

$$\partial_i(fg)(P_0) = \partial_i f(P_0)g(P_0) + f(P_0)\partial_i g(P_0)\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Ukoliko je funkcija f realna, a funkcija g vektorska, analogna tvrdnja, i formula, vrijedi za produkt skalarne i vektorske funkcije, a u slučaju da su obje funkcije vektorske, s istom kodomenom $\mathbb{R}^m$, analogna tvrdnja i formula vrijedi za skalarni, a u slučaju $m = 3$ i vektorski, produkt.

Dokaz: Zbog diferencijabilnosti vrijedi (1) i (2) pa je

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)\,(P_0 + H) - (f \cdot g)(P_0) &= f(P_0 + H) \cdot g(P_0 + H) - f(P_0) \cdot g(P_0) = \\
&= f(P_0)\big(g(P_0 + H) - g(P_0)\big) + \big(f(P_0 + H) - f(P_0)\big)g(P_0) + \\
&\qquad + \big(f(P_0 + H) - f(P_0)\big)\big(g(P_0 + H) - g(P_0)\big) = \\
&= f(P_0)\big(Dg(P_0)(H) + r_2(H)\big) + \big(Df(P_0)(H) + r_1(H)\big)g(P_0) + \\
&\qquad + \big(Df(P_0)(H) + r_1(H)\big)\big(Dg(P_0)(H) + r_2(H)\big) = \\
&= f(P_0)Dg(P_0)(H) + g(P_0)Df(P_0)(H) + f(P_0)r_2(H) + g(P_0)r_1(H) + \\
&\qquad + \big(Df(P_0)(H) + r_1(H)\big)\big(Dg(P_0)(H) + r_2(H)\big)\,.
\end{aligned}$$

Prva dva sumanda daju upravo ono što želimo, ukoliko pokažemo da je ostatak, tj. zadnja tri sumanda, dovoljno malen s obzirom na $\|H\|$. Za treći i četvrti sumand je zbog (1) i (2) očito

$$\lim_{H\to 0} \frac{f(P_0)r_2(H)}{\|H\|} = 0 \quad i \quad \lim_{H\to 0} \frac{g(P_0)r_1(H)}{\|H\|} = 0 \quad .$$

Kako su linearni funkcionali $Df(P_0)$ i $Dg(P_0)$ ograničeni (Teorem 2.21), postoje $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ takvi da za sve $H \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $\|Df(P_0)(H)\| \le \lambda_1\|H\|$ i $\|Dg(P_0)(H)\| \le \lambda_2\|H\|$. Stoga je

$$\begin{aligned}
0 &\le \frac{\|Df(P_0)(H) + r_1(H)\|\;\|Dg(P_0)(H) + r_2(H)\|}{\|H\|} \le \\
&\le \Big(\lambda_1 + \frac{\|r_1(H)\|}{\|H\|}\Big)\Big(\lambda_2\|H\| + \|r_2(H)\|\Big)
\end{aligned}$$

što teži k nuli za $H \to 0$ zbog (1) i činjenice da je $\lim\limits_{H\to 0} r_2(H) = 0$ (vidi dokaz Teorema 7.2). ■

Propozicija 8.3 *Neka su $f, g\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcije diferencijabilne u točki $P_0 \in \Omega$ i neka je $g(P_0) \neq 0$. Tada je i kvocijent $\frac{f}{g}$ diferencijabilna funkcija u P_0 i vrijedi*

$$D\Big(\frac{f}{g}\Big)(P_0) = \frac{1}{(g(P_0))^2}\big(g(P_0)Df(P_0) - f(P_0)Dg(P_0)\big)\ .$$

Dokaz: Zbog neprekidnosti funkcije g u točki P_0 (Teorem 7.2), g je različito od 0 i na nekoj okolini točke P_0 (Lema 2.9), pa je i funkcija $\frac{f}{g}$ definirana na nekoj okolini točke P_0. Zbog prethodnog teorema, dovoljno je pokazati da je funkcija $\frac{1}{g}$ diferencijabilna u P_0.

Neka je $g(P_0 + H) - g(P_0) = B(H) + r(H)$, $\lim\limits_{H\to 0} \frac{r(H)}{\|H\|} = 0$, pri čemu je $B := Dg(P_0)$. Tada je

$$\begin{aligned}\frac{1}{g(P_0+H)} - \frac{1}{g(P_0)} &= -\frac{g(P_0+H) - g(P_0)}{g(P_0)\cdot g(P_0+H)} = -\frac{B(H) + r(H)}{g(P_0)\cdot g(P_0+H)} = \\ &= -\frac{B(H)}{(g(P_0))^2} + \frac{B(H)g(P_0+H) - g(P_0)(B(H)+r(H))}{(g(P_0))^2 g(P_0+H)}\end{aligned}$$

Prvi sumand je ono što trebamo, a norma drugog sumanda, podijeljena s $\|H\|$, daje

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\|H\|}\cdot\frac{\|B(H)[g(P_0+H) - g(P_0)] - g(P_0)r(H)\|}{\|g(P_0)\|^2\|g(P_0+H)\|} \leq \\ &\quad\leq \frac{1}{\|g(P_0)\|^2\|g(P_0+H)\|}\Big(\frac{\|B(H)\|}{\|H\|}\|g(P_0+H) - g(P_0)\| + \|g(P_0)\|\frac{\|r(H)\|}{\|H\|}\Big)\end{aligned}$$

što teži nuli za $H \to 0$, jer je linearni operator B ograničen, g je neprekidno u P_0 i $\lim\limits_{H\to 0}\frac{r(H)}{\|H\|} = 0$. Zaključujemo da je funkcija $\frac{1}{g}$ diferencijabilna u P_0 i $Dg(P_0) = -\frac{1}{(g(P_0))^2}Dg(P_0)$. Prema prethodnom teoremu je sada

$$\begin{aligned}D\Big(\frac{f}{g}\Big)(P_0) &= D\Big(\frac{1}{g}\cdot f\Big)(P_0) = \\ &= \frac{1}{g(P_0)}Df(P_0) - \frac{f(P_0)}{(g(P_0))^2}Dg(P_0)\end{aligned}$$

odakle dobivamo traženi izraz za diferencijal kvocijenta. ■

Sljedeći teorem pokazuje da se kompozicijom diferencijabilnih preslikavanja ponovo dobiva diferencijabilno preslikavanje i da linearna aproksimacija preslikavanja 'prati' kompoziciju.

Teorem 8.4 (O diferencijabilnosti kompozicije) *Neka su* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^m$ *otvoreni skupovi,* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$, $g\colon \Sigma \to \mathbb{R}^p$ *preslikavanja takva da je* $f(\Omega) \subseteq \Sigma$. *Ako je* f *diferencijabilno u* $P_0 \in \Omega$, *a* g *diferencijabilno u točki* $Q_0 := f(P_0) \in \Sigma$, *onda je kompozicija* $g \circ f\colon \Omega \to \mathbb{R}^p$ *diferencijabilna u* P_0 *i vrijedi* $D(g \circ f)(P_0) = Dg(f(P_0)) \circ Df(P_0)$.

Dokaz: Zbog diferencijabilnosti je

$$f(P) - f(P_0) = Df(P_0)(P - P_0) + r_1(P - P_0)\ , \qquad \lim_{P \to P_0} \frac{r_1(P - P_0)}{\|P - P_0\|} = 0$$

$$g(Q) - g(Q_0) = Dg(Q_0)(Q - Q_0) + r_2(Q - Q_0)\ , \qquad \lim_{Q \to Q_0} \frac{r_2(Q - Q_0)}{\|Q - Q_0\|} = 0\ .$$

Stoga je

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(P) - (g \circ f)(P_0) &= g(f(P)) - g(f(P_0)) = \\
&= Dg(f(P_0))(f(P) - f(P_0)) + r_2(f(P) - f(P_0)) = \\
&= Dg(f(P_0))\big(Df(P_0)(P - P_0) + r_1(P - P_0)\big) + r_2(f(P) - f(P_0)) = \\
&= \big(Dg(f(P_0)) \circ Df(P_0)\big)(P - P_0) + Dg(f(P_0))(r_1(P - P_0)) + r_2(f(P) - f(P_0))\ .
\end{aligned}$$

Prvi sumand je ono što trebamo pa treba pokazati da su ostala dva sumanda 'dovoljno mala'.

Za drugi sumand, zbog neprekidnosti linearnog operatora, imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{P \to P_0} \frac{Dg(f(P_0))(r_1(P - P_0))}{\|P - P_0\|} &= \lim_{P \to P_0} Dg(f(P_0))\Big(\frac{r_1(P - P_0)}{\|P - P_0\|}\Big) = \\
&= Dg(f(P_0))\Big(\lim_{P \to P_0} \frac{r_1(P - P_0)}{\|P - P_0\|}\Big) = Dg(f(P_0))(0) = 0\ .
\end{aligned}$$

Nadalje, zbog $\lim_{Q \to Q_0} \frac{r_2(Q - Q_0)}{\|Q - Q_0\|} = 0$, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta' > 0$ takav da za $\|Q - Q_0\| < \delta'$ vrijedi $\|r_2(Q - Q_0)\| \le \varepsilon \|Q - Q_0\|$. Zbog neprekidnosti preslikavanja f u P_0, postoji $\delta > 0$ takav da za sve $P \in \Omega$ za koje je $\|P - P_0\| < \delta$ vrijedi $\|f(P) - f(P_0)\| < \delta'$, te je $\|r_2(f(P) - f(P_0))\| \le \varepsilon \|f(P) - f(P_0)\|$. Kako je linearni operator $Df(P_0)$ ograničen, postoji $\lambda > 0$ takav da je $\|Df(P_0)(H)\| \leq \lambda\|H\|$ za sve $H \in \mathbb{R}^n$. Stoga je

$$\begin{aligned}\frac{\|r_2(f(P)-f(P_0))\|}{\|P-P_0\|} &\leq \frac{\varepsilon\|f(P)-f(P_0)\|}{\|P-P_0\|} \leq \\ &\leq \varepsilon\,\frac{\|Df(P_0)(P-P_0)\| + \|r_1(P-P_0)\|}{\|P-P_0\|} \leq \\ &\leq \varepsilon\left(\lambda + \frac{\|r_1(P-P_0)\|}{\|P-P_0\|}\right)\end{aligned}$$

Kako je $\lim\limits_{P\to P_0} \frac{\|r_1(P-P_0)\|}{\|P-P_0\|} = 0$, a ε je proizvoljan, zaključujemo da je $\lim\limits_{P\to P_0} \frac{r_2(f(P)-f(P_0))}{\|P-P_0\|} = 0$, čime je dokaz završen. ■

Promotrimo sada kako se to odražava na parcijalne derivacije kompozicije. Neka su f i g diferencijabilna preslikavanja kao u Teoremu 8.4. Jacobijeve matrice $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(P_0)$ i $\frac{\partial(g_1,\ldots,g_p)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}(Q_0)$ su matrice pridružene diferencijalima $Df(P_0)$ i $Dg(Q_0)$ obzirom na standardne baze u $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^p$. Diferencijalu $Dh(P_0)$ kompozicije $h = g\circ f$ pridružena je Jacobijeva matrica $\frac{\partial(h_1,\ldots,h_p)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(P_0)$, pa je prema Teoremu 8.4

$$\frac{\partial(h_1,\ldots,h_p)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(P_0) = \frac{\partial(g_1,\ldots,g_p)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}(Q_0)\cdot\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(P_0)\ ,$$

jer je kompoziciji linearnih operatora pridružen produkt njihovih matrica. Odavde za parcijalne derivacije kompozicije $h = g\circ f$, prema definiciji množenja matrica, dobivamo

$$\partial_j h_k(P_0) = \sum_{i=1}^{m} \partial_i g_k(Q_0)\cdot\partial_j f_i(P_0) \tag{3}$$

Specijalno, za $p = 1$ imamo

$$\partial_j h(P_0) = \sum_{i=1}^{m} \partial_i g(f(P_0))\cdot\partial_j f_i(P_0)$$

ili s drugim oznakama

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(P_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(P_0))\cdot\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P_0)\ .$$

Napomena 8.1 Kao što smo vidjeli, iz diferencijabilnosti preslikavanja f i g slijedi diferencijabilnost njihove kompozicije. Međutim, postojanje parcijalnih derivacija od f i g ne osigurava postojanje parcijalnih derivacija kompozicije, kao što pokazuje sljedeći primjer:

Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dano s $f(t) = (t, 2t)$, a $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & , \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \ (x, y) = (0, 0) \ . \end{cases}$$

Tada je $f(0) = (0, 0)$, $f'(0) = (1, 2)$, $\partial_x g(0, 0) = 0$ i $\partial_y g(0, 0) = 0$ pa bi prema (3) trebalo biti $(g \circ f)'(0) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 0$. Međutim, za kompoziciju $g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je

$$(g \circ f)(t) = \begin{cases} \dfrac{t \cdot 2t}{t^2 + 4t^2} & , \ t \neq 0 \\ 0 & , \ t = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{5} & , \ t \neq 0 \\ 0 & , \ t = 0 \end{cases}$$

pa ona nema derivaciju u 0 (jer bi kao realna funkcija jedne varijable tada bila i diferencijabilna, dakle i neprekidna, što nije).

Razlog je naravno u tome što funkcija g nije diferencijabilna u $(0, 0)$ (iako ima parcijalne derivacije), pa ne možemo primijeniti Teorem 8.4 dakle niti njegovu posljedicu—formulu (3).

Kao jednostavnu posljedicu Teorema 8.4 dobivamo

Korolar 8.5 (O diferencijalu inverzne funkcije) *Neka su $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoreni skupovi, a $f\colon \Omega \to \Omega'$ $g\colon \Omega' \to \Omega$ preslikavanja takva da je $g \circ f = 1_\Omega$, $f \circ g = 1_{\Omega'}$. Ako je f diferencijabilno u $P_0 \in \Omega$, a g diferencijabilno u $Q_0 := f(P_0) \in \Omega'$, onda je diferencijal $Df(P_0)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ regularan operator i vrijedi*

$$Dg(Q_0) = (Df(P_0))^{-1} \ . \tag{4}$$

Dokaz: Kako je $g \circ f = 1_\Omega$, to se preslikavanja $g \circ f\colon \Omega \to \Omega'$ i $1_{\mathbb{R}^n}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ podudaraju na otvorenom skupu, pa su, prema Napomeni 7.1 o lokalnom karakteru diferencijabilnosti, i njihovi diferencijali jednaki. Stoga je, prema Teoremu 8.4,

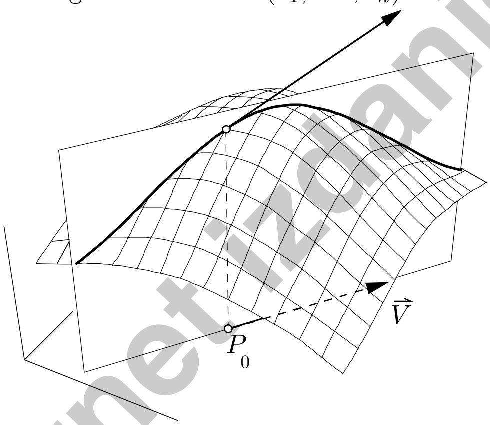
$$Dg(Q_0) \circ Df(P_0) = D(1_{\mathbb{R}^n})(P_0) = 1_{\mathbb{R}^n} \ .$$

Analogno dobivamo $Df(P_0) \circ Dg(Q_0) = 1_{\mathbb{R}^n}$, odakle slijedi da su $Df(P_0)$ i $Dg(Q_0)$ regularni operatori i vrijedi (4). ■

Preslikavanje g u prethodnom korolaru zove se ***inverzno preslikavanje*** preslikavanja f i označava se s $f^{-1}\colon \Omega' \to \Omega$. Korolar 8.5, dakle, tvrdi da ako su f i f^{-1} diferencijabilna preslikavanja, onda su i njihovi diferencijali međusobno inverzni, tj. vrijedi

$$D(f^{-1})(f(P_0)) = (Df(P_0))^{-1} \ . \tag{5}$$

8.6 Derivacija duž vektora Kao primjer upotrebe Teorema 8.4 promotrimo derivaciju duž vektora odnosno derivaciju u smjeru. Neka je $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija diferencijabilna u točki $P_0 \in \Omega$. Zanima nas 'brzina promjene' funkcije u smjeru nekog vektora $V \in \mathbb{R}^n$. U tu svrhu gledamo restrikciju funkcije f na pravac kroz P_0 određen vektorom V. To će biti 'funkcija jedne varijable' pa ćemo gledati njenu derivaciju u P_0. Neka je $\varphi\colon t \mapsto P_0 + tV$, $t \in \mathbb{R}$, parametrizacija pravca kroz P_0 određenog vektorom $V = (v_1, \dots, v_n)$.



Kako je Ω otvoren, a φ neprekidno preslikavanje, postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $\varphi(\langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle) \subseteq \Omega$. Preslikavanje $\varphi\colon \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle \to \mathbb{R}^n$ je diferencijabilno (jer je jednako sumi konstantne funkcije $t \mapsto P_0$ i restrikcije linearnog operatora $t \mapsto t \cdot V$) i $\varphi(0) = P_0$. Prema teoremu o kompoziciji diferencijabilnih funkcija je kompozicija $g = f \circ \varphi\colon \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u 0 i vrijedi

$$g'(0) = \frac{d(f \circ \varphi)}{dt}(0) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(P_0)\varphi_i'(0) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(P_0) v_i = Df(P_0)(V) \ . \tag{6}$$

S druge strane je, prema definiciji derivacije,

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(P_0 + hV) - f(P_0)}{h} \,,$$

pa je to upravo derivacija funkcije f duž vektora V, dakle

$$\partial_V f(P_0) = Df(P_0)(V) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(P_0) v_i = (\nabla f(P_0) \mid V).$$

Zadaci

1. Neka je $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $f(x,y) := \begin{cases} \frac{x}{y} & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$. Dokažite da f ima obje parcijalne derivacije u točki $(0,0)$ premda f nije ograničena niti u jednoj okolini ishodišta.

2. Neka je $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & , x^2+y^4 \neq 0 \\ 0 & , x = y = 0 \end{cases}$. Dokažite da f ima obje parcijalne derivacije u točki $(0,0)$ ali nije neprekidna (pa zato ni diferencijabilna) u $(0,0)$.

3. Neka je $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija dana s $f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & , x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & , x = y = 0 \end{cases}$. Dokažite da f ima u točki $(0,0)$ derivacije u smjeru svih vektora (posebno i obje parcijalne derivacije); neprekidna je u $(0,0)$, ali ipak nije diferencijabilna u $(0,0)$.

4. Dokažite da je funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2y + e^{xy}$ diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$. Izračunajte parcijalne derivacije i diferencijal od f u proizvoljnoj točki (x_0, y_0).

5. Neka je $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & , x = y = 0 \end{cases}$. U kojim je točkama f diferencijabilna?

6. Može li se funkcija $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := \frac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}$ dodefinirati u točki $(0,0,0)$ tako da bude diferencijabilna na $\mathbb{R}^3$?

7. Neka za funkciju $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vrijedi $f(x,y) = f(y,x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Dokažite: ako postoji jedan od brojeva $\partial_1 f(x_0, y_0)$ i $\partial_2 f(y_0, x_0)$ onda postoji i drugi i tada su oni jednaki.

8. Dokažite da je $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x,y) := |xy|$ diferencijabilna u točki $(0,0)$, ali nije diferencijabilna niti na jednom otvorenom krugu s centrom u $(0,0)$.

9. Neka za funkciju $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vrijedi $|f(x,y)| \leq (|x|+|y|)^2$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ispitajte diferencijabilnost od f u $(0,0)$.

10. Ispitajte diferencijabilnost funkcije $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirane formulom $f(x,y) := \begin{cases} x^2+y^2 & \text{, za } x,y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{, inače} \end{cases}$.

11. Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ simetrična matrica te neka je funkcija $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirana formulom $f(P) := (AP \mid P)$. Dokažite da je f diferencijabilna na $\mathbb{R}^n$ te da vrijedi $Df(P_0)(P) = 2\,(AP_0 \mid P)$, $\forall P_0, P \in \mathbb{R}^n$.

12. Dokažite da za funkciju $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadanu s $q(P) := \|P\|^2$ vrijedi $Dq(P_0)(P) = 2(P_0 \mid P)$, $\forall P_0, P \in \mathbb{R}^n$.

13. Neka je funkcija $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilna u $P_0 \in \mathbb{R}^n$. Dokažite da je tada i funkcija $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirana s $g(P) := \sin \|f(P)\|^2$ diferencijabilna u P_0 i izračunajte $Dg(P_0)(P)$.

14. Zadani su vektor $T \in \mathbb{R}^m$ i funkcija $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ koja je diferencijabilna u točki $P_0 \in \mathbb{R}^n$. Dokažite da je tada funkcija $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirana s $g(P) := (f(P) \mid T)$, diferencijabilna u P_0, i vrijedi $Dg(P_0)(P) = (Df(P_0)(P) \mid T)$.

15. Neka za funkcije $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vrijedi: g je neprekidna u P_0, f je diferencijabilna u P_0, $f(P_0) = 0$. Dokažite da je tada i funkcija $f \cdot g$ diferencijabilna u točki P_0. Usporedite s Propozicijom 8.2!

16. Neka za funkcije $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vrijedi: g je neprekidna u točki P_0, f je diferencijabilna u P_0, $f(P_0) = 0$. Ispitajte diferencijabilnost funkcije $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirane s $h(P) := (f(P) \mid g(P))$ u točki P_0.

17. Neka je $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilna na $\mathbb{R}^n$ takva da je $\|f\|$ konstanta. Dokažite: $Df(P_0)(P) \perp f(P_0)$, $\forall P_0, P \in \mathbb{R}^n$.

18. Neka je $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija takva da su $\nabla(P)$ i P kolinearni vektori $\forall P \in \mathbb{R}^2$. Dokažite da je f konstantna na svakoj kružnici s centrom u ishodištu.

19. Dokažite: ako $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ima svojstva iz prethodnog zadatka onda je f konstantna na svakoj sferi s centrom u ishodištu!

20. Prelaskom na polarne koordinate, izračunajte Jacobijan funkcije $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definirane s $f(x,y) := \left(\frac{x}{\|(x,y)\|^n}, \frac{y}{\|(x,y)\|^n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

21. Neka je $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ parna funkcija, tj. $f(-P) = f(P)$, $\forall P \in \mathbb{R}^n$, i neka je f diferencijabilna u 0. Izračunajte $Df(0)$!

22. Neka je $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ***homogena funkcija***, tj. $f(tP) = tf(P)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall P \in \mathbb{R}^n$, i neka je f diferencijabilna u 0. Dokažite da je f linearan funkcional!

23. Neka je $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ***homogena funkcija stupnja*** $p \in \mathbb{N}$, tj. $f(tP) = t^p f(P)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall P, tP \in \Omega$, te neka f ima sve parcijalne derivacije na Ω. Jesu li i parcijalne derivacije od f homogene funkcije? Kojeg stupnja?

24. Neka je funkcija $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homogena stupnja p i diferencijabilna u P_0. Dokažite da je tada $Df(P_0)(P_0) = pf(P_0)$. Za $p = 1$ usporedite sa zadatkom 22!

25. Dokažite ovaj obrat prethodnog zadatka: Neka je $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencijabilna na Ω te neka $\forall P_0 \in \Omega$ vrijedi $Df(P_0)(P_0) = pf(P_0)$. Dokažite da je tada f homogena funkcija stupnja p.

26. Za funkcije $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ definirajmo funkciju $(f,g)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{m+k}$ formulom $(f,g)(P) := (f(P), g(P))$. Dokažite da je (f,g) diferencijabilna u P_0 ako i samo ako su f i g diferencijabilne u P_0.

27. Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$. Dokažite da je f diferencijabilna u $x_0 \in \mathbb{R}$ ako i samo ako su f_1 i f_2 derivabilne u x_0. Kako izgleda Jacobijeva matrica funkcije f u točki x_0? Generalizirajte za funkcije $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$!

28. Neka je funkcija $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u točki P_0 i neka vrijedi $Df(P_0) \neq 0$. Dokažite da iz točke P_0 funkcija f najbrže raste u smjeru vektora $\nabla f(P_0)$, a najbrže pada u suprotnom smjeru.

29. Mrav se nalazi u ishodištu koordinatnog sustava u toksičnoj atmosferi. Ako je koncentracija toksina dana funkcijom $f(x,y,z) = e^{-3x} + \sin(yz) + e^{-z^2}$, u kojem će smjeru mrav (riješivši prethodni zadatak) bježati?

§ 9 Diferencijali i derivacije višeg reda

Promotrimo sada preslikavanje $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ koje je diferencijabilno u svakoj točki otvorenog skupa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. U tom slučaju dobivamo novo preslikavanje $Df\colon \Omega \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, koje svakoj točki $P \in \Omega$ pridružuje diferencijal $Df(P) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Kako u prostoru linearnih operatora postoji norma, Definicija 2.4, to možemo govoriti o neprekidnosti preslikavanja Df.

Definicija 9.1 Za preslikavanje $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kažemo da je ***neprekidno diferencijabilno*** ili da je ***diferencijabilno klase*** C^1, ako je ono diferencijabilno na Ω i preslikavanje $Df\colon \Omega \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ je neprekidno. Skup svih neprekidno diferencijabilnih preslikavanja s Ω u $\mathbb{R}^m$ označavamo s $C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, a u slučaju $m = 1$, jednostavno s $C^1(\Omega)$.

Vidjeli smo da postojanje parcijalnih derivacija preslikavanja f ne znači da je ono i diferencijabilno. Vrijedi, međutim, sljedeći teorem:

Teorem 9.1 *Neka je $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikavanje za koje postoje parcijalne derivacije na Ω. Ako su sve derivacije $\partial_i f_j$ neprekidne u $P_0 \in \Omega$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, tada je f diferencijabilno u P_0.*

Dokaz: Teorem je dovoljno dokazati za slučaj $m = 1$. Neka je $r > 0$ takav da je $K(P_0, r) \subseteq \Omega$. Tada za svaki $H = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ takav da je $\|H\| < r$ vrijedi

$$\begin{aligned} f(P_0 + H) - f(P_0) = &\big(f(x_1^0 + h_1, \ldots, x_n^0 + h_n) - f(x_1^0, x_2^0 + h_2, \ldots, x_n^0 + h_n)\big) + \\ &+ \big(f(x_1^0, x_2^0 + h_2, x_3^0 + h_3, \ldots, x_n^0 + h_n) - f(x_1^0, x_2^0, x_3^0 + h_3, \ldots, x_n^0 + h_n)\big) + \\ &+ \cdots + \big(f(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0 + h_n) - f(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0)\big) \,. \end{aligned} \tag{1}$$

U i-tom članu ovog prikaza radi se o prirastu realne funkcije jedne varijable koja je derivabilna i derivacija je upravo $\partial_i f$. Stoga, prema Lagrangeovom[1] teoremu srednje vrijednosti (vidi str. 98), postoje brojevi $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n \in \langle 0, 1\rangle$ takvi da je desna strana u (1) jednaka

$$\begin{aligned} &\partial_1 f(x_1^0 + \vartheta_1 h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_n^0 + h_n) \cdot h_1 + \\ &+ \partial_2 f(x_1^0, x_2^0 + \vartheta_2 h_2, x_3^0 + h_3, \ldots, x_n^0 + h_n) \cdot h_2 + \\ &+ \cdots + \partial_n f(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0 + \vartheta_n h_n) \cdot h_n \end{aligned}$$

[1] Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), talijanski i francuski matematičar

što je jednako izrazu

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x_1^0, \ldots, x_n^0) h_i + \sum_{i=1}^{n} s_i(H) h_i \tag{2}$$

gdje je

$$s_i(H) := \partial_i f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \vartheta_i h_i, x_{i+1}^0 + h_{i+1}, \ldots, x_n^0 + h_n) - \partial_i f(x_1^0, \ldots, x_n^0).$$

Da dokažemo diferencijabilnost funkcije f u P_0, dovoljno je pokazati da je $\lim\limits_{H\to 0} \frac{s_i(H)h_i}{\|H\|} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, jer je prva suma u (2) upravo vrijednost jednog linearnog operatora na vektoru H, kao što se traži u definiciji diferencijabilnosti. Kako je $\frac{|h_i|}{\|H\|} \leq 1$, to je dovoljno pokazati da je $\lim\limits_{H\to 0} s_i(H) = 0$, a to slijedi neposredno iz neprekidnosti funkcije $\partial_i f$ u točki P_0. ∎

Uz identifikaciju prostorâ $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ i $\mathbb{R}^{nm}$, koordinatne funkcije preslikavanja Df su upravo parcijalne derivacije koordinatnih funkcija preslikavanja f. Budući su sve metrike na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru ekvivalentne (vidi zadatak 29 na str. 66) dobivamo:

Korolar 9.2 *Preslikavanje $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je klase C^1 na Ω ako i samo ako sve parcijalne derivacije od f postoje i neprekidne su na Ω.* ∎

Ako je preslikavanje $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilno na čitavom skupu Ω, možemo postaviti pitanje diferencijabilnosti preslikavanja $P \mapsto Df(P)$, tj. preslikavanja $Df\colon \Omega \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Ukoliko je to preslikavanje diferencijabilno u točki P_0, pripadni diferencijal $D(Df)(P_0)\colon \mathbb{R}^n \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ označavamo s $D^2f(P_0)$, i zovemo ***drugi diferencijal*** ili ***diferencijal drugog reda*** preslikavanja f u točki $P_0 \in \Omega$. Ako $D^2f(P)$ postoji za sve $P \in \Omega$, imamo preslikavanje $D^2f\colon \Omega \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$. Ako je preslikavanje D^2f neprekidno kažemo da je preslikavanje f ***klase*** C^2 na Ω. Skup svih takvih preslikavanja označavamo s $C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$, odnosno $C^2(\Omega)$ u slučaju $m = 1$. Analogno se definira diferencijabilnost klase C^p, $p \geq 1$. Označimo li s $C^0(\Omega, \mathbb{R}^m)$, odnosno $C^0(\Omega)$, skup svih neprekidnih preslikavanja na Ω, dobivamo niz inkluzija vektorskih prostora

$$C^0(\Omega) \supset C^1(\Omega) \supset C^2(\Omega) \supset \cdots \supset C^p(\Omega) \supset C^{p+1}(\Omega) \supset \cdots \supset C^\infty(\Omega)$$

i sve su to prave inkluzije. Pri tome je s $C^\infty(\Omega)$ označen vektorski prostor svih preslikavanja s $\Omega \to \mathbb{R}$ koja su klase C^p za svaki p. Analogan niz inkluzija dobiva se za preslikavanja $\Omega \to \mathbb{R}^m$.

Pogledajmo sada pobliže drugi diferencijal i to u specijalnom slučaju $m = 1$. Za dva puta diferencijabilnu funkciju $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je $Df\colon \Omega \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, a $D^2 f(P_0)\colon \mathbb{R}^n \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, dakle $D^2 f(P_0) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$.

Vektorski prostor $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ svih linearnih operatora s $\mathbb{R}^n$ u $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ prirodno je izomorfan vektorskom prostoru ***bilinearnih funkcionala*** $\mathrm{BHom}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, tj. prostoru preslikavanja $B\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ koja su linearna u svakoj varijabli, tj. za sve vektore $H, H_1, H_2, K, K_1, K_2 \in \mathbb{R}^n$ i skalare $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$B(\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2, K) = \lambda_1 B(H_1, K) + \lambda_2 B(H_2, K)$$

i

$$B(H, \mu_1 K_1 + \mu_2 K_2) = \mu_1 B(H, K_1) + \mu_2 B(H, K_2)\,.$$

Taj prirodni izomorfizam definiran je ovako: svakom linearnom operatoru $b \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ pridružimo bilinearni operator $B =: \beta(b)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiran s

$$B(H, K) := (b(H))(K), \quad H, K \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Obratno, bilinearnom funkcionalu $B \in \mathrm{BHom}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ pridružit ćemo linearni operator $\lambda(B) =: b \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ definiran s

$$(b(H))(K) := B(H, K), \quad H, K \in \mathbb{R}^n\,. \tag{4}$$

Lako se pokazuje da je $\beta\colon\ \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})) \to \mathrm{BHom}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ izomorfizam vektorskih prostora s inverzom λ. Identificiramo li izomorfizmom β te vektorske prostore, možemo, dakle, interpretirati drugi diferencijal $D^2 f(P_0) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ kao bilinearan funkcional $\beta(D^2 f(P_0)) \in \mathrm{BHom}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Uobičajeno je i taj bilinearni funkcional označiti istom oznakom $D^2 f(P_0)$ i također zvati drugim diferencijalom od f u točki P_0, pa je onda i $D^2 f(P_0) \in \mathrm{BHom}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Promotrimo još kako to izgleda u koordinatama.

Za preslikavanje $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ koje je diferencijabilno na Ω, prema formuli (3) na strani 73, je $Df(P) = \sum\limits_{i=1}^{n} \partial_i f(P)\, dx_i$, $P \in \Omega$, gdje su $dx_i \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vektori dualne baze prostora $\mathbb{R}^n$. Prema formuli (6) na strani 74 je stoga (vektori baze su sada dx_i, a ne e_i kao u (6)!)

$$D^2f(P_0)(H) = (D(Df)(P_0))(H) = \sum_{i=1}^{n} D(\partial_i f)(P_0)(H)\,dx_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \big(\sum_{j=1}^{n} \partial_j\partial_i f(P_0)h_j\big)\,dx_i\ , \quad H \in \mathbb{R}^n\ .$$

Ako funkcional $D^2f(P_0)(H) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ primijenimo na $K \in \mathbb{R}^n$ dobivamo

$$\big((D^2f)(P_0)(H)\big)(K) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \partial_j\partial_i f(P_0)h_jk_i \quad ,$$

odnosno, ako na drugi diferencijal gledamo kao na bilinearni funkcional,

$$D^2f(P_0)(H,K) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \partial_j\partial_i f(P_0)h_jk_i \tag{5}$$

što je jedna ***bilinearna forma***.

Brojevi $\partial_j\partial_i f(P_0) := \partial_j(\partial_i f)(P_0)$ zovu se ***parcijalne derivacije drugog reda*** funkcije f u točki P_0. U slučaju $i = j$ uobičajena je oznaka $\partial_i^2 f(P_0) := \partial_i\partial_i f(P_0)$. Matrica sastavljena od brojeva $\partial_i\partial_j f(P_0)$ često se zove ***Hesseova***[1] ***matrica*** funkcije f u točki P_0, i označava se s $Hf(P_0)$.

Iz Teorema 9.1 i Korolara 9.2 dobivamo

Korolar 9.3 *Ako parcijalne derivacije drugog reda funkcije f postoje na Ω i neprekidne su u P_0, onda postoji drugi diferencijal $D^2f(P_0)$. Ako su sve parcijalne derivacije drugog reda funkcije f neprekidne na Ω, onda je f klase C^2 na Ω.* ■

I općenito

Korolar 9.4 *Funkcija $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je klase C^p, $p \geq 1$ ako i samo ako sve parcijalne derivacije p-tog reda funkcije f postoje i neprekidne su na Ω.* ■

Kombinirajući ovu tvrdnju s Teoremom 9.1 dobivamo

Korolar 9.5 *Funkcija $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je klase C^p, $p \geq 1$ ako i samo ako su sve parcijalne derivacije funkcije f, funkcije klase C^{p-1}.* ■

[1] Ludwig Otto Hesse (1811–1874), njemački matematičar

Kod promatranja diferencijala i parcijalnih derivacija višeg reda, od osnovne je važnosti sljedeći teorem:

Teorem 9.6 (Schwarzov[1] teorem) *Neka je* $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funkcija klase* C^2 *na* Ω. *Tada je*

$$\partial_i \partial_j f(P) = \partial_j \partial_i f(P) \tag{6}$$

za sve $i, j = 1, \dots, n$ *i* $P \in \Omega$.

Dakle, za $f \in C^2(\Omega)$ drugi je diferencijal funkcije f ***simetričan bilinearan funkcional***, tj. vrijedi

$$D^2 f(P)(H,K) = D^2 f(P)(K,H)\ , \quad H, K \in \mathbb{R}^n .$$

Dokaz: Za fiksne i, j u određivanju parcijalnih derivacija $\partial_i \partial_j f(P_0)$ i $\partial_j \partial_i f(P_0)$ sudjeluju samo i-ta i j-ta varijabla, a sve ostale varijable su fiksne, tj. radi se o restrikciji funkcije f na dvodimenzionalnu ravninu kroz točku P_0 određenu koordinatnim vektorima e_i i e_j. Stoga je teorem dovoljno dokazati za funkcije dviju varijabli.

Neka je, dakle, $P_0 = (x_0, y_0) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $f \in C^2(\Omega)$. Promatrajmo izraz

$$\Delta(h,k) := f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

koji je, budući je skup Ω otvoren, definiran za malene h i k. Isto su tako, za malene k, i funkcije φ_k zadane s

$$\varphi_k(x) := f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$$

definirane na nekoj okolini točke x_0.

Funkcije φ_k su diferencijabilne, pa možemo primijeniti Lagrangeov teorem srednje vrijednosti. Stoga, za malene h i k, postoje brojevi $\vartheta^1_{hk} \in \langle 0, 1 \rangle$ (oni ovise o h i k), takvi da je

$$\begin{aligned}\Delta(h,k) &= \varphi_k(x_0 + h) - \varphi_k(x_0) = \varphi_k'(x_0 + \vartheta^1_{hk}\, h)\, h = \\ &= \big(\partial_1 f(x_0 + \vartheta^1_{hk}\, h, y_0 + k) - \partial_1 f(x_0 + \vartheta^1_{hk}\, h, y_0)\big)\, h\,.\end{aligned}$$

Kako je $\partial_1 f \in C^1(\Omega)$, ponovo možemo primijeniti Lagrangeov teorem, tj. postoje brojevi $\vartheta^2_{hk} \in \langle 0, 1 \rangle$ takvi da je

$$\Delta(h,k) = \partial_2 \partial_1 f(x_0 + \vartheta^1_{hk}\, h, y_0 + \vartheta^2_{hk}\, k)\, h\, k\ ,$$

[1]Hermann Amandus Schwarz (1843–1921), njemački matematičar

tj.

$$\frac{1}{hk}\,\Delta(h,k) = \partial_2\partial_1 f(x_0 + \vartheta^1_{hk}\,h, y_0 + \vartheta^2_{hk}\,k)\ . \tag{7}$$

Budući je funkcija $\partial_2\partial_1 f$ neprekidna u točki (x_0, y_0), limes desne strane za $(h,k) \to (0,0)$ postoji, bez obzira da li brojevi $\vartheta^1_{hk}, \vartheta^2_{hk} \in \langle 0,1\rangle$ ovise neprekidno o (h,k), i jednak je $\partial_2\partial_1 f(x_0,y_0)$. Zbog toga postoji i limes lijeve strane, i vrijedi

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{hk}\,\Delta(h,k) = \partial_2\partial_1 f(x_0,y_0)\,. \tag{8}$$

Analogno, za malene h, na nekoj okolini točke y_0 definirane su funkcije ψ_h formulom

$$\psi_h(y) := f(x_0+h,y) - f(x_0,y)\,,$$

i vrijedi

$$\Delta(h,k) = \psi_h(y_0+k) - \psi_h(y_0)\,,$$

pa slično kao ranije, zaključujemo da je

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{hk}\,\Delta(h,k) = \partial_1\partial_2 f(x_0,y_0)\,. \tag{9}$$

Formule (8) i (9) pokazuju da je $\partial_1\partial_2 f(x_0,y_0) = \partial_2\partial_1 f(x_0,y_0)$, što je i trebalo pokazati. ■

Napomena 9.1 Za prethodni dokaz Schwarzovog teorema dovoljno je bilo da funkcija f ima parcijalne derivacije drugog reda i da je za svaki par i,j barem jedna od funkcija $\partial_i\partial_j f$ i $\partial_j\partial_i f$ neprekidna u P_0.

Korolar 9.7 *Ako je $f \in C^p(\Omega)$ onda su parcijalne derivacije p-tog reda po istim varijablama jednake, bez obzira kojim se redom derivira.* ■

Sada ćemo opisati još jedan način gledanja na drugi diferencijal. Za to nam je opet potrebno malo algebre.

Neka je $B\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilinearni funkcional. Tada je s

$$k(H) := B(H,H)\ , \quad H \in \mathbb{R}^n \tag{10}$$

definirana neprekidna funkcija $k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, i za nju vrijedi

$$k(H+K) + k(H-K) = 2k(H) + 2k(K)\ , \quad H,K \in \mathbb{R}^n\ , \tag{11}$$

što se lako pokaže koristeći bilinearnost od B i definiciju (10).

Za neprekidnu funkciju $k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi (11) kažemo da je ***kvadratni funkcional*** na $\mathbb{R}^n$.

Svakom je, dakle, bilinearnom funkcionalu $B\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pridružen kvadratni funkcional $\kappa(B) := k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ formulom

$$(\kappa(B))(H) := B(H,H)\ . \tag{12}$$

Vrijedi međutim i obratno:

Teorem 9.8 *Svakom kvadratnom funkcionalu $k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pridružen je simetričan bilinearan funkcional $\beta(k)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takav da vrijedi*

$$(\beta(k))(H,H) = k(H)\ , \quad H \in \mathbb{R}^n\ . \tag{13}$$

Dokaz: Definirajmo preslikavanje $B := \beta(k)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ formulom

$$B(H,K) := \frac{1}{4}\big(k(H+K) - k(H-K)\big)\ . \tag{14}$$

Kako je k neprekidno, to je i B neprekidno. Nadalje, za $H = K = 0$, iz svojstva (11) kvadratnog funkcionala k, dobivamo

$$k(0) = 0 \tag{15}$$

pa za $H = 0$ ponovo iz (11) dobivamo

$$k(-K) = k(K)\ , \quad K \in \mathbb{R}^n\,. \tag{16}$$

Sada iz (14) dobivamo

$$B(H,K) = B(K,H) \tag{17}$$

tj. B je simetrična funkcija. Treba još pokazati bilinearnost.

Pokažimo prvo aditivnost u prvoj varijabli. Za $H_1, H_2, K \in \mathbb{R}^n$ imamo

$$\begin{aligned} &B(H_1+H_2,K) - B(H_1,K) - B(H_2,K) \overset{(14)}{=} \\ &\quad = \frac{1}{4}\big(k(H_1+H_2+K) + k(H_1-H_2-K) - k(H_1-H_2-K) - \\ &\qquad\qquad - k(H_1+H_2-K)\big) - B(H_1,K) - B(H_2,K) \overset{(11),(14)}{=} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\Big(\big(2k(H_1) + 2k(H_2+K) - 2k(H_1-K) - 2k(H_2)\big) - \\
&\qquad - \big(k(H_1+K) - k(H_1-K)\big) - \big(k(H_2+K) - k(H_2-K)\big)\Big) = \\
&= \frac{1}{4}\Big(\big(2k(H_1) - 2k(H_2)\big) - \big(k(H_1+K) + k(H_1-K)\big) + \\
&\qquad + \big(k(H_2+K) + k(H_2-K)\big)\Big) \overset{(11)}{=} \\
&= \frac{1}{4}\Big(2k(H_1) - 2k(H_2) - 2k(H_1) - 2k(K) + 2k(H_2) + 2k(K)\Big) = 0\ ,
\end{aligned}
$$

pa je zaista

$$B(H_1 + H_2, K) = B(H_1, K) + B(H_2, K)\ . \tag{18}$$

Odavde odmah slijedi da je $B(2H, K) = 2B(H, K)$, pa indukcijom lako zaključujemo da je

$$B(nH, K) = nB(H, K)\ , \qquad n \in \mathbb{N}\ . \tag{19}$$

Nadalje,

$$
\begin{aligned}
B(H, K) + B(-H, K) &\overset{(18)}{=} B(H - H, K) = B(0, K) \overset{(14)}{=} \\
&\overset{(14)}{=} \frac{1}{4}[k(K) - k(-K)] \overset{(16)}{=} 0\ ,
\end{aligned}
$$

pa (19) vrijedi i za sve $n \in \mathbb{Z}$.

Za $m \in \mathbb{N}$, zbog (19) je $B(H, K) = \frac{1}{m}B(mH, K)$, pa je i $B(\frac{1}{m}H, K) = \frac{1}{m}B(m\,\frac{1}{m}H, K) = \frac{1}{m}B(H, K)$. Stoga za svaki $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$B(\frac{n}{m}\,H, K) = \frac{n}{m}\,B(H, K)$$

tj.

$$B(qH, K) = qB(H, K)\ , \quad q \in \mathbb{Q}\ . \tag{20}$$

Uočimo da su funkcije $\lambda \mapsto B(\lambda H, K)$ i $\lambda \mapsto \lambda B(H, K)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, realne funkcije neprekidne na čitavom $\mathbb{R}$, koje se zbog (20) podudaraju na skupu $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva. Kako je $\mathbb{Q}$ gust na $\mathbb{R}$, to su, prema Korolaru 2.13, te dvije funkcije jednake, tj. vrijedi

$$B(\lambda H, K) = \lambda B(H, K)\ \ ,\ \lambda \in \mathbb{R},\ H, K \in \mathbb{R}^n\ , \tag{21}$$

što zajedno sa (18) pokazuje linearnost u prvoj varijabli.

Zbog simetričnosti (17) B je linearan i u drugoj varijabli, pa je B zaista simetričan bilinearan funkcional.

Konačno,

$$B(H,H) \overset{(14)}{=} \frac{1}{4}\big(k(2H)-k(0)\big) \overset{(15)}{=} \frac{1}{4}k(2H) = k(H),$$

jer za $H = K$, (11) zajedno sa (15) daje $k(2H) = 4k(H)$, čime je pokazano da vrijedi i (13). ■

Označimo s $Q(\mathbb{R}^n)$ vektorski prostor svih kvadratnih funkcionala $k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a sa $SB(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ vektorski prostor svih simetričnih bilinearnih funkcionala. Tada su preslikavanja $\beta\colon Q(\mathbb{R}^n) \to SB(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ i $\kappa\colon SB(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \to Q(\mathbb{R}^n)$ definirana s (13) i (12) linearni operatori. Pokažimo da su to međusobno inverzni izomorfizmi.

Za svaki $k \in Q(\mathbb{R}^n)$ vrijedi

$$(\kappa(\beta(k)))(H) \overset{(12)}{=} (\beta(k))(H,H) \overset{(13)}{=} k(H)\ , \quad H \in \mathbb{R}^n$$

pa je $\kappa(\beta(k)) = k$, $k \in Q(\mathbb{R}^n)$ tj.

$$\kappa \circ \beta = 1_{Q(\mathbb{R}^n)}\ . \tag{22}$$

Obratno, za svaki $B \in SB(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ je

$$\begin{aligned}(\beta(\kappa(B)))(H,K) &\overset{(14)}{=} \frac{1}{4}[(\kappa(B))(H+K) - \kappa(B)(H-K)] = \\ &\overset{(12)}{=} \frac{1}{4}[B(H+K,H+K) - B(H-K,H-K)] = \\ &= B(H,K)\ , \quad H,K \in \mathbb{R}^n\ ,\end{aligned}$$

pa je $\beta(\kappa(B)) = B$, $B \in SB(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, tj.

$$\beta \circ \kappa = 1_{SB(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)}\ . \tag{23}$$

Možemo, dakle, identificirati vektorske prostore $SB(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ i $Q(\mathbb{R}^n)$, tako da simetričan bilinearan funkcional $B\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ identificiramo s pridruženim kvadratnim funkcionalom $k = \kappa(B)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiranim formulom (12).

9.9 Primijenimo prethodna razmatranja na drugi diferencijal funkcije $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ klase C^2. Prema Schwarzovom teoremu, drugi diferencijal $D^2 f(P_0)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je simetričan bilinearan funkcional. Običaj je pridruženi kvadratni funkcional $\kappa(D^2 f(P_0))\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ označavati također s $D^2 f(P_0)$ (to je sad već treća stvar označena tako). Tada je $D^2 f(P_0)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratni funkcional, a zbog (12) vrijedi

$$D^2 f(P_0)(H) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(P_0) h_i h_j \ \ , \ H \in \mathbb{R}^n \ , \tag{24}$$

tj. $D^2 f(P_0)$ je (simetrična) ***kvadratna forma*** na $\mathbb{R}^n$.

Označimo li s $dx_i \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$, linearne funkcionale definirane s $dx_i(H) = h_i$, kao u 7.4, možemo pisati

$$D^2 f(P_0) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(P_0)\, dx_i\, dx_j \tag{25}$$

gdje je $dx_i\, dx_j$ običan produkt realnih funkcija, tj.

$$dx_i\, dx_j(H) = dx_i(H)\, dx_j(H) = h_i h_j \ , \ H \in \mathbb{R}^n.$$

9.10 Schwarzov teorem opravdava i sljedeći formalni račun, koji za dvije varijable izgleda ovako (izostavljamo pisanje točke (x_0, y_0)):

$$\begin{aligned} D^2 f &= \partial_1 \partial_1 f\, dx\, dx + \partial_1 \partial_2 f\, dx\, dy + \partial_2 \partial_1 f\, dy\, dx + \partial_2 \partial_2 f\, dy\, dy = \\ &= \partial_1^2 f\, dx^2 + 2\partial_1 \partial_2 f\, dx\, dy + \partial_2^2 f\, dy^2 \overset{\text{formalni zapis}}{=} \\ &= (\partial_1^2\, dx^2 + 2\partial_1 \partial_2\, dx\, dy + \partial_2^2\, dy^2)(f) = \\ &= (\partial_1\, dx + \partial_2\, dy)^2 (f) \ \ , \end{aligned}$$

tj. operator $\partial_1 dx + \partial_2 dy$ koji djeluje na funkciju f po formuli $(\partial_1 dx + \partial_2 dy)(f) = \partial_1 f\, dx + \partial_2 f\, dy$, formalno se kvadrira i daje drugi diferencijal od f. Indukcijom, za diferencijale višeg reda funkcije f klase C^p, dobivamo

$$D^p f = (\partial_1 dx + \partial_2\, dy)^p (f)\,.$$

Analogno, za funkcije više varijabli, dobivamo

$$D^p f = (\partial_1 dx_1 + \partial_2\, dx_2 + \cdots + \partial_n\, dx_n)^p (f)\,,$$

tj. služeći se se polinomnom formulom

$$D^p f(P_0)(H) = \sum_{i_1 + \cdots + i_n = p} \frac{p!}{i_1! i_2! \cdots i_n!}\, \partial_1^{i_1} \partial_2^{i_2} \dots \partial_n^{i_n} f(P_0)\, h_1^{i_1} h_2^{i_2} \cdots h_n^{i_n} \ .$$

Zadaci

1. Funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana je s

$$f(x,y) := \begin{cases} y - x^2, & \text{za } y \geq x^2 \\ \frac{y^2}{x^2} - y, & \text{za } 0 \leq y < x^2 \end{cases}, \quad f(x,-y) = -f(x,y) \text{ za } y > 0\,.$$

   Dokažite da je f diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$, ali nije klase C^1.

2. Neka je $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x,y) := \begin{cases} y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$.
   Izračunajte $\partial_1\partial_2 f(0,0)$ i $\partial_2\partial_1 f(0,0)$.

3. Može li se funkcija $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ dodefinirati u točki $(0,0)$ tako da bude klase C^2 na $\mathbb{R}^2$?

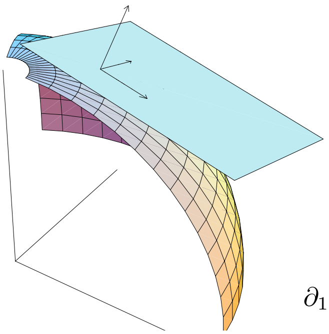
4. Neka je $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ klase C^2 i homogena stupnja 2. Dokažite da postoji simetrična matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ takva da vrijedi $f(P) = (AP \mid P)$.

5. Neka je $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x > 0\}$ i funkcija $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x,y) = x^3$ za $x > 0$ i $f(x,y) = 0$ inače. Pokažite da je skup Ω povezan, funkcija f klase C^1, te vrijedi $\partial_2 f(x,y) = 0$, $\forall (x,y) \in \Omega$; pa ipak, funkcija f ovisi o y.

Definicija *Neka je $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1 i $k \in \mathbb{R}$. Skup $S := \{(x,y,z) : f(x,y,z) = k\}$ nazivamo **plohom** u $\mathbb{R}^3$ ako je $S \neq \emptyset$ i vrijedi $\nabla f(x,y,z) \neq 0$, $\forall (x,y,z) \in S$.*

Ovdje bismo željeli definirati ***tangencijalnu ravninu*** na plohu S u proizvoljnoj točki $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$. U tu svrhu promotrimo proizvoljnu krivulju c na S koja prolazi točkom P_0, to znači diferencijabilnu funkciju $c\colon I \subseteq \mathbb{R} \to S$ pri čemu postoji $t_0 \in I$ sa svojstvom $c(t_0) = P_0$. ***Tangencijalni vektor*** na c u točki P_0 je $c'(t_0)$. Kako je $f \circ c = k = \text{const}$, to je $D(f \circ c)(t) = 0$, $\forall t \in I$. S druge strane, prema Teoremu o diferencijalu kompozicije diferencijabilnih funkcija, imamo

$$D(f \circ c)(t) = (\nabla f(c(t)) \mid c'(t)), \ \forall t \in I\,.$$



Posebno je $(\nabla f(P_0)|c'(t_0)) = 0$; drugim riječima $\nabla f(P_0) \perp c'(t_0)$. Time smo pokazali da je tangencijalni vektor *svake* krivulje na S u točki P_0 okomit na $\nabla f(P_0)$ što znači da svi ti vektori leže u jednoj ravnini. Stoga je razumno ovu ravninu definirati kao tangencijalnu ravninu na plohu S u točki P_0. Kako joj je $\nabla f(P_0)$ vektor normale, njezina jednadžba glasi

$$\partial_1 f(P_0)(x-x_0)+\partial_2 f(P_0)(y-y_0)+\partial_3 f(P_0)(z-z_0)=0.$$

Plohu možemo zadati i pomoću funkcije $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jednadžbom $z = f(x,y)$. Stavimo li $F(x,y,z) := f(x,y)-z$ i $k = 0$, problem smo sveli na prethodni slučaj; stoga u ovom slučaju jednadžba tangencijalne ravnine u točki $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ glasi

$$\partial_1 f(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_2 f(x_0,y_0)(y-y_0) + (-1)(z - f(x_0,y_0)) = 0.$$

U slučaju dvije varijable, tj. u $\mathbb{R}^2$, gornje formule svode se na

$$\partial_1 f(P_0)(x-x_0) + \partial_2 f(P_0)(y-y_0) = 0$$

odnosno

$$f'(x_0)(x-x_0) + (-1)(y - f(x_0)) = 0\,.$$

Uočimo da se posljednja formula podudara s poznatom jednadžbom tangente na graf funkcije $y = f(x)$ u točki $(x_0, f(x_0))$.

6. Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $3xy + z^2 = 4$ u točki $(1,1,1)$.

7. Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $z = x^2y^2 + y + 1$ u točki $(0,0,1)$.

8. Nađite sve točke na plohi $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ u kojima je tangencijalna ravnina paralelna s ravninom $x + 4y + 6z = 5$.

9. Neka je $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1 te neka je za $x \neq 0$ funkcija f definirana s $f(x,y) := \varphi(\frac{y}{x})$. Izračunajte udaljenost od ishodišta tangencijalne ravnine na plohu $z = f(x,y)$ u točki $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.

10. Odredite konstantu α tako da tangencijalne ravnine na sfere $x^2 + (y - \alpha)^2 + z^2 = 3$ i $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ u svakoj točki njihova presjeka budu ortogonalne.

§ 10 Teorem o srednjoj vrijednosti

Lagrangeov teorem srednje vrijednosti[1] tvrdi da za neprekidnu funkciju $f\colon [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja je derivabilna na otvorenom intervalu $\langle a,b\rangle$, postoji $\vartheta \in \langle 0,1\rangle$ takav da je

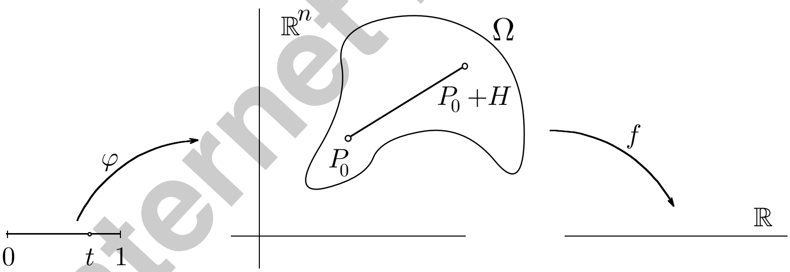
$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= f'(a + \vartheta(b-a)) \cdot (b-a) \\ &= Df(a + \vartheta(b-a))(b-a)\ . \end{aligned}$$

Jedan od osnovnih teorema diferencijalnog računa je poopćenje ovog teorema na slučaj funkcija više varijabli.

Teorem 10.1 (O srednjoj vrijednosti) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, a $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ realna funkcija koja je diferencijabilna u svim točkama segmenta $[P_0, P_0 + H] \subseteq \Omega$. Tada postoji $\vartheta \in \langle 0,1\rangle$ takav da je*

$$f(P_0 + H) - f(P_0) = Df(P_0 + \vartheta H)(H)\ . \tag{1}$$

Dokaz: Neka je $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ preslikavanje definirano s $\varphi(t) := P_0 + tH$.



φ je neprekidno i na $\langle 0,1\rangle$ je diferencijabilno pa je, prema Teoremu 8.4, i kompozicija $f \circ \varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[0,1]$ i diferencijabilna na $\langle 0,1\rangle$. Stoga na $f \circ \varphi$ možemo primijeniti Lagrangeov teorem srednje vrijednosti, pa postoji $\vartheta \in \langle 0,1\rangle$ takav da je

[1] vidi [4]

$$\begin{aligned} f(P_0+H)-f(P_0) &= (f\circ\varphi)(1)-(f\circ\varphi)(0) = \\ &= (D(f\circ\varphi)(\vartheta))(1) = \\ &= \big(Df(\varphi(\vartheta))\circ D\varphi(\vartheta)\big)(1) = \\ &= Df(P_0+\vartheta H)(H) \end{aligned}$$

jer je $D\varphi(t)(h) = h\cdot H$ za sve $t\in\langle 0,1\rangle$ i $h\in\mathbb{R}$. ■

U terminima parcijalnih derivacija imamo

Korolar 10.2 *Neka je $f\colon \Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ funkcija koja ima sve parcijalne derivacije na Ω i one su neprekidne u svim točkama segmenta $[P_0, P_0+H]\subseteq\Omega$. Tada postoji $\vartheta\in\langle 0,1\rangle$ takav da je*

$$f(P_0+H)-f(P_0) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(P_0+\vartheta H)\, h_i \ .$$ ■

Od interesa je i sljedeća posljedica teorema o srednjoj vrijednosti:

Korolar 10.3 *Uz pretpostavke kao u Teoremu 10.1, neka je $M\in\mathbb{R}$ takav da je $\|\operatorname{grad} f(P)\|\le M$ za sve točke $P\in[P_0,P_0+H]$. Tada je*

$$|f(P_0+H)-f(P_0)|\le M\cdot\|H\| \ .$$

Dokaz: Prema Teoremu 10.1 postoji $\vartheta\in\langle 0,1\rangle$ takav da je

$$\begin{aligned} f(P_0+H)-f(P_0) &= Df(P_0+\vartheta H)(H) = \\ &= (\operatorname{grad} f(P_0+\vartheta H)\mid H) \end{aligned}$$

pa je prema Cauchyevoj nejednakosti

$$|f(P_0+H)-f(P_0)|\le\|\operatorname{grad} f(P_0+\vartheta H)\|\cdot\|H\|\le M\|H\| \ .$$ ■

Napomena 10.1 Iskaz Teorema 10.1 smislen je i za vektorske funkcije $f\colon\Omega\to\mathbb{R}^m$, $m\ge 2$, ali takav teorem ipak ne vrijedi. Pokažimo to sljedećim jednostavnim primjerom.

Neka je $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ preslikavanje dâno s $f(t) := (\cos t, \sin t)$. Tada je za sve $t\in\mathbb{R}$ i $h\in\mathbb{R}$

$$Df(t)(h) = h(-\sin t, \cos t) \ .$$

Pretpostavimo da Teorem 10.1 vrijedi i za preslikavanje f. Tada bi za dâne $t_0, h \in \mathbb{R}$ postajao $\vartheta \in \langle 0,1\rangle$ takav da je

$$f(t_0+h)-f(t_0)=Df(t_0+\vartheta h)(h)\ ,$$

tj.

$$(\cos(t_0+h),\sin(t_0+h))-(\cos t_0,\sin t_0)=h(-\sin(t_0+\vartheta h),\cos(t_0+\vartheta h)).$$

Norma lijeve strane je ≤ 2, dok je norma desne strane jednaka $|h|$. Stoga, ako je naprimjer $h=5$, ne može postojati ϑ za koji bi vrijedio Teorem 10.1.

Ulogu Teorema 10.1 za vektorske funkcije preuzima

Teorem 10.4 (O srednjoj vrijednosti za vektorske funkcije) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, a $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ preslikavanje koje je diferencijabilno u svim točkama segmenta $[P_0, P_0+H] \subseteq \Omega$. Ako je skup $\{\|Df(P)\| : P \in [P_0, P_0+H]\}$ omeđen, onda je*

$$\|f(P_0+H)-f(P_0)\| \leq \sup\{\|Df(P)\| : P \in [P_0,P_0+H]\}\cdot\|H\|\ . \tag{2}$$

Dokaz: Ako je $f(P_0+H)=f(P_0)$ onda teorem očito vrijedi. Neka je dakle $f(P_0+H)\neq f(P_0)$ i neka je $Q := \dfrac{f(P_0+H)-f(P_0)}{\|f(P_0+H)-f(P_0)\|} \in \mathbb{R}^m$. Definirajmo preslikavanje $\varphi\colon [0,1]\to\mathbb{R}^n$ s $\varphi(t) := P_0+tH$ i preslikavanje $s\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ sa $s(L) := (Q \mid L)$. Preslikavanje φ je kao i u dokazu Teorema 10.1, a i preslikavanje s je diferencijabilno i $(Ds(L))(L') = (Q \mid L')$ za sve $L, L' \in \mathbb{R}^m$.

Stoga je kompozicija $g = s\circ f\circ\varphi\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ neprekidna na $[0,1]$ i diferencijabilna na $\langle 0,1\rangle$, pa prema Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti postoji $\vartheta \in \langle 0,1\rangle$ takav da je

$$\begin{aligned} g(1)-g(0) &= Dg(\vartheta)(1) = Ds\big(f(\varphi(\vartheta))\big)\big(Df(\varphi(\vartheta))(d\varphi(\vartheta)(1))\big) = \\ &= (Q \mid Df(P_0+\vartheta H)(H)) \end{aligned} \tag{3}$$

Međutim,

$$\begin{aligned} g(1)-g(0) &= (Q \mid f(P_0+H)) - (Q \mid f(P_0)) \\ &= (Q \mid f(P_0+H)-f(P_0)) = \|f(P_0+H)-f(P_0)\|\,. \end{aligned}$$

Uvrstimo li to u (3) i primijenimo Cauchyevu nejednakost i činjenicu da je $\|Q\| = 1$, dobivamo

$$\begin{aligned} \|f(P_0 + H) - f(P_0)\| &\leq \|Q\| \, \|Df(P_0 + \vartheta H)(H)\| \\ &\leq \sup\{\|Df(P)\| : P \in [P_0, P_0 + H]\} \cdot \|H\| \end{aligned}$$

jer je $P_0 + \vartheta H \in [P_0, P_0 + H]$. ■

Primijetimo da se u slučaju $m = 1$, Teorem 10.4 svodi na Korolar 10.3.

Napomena 10.2 Ukoliko je f klase C^1 na Ω, onda su pretpostavke Teorema 10.4 ispunjene, tj. norma $\|Df(P)\|$ omeđena je na $[P_0, P_0 + H]$. Naime, kako je $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, to je i funkcija $P \mapsto \|Df(P)\|$ neprekidna na segmentu $[P_0, P_0 + H]$ pa je, prema Weierstrassovom teoremu (Korolar 5.9), omeđena.

Korolar 10.5 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i povezan skup, a $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ preslikavanje diferencijabilno na Ω takvo da je $Df(P) = 0$ za sve $P \in \Omega$. Tada je f konstantno preslikavanje.*

Dokaz: Neka su $P, P_0 \in \Omega$ proizvoljne točke. Zbog povezanosti, postoje točke $P_1, P_2, \ldots, P_k = P \in \Omega$ takve da je segment $[P_{i-1}, P_i] \subseteq \Omega$ za sve $i = 1, \ldots, k$. Kako je $Df(P') = 0$ za sve $P' \in [P_{i-1}, P_i]$, to primjenom Teorema 10.4, dobivamo $f(P_i) = f(P_{i-1})$. Kako to vrijedi za sve $i = 1, \ldots, k$, zaključujemo da je $f(P) = f(P_0)$, pa je f konstantno preslikavanje. ■

Korolar 10.6 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ preslikavanje klase C^1, i neka je $K \subseteq \Omega$ kompaktan skup. Tada postoje brojevi $\delta > 0$ i $\lambda > 0$ takvi da je $\overline{K}(P, \delta) \subseteq \Omega$ za sve $P \in K$, i*

$$\|f(P) - f(P')\| \leq \lambda \, \|P - P'\| \, , \quad P \in K, \ P' \in K(P, \delta) \, .$$

Dokaz: Ako je $\Omega = \mathbb{R}^n$ odaberimo $\delta > 0$ proizvoljno. U protivnom, ako je $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$, onda je, prema Korolaru 5.10, udaljenost skupa K do njegovog komplementa $\mathbb{R}^n \setminus K$ pozitivna, pa neka je $\delta := \dfrac{1}{2} \, d(K, \mathbb{R}^n \setminus K)$. Označimo s $L := \{P \in \mathbb{R}^n : d(P, K) \leq \delta\}$. Zbog kompaktnosti, dakle i omeđenosti skupa K, i skup L je omeđen, a kako je funkcija $P \mapsto d(P, K)$ neprekidna, skup L je i zatvoren, dakle i kompaktan podskup od Ω, i osim toga je $K(P, \delta) \subseteq L$ za sve $P \in L$. Kako je funkcija f diferencijabilna klase C^1, to je funkcije $P \mapsto \|Df(P)\|$ neprekidna, pa na kompaktu L poprima maksimum. Označimo taj maksimum s λ, dakle

$\lambda := \max\{\|D(P)\| : P \in L\}$. Tada je za sve točke $P \in K$ i $P' \in K(P, \delta)$, segment $[P, P'] \subseteq K(P, \delta) \subseteq L$, pa je, prema teoremu o srednjoj vrijednosti za vektorske funkcije, Teorem 10.4,

$$\begin{aligned}\|f(P) - f(P')\| &\leq \sup\{\, \|Df(\hat{P})\| : \hat{P} \in [P, P']\,\} \cdot \|P - P'\| \leq \\ &\leq \sup\{\, \|Df(\hat{P})\| : \hat{P} \in L\,\} \cdot \|P - P'\| \leq \lambda\, \|P - P'\| \,. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Na kraju ovog paragrafa dokažimo još jednu ocjenu prirasta funkcije koju ćemo trebati u dokazu teorema o implicitnoj funkciji.

Lema 10.7 *Neka je preslikavanje $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferencijabilno i neka je u točki $P_0 \in \Omega$ diferencijal $Df(P_0)$ regularan operator. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za sve H za koje je $\|H\| < \delta$, vrijedi*

$$\|f(P_0 + H) - f(P_0)\| \geq \frac{1}{2\|Df(P_0)^{-1}\|}\|H\| \,. \tag{4}$$

Dokaz: Zbog diferencijabilnosti je

$$f(P_0 + H) - f(P_0) = Df(P_0)(H) + r(H)$$

pri čemu je $\lim\limits_{H \to 0} \dfrac{r(H)}{\|H\|} = 0$. Stoga je

$$\|f(P_0 + H) - f(P_0)\| \geq \|Df(P_0)(H)\| - \|r(H)\| \,. \tag{5}$$

Kako je

$$\|H\| = \|Df(P_0)^{-1}\,(Df(P_0)(H))\| \leq \|Df(P_0)^{-1}\|\, \|Df(P_0)(H)\|$$

iz (5) dobivamo

$$\|f(P_0 + H) - f(P_0)\| \geq \frac{1}{\|Df(P_0)^{-1}\|}\|H\| - \|r(H)\| \,.$$

Budući je $\lim\limits_{H \to 0} \dfrac{r(H)}{\|H\|} = 0$, postoji $\delta > 0$ takav da za $\|H\| < \delta$ vrijedi $\|r(H)\| \leq \dfrac{1}{2\,\|Df(P_0)^{-1}\|}\|H\|$, pa dobivamo (4). $\blacksquare$

§ 11 Implicitno definirane funkcije

U najjednostavnijoj varijanti, problem se sastoji u sljedećem: Ako je dana funkcija F dviju varijabli, da li za neke x jednadžba

$$F(x,y)=0 \tag{1}$$

ima rješenje? Ukoliko za svaki $x \in S$ postoji jedinstven y takav da je $F(x,y)=0$, onda dobivamo funkciju $x \mapsto y =: f(x)$ takvu da je $F(x, f(x)) = 0$ za sve $x \in S$. Tada za funkciju $f\colon S \to \mathbb{R}$ kažemo da je ***implicitno definirana*** preslikavanjem F.

Promotrimo naprimjer funkciju $F(x,y) := y^2 - x^2$, tj. riješimo jednadžbu $y^2 - x^2 = 0$. Očito funkcija $f(x) := x$, $x \in \mathbb{R}$, zadovoljava jednadžbu (1). Ali i funkcija $g(x) := -x$ ju zadovoljava. Isto tako su i funkcije $h(x) := |x|$ i $k(x) := -|x|$ dobre. Pa i funkcija $l(x) = \begin{cases} x \ , \ x \in \mathbb{Q} \\ -x, \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ zadovoljava jednadžbu (1), i očito još mnoge druge funkcije. U klasi funkcija koje zadovoljavaju jednadžbu (1), jedino su funkcije f, g, h, k neprekidne na čitavom $\mathbb{R}$, a među njima su jedino funkcije f i g svuda diferencijabilne. Da bismo dobili jedinstveno rješenje, morat ćemo, i u diferencijabilnom slučaju, imati neke dodatne pretpostavke.

Teorem 11.1 (O implicitnoj funkciji (realni slučaj)) *Neka je $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ realna funkcija klase C^1 na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, a točka $Q_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, y_0) = (P_0, y_0) \in \Omega$ takva da je $F(Q_0)=0$ i $\partial_{n+1}F(Q_0) \neq 0$. Tada postoji okolina $U \subseteq \mathbb{R}^n$ oko točke P_0 i postoji jedinstvena neprekidna funkcija $f\colon U \to \mathbb{R}$ takva da je $f(P_0) = y_0$ i $F(P, f(P)) = 0$ za sve $P \in U$. Štoviše, funkcija f je diferencijabilna klase C^1 i vrijedi*

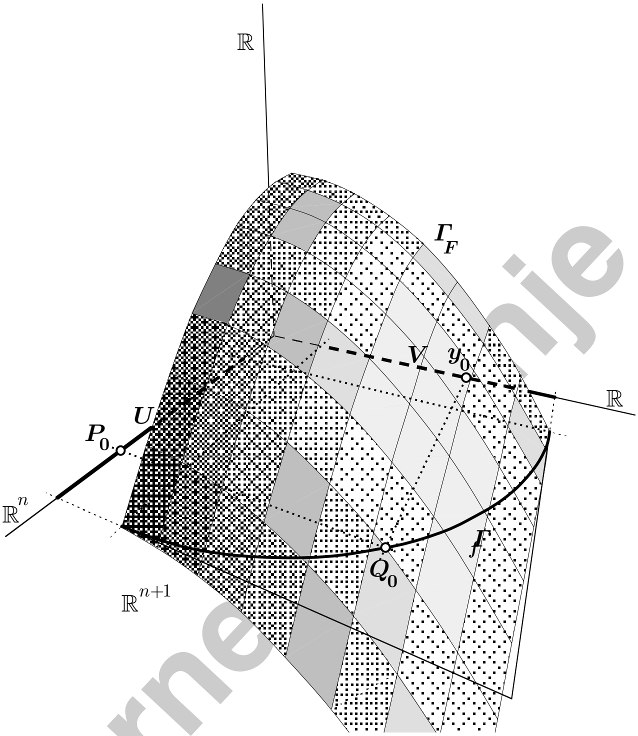
$$\partial_i f(P) = -\frac{\partial_i F(P, f(P))}{\partial_{n+1} F(P, f(P))}\ , \quad P \in U,\ \ i = 1, \dots, n\ . \tag{2}$$

Dokaz: Funkcije $\partial_i F$, $i = 1, \dots, n$ i $\frac{1}{\partial_{n+1}F}$ su neprekidne pa su i omeđene na nekoj okolini točke Q_0 (Lema 2.8), tj. postoje brojevi $\delta_1, M > 0$ takvi da je

$$|\partial_i F(Q)|\ ,\ \frac{1}{|\partial_{n+1}F(Q)|} < M\ , \quad i = 1, \dots, n\ ,\ Q \in K(Q_0, \delta_1)\ . \tag{3}$$

Neka je $\gamma := \dfrac{1}{\partial_{n+1}F(Q_0)}$. Zbog neprekidnosti funkcije $\partial_{n+1}F$ i definicije broja γ je $\lim\limits_{Q\to Q_0} \gamma \cdot \partial_{n+1}F(Q) = 1$, te postoji δ, $0 < \delta < \delta_1$, takav da je

$$|\gamma\, \partial_{n+1}F(Q) - 1| < \frac{1}{4}\ ,\ Q \in K(Q_0, \delta)\ . \tag{4}$$



Odaberimo brojeve $a, b \in \mathbb{R}$ tako da je

$$a \le \frac{b}{2nM|\gamma|} \tag{5}$$

i da za otvorene skupove $U := \langle x_1^0 - a, x_1^0 + a\rangle \times \langle x_2^0 - a, x_2^0 + a\rangle \times \cdots \times \langle x_n^0 - a, x_n^0 + a\rangle$ i $V := \langle y_0 - b, y_0 + b\rangle$ vrijedi $U \times V \subseteq K(Q_0, \delta)$.

Za točku $P \in U$ neka je $\varphi_{_P} : V \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s

$$\varphi_{_P}(y) := y - \gamma F(P, y)\ . \tag{6}$$

Tada je

$$\varphi_{_P}(y) - y_0 = y - y_0 - \gamma\big(F(P, y) - F(P_0, y_0)\big)\ . \tag{7}$$

Točke $Q_0 = (P_0, y_0)$ i $Q = (P, y)$ nalaze se u skupu $U \times V \subseteq K(Q_0, \delta)$ koji je konveksan, pa na izraz u zagradi možemo primijeniti Teorem o srednjoj vrijednosti. Stoga postoji točka $Q_\vartheta \in [Q_0, Q]$ takva da je

$$\begin{aligned}\varphi_{P}(y) - y_0 &= y - y_0 - \gamma\Big(\sum_{i=1}^{n} \partial_i F(Q_\vartheta)(x_i - x_i^0) + \partial_{n+1} F(Q_\vartheta)(y - y_0)\Big) \\ &= (y - y_0)(1 - \gamma \partial_{n+1} F(Q_\vartheta)) - \gamma\Big(\sum_{i=1}^{n} \partial_i F(Q_\vartheta)(x_i - x_i^0)\Big) \ . \quad (8)\end{aligned}$$

Kako je $Q_\vartheta \in K(Q_0, \delta)$, to odavde zbog (3), (4) i (5) slijedi

$$\begin{aligned}|\varphi_{P}(y) - y_0| &\leq |y - y_0|\,|1 - \gamma \partial_{n+1} F(Q_\vartheta)| + |\gamma|\Big(\sum_{i=1}^{n} |\partial_i F(Q_\vartheta)|\,|x_i - x_i^0|\Big) \\ &< b \cdot \frac{1}{4} + |\gamma| \cdot M \cdot a \cdot n \leq \frac{3}{4} b \ .\end{aligned}$$

Označimo li $I := [y_0 - \frac{3}{4}b, y_0 + \frac{3}{4}b]$, time smo pokazali da je $\varphi_{P}(V) \subseteq I$.

Pokažimo da funkcija φ_{P} ima Lipschitzovo svojstvo s konstantom manjom od 1. Za $t, s \in V$ imamo

$$\varphi_{P}(t) - \varphi_{P}(s) = t - s - \gamma(F(P, t) - F(P, s))$$

pa primjenom Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti, zaključujemo da postoji $\tau \in \langle 0, 1\rangle$ takav da zbog (4) vrijedi

$$\begin{aligned}|\varphi_{P}(t) - \varphi_{P}(s)| &= |t - s|\,|1 - \gamma \partial_{n+1}(F(P, s + \tau(t - s))| \\ &< |t - s| \cdot \frac{1}{4}\end{aligned}$$

jer je $(P, s + \tau(t - s)) \in U \times V \subseteq K(Q_0, \delta)$.

Zbog toga je funkcija $\varphi_{P}\big|_I : I \to I$ kontrakcija, pa primjenom Leme o kontrakciji (Korolar 2.19) zaključujemo da postoji jedinstvena točka $t_P^* \in I$ takva da je $\varphi_{P}(t_P^*) = t_P^*$, tj. zbog (6), $F(P, t_P^*) = 0$.

Primijetimo da je t_P^* jedina točka i u skupu V za koju je $F(P, t_P^*) = 0$. Zaista, ako je za neki $t \in V$, $F(P, t) = 0$, onda je $\varphi_{P}(t) = t$, pa je $t \in I$ (jer je $\varphi_{P}(V) \subseteq I$). Zbog jedinstvenosti fiksne točke kontrakcije $\varphi_{P}\big|_I$, mora biti $t = t_P^*$. Zbog toga je t_P^* jedinstveno rješenje jednadžbe $F(P, y) = 0$ u skupu V.

Kako je točka $P \in U$ bila proizvoljna, zaključujemo da je s $f(P) := t_P^*$ dobro definirana funkcija $f\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}$ za koju je

$$F(P, f(P)) = 0 \ , \ P \in U \,, \tag{9}$$

i to je među svim funkcijama, uključujući i one koje nisu neprekidne, jedinstvena funkcija $U \to V$ s tim svojstvom. Dakle, f je, bez obzira na neprekidnost, jedinstvena funkcija implicitno definirana funkcijom F u okolini U točke P_0 i zahtjevom $f(P_0) = y_0$, koja poprima vrijednosti u V.

Pokažimo da je funkcija f neprekidna. Prema teoremu o srednjoj vrijednosti primijenjenom na funkciju F i točke $Q = (P, y)$ i $Q' = (P', y')$ iz $U \times V$, postoji $Q_\vartheta \in [Q, Q']$ takva da je

$$F(P', y') - F(P, y) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i F(Q_\vartheta)(x_i' - x_i) + \partial_{n+1} F(Q_\vartheta)(y' - y) \ .$$

Specijalno, za $y := f(P)$ i $y' := f(P')$ je $F(P, y) = F(P', y') = 0$, pa dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_i F(Q_\vartheta)(x_i' - x_i) + \partial_{n+1} F(Q_\vartheta)(f(P') - f(P)) = 0 \ . \tag{10}$$

Kako je $\partial_{n+1} F(Q_\vartheta) \neq 0$, zbog (3) slijedi

$$|f(P') - f(P)| \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} |\partial_i F(Q_\vartheta)| \, |x_i' - x_i|}{|\partial_{n+1} F(Q_\vartheta)|} < M^2 n \, \|P' - P\|$$

pa je funkcija f neprekidna u P za sve $P \in U$.

Jedinstvenost: Pokažimo da je funkcija $f\colon U \to \mathbb{R}$ jedinstvena neprekidna realna funkcija na U koja je implicite definirana funkcijom F, tj. za koju je $f(P_0) = y_0$ i $F(P, f(P)) = 0$ za sve $P \in U$.

Pretpostavimo da je i $g\colon U \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija za koju je $g(P_0) = y_0$ i $F(P, g(P)) = 0$ za sve $P \in U$. Označimo sa S skup točaka u kojima se funkcije g i f podudaraju, tj. $S := \{P : g(P) = f(P)\} \subseteq U$. Prema Teoremu 2.11, skup S je (u U) zatvoren skup. Pokažimo da je skup S i otvoren. Neka je točka $P' \in S$ proizvoljna. Točka $(P', f(P'))$ pripada skupu $U \times V \subseteq K(Q_0, \delta_1)$, pa je $\partial_{n+1} F(P', f(P')) \neq 0$. Kako je $F(P', f(P')) = 0$, možemo primijeniti već dokazano, pa zaključujemo da postoje otvorene okoline $U' \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$ oko P' i $V' \subseteq V \subseteq \mathbb{R}$ oko $f(P')$ takve da je za svaki $P \in U'$, točka $y = f(P)$ jedinstvena točka u V' za koju je $F(P, y) = 0$. Ali, kako je funkcija g neprekidna u P' i

$g(P') = f(P') \in V'$, postoji okolina $W \subseteq U'$ oko P' takva da je $g(W) \subseteq V' \subseteq V$, pa je, zbog $F(P, g(P)) = 0$ i upravo rečene jedinstvenosti, $g(P) = f(P)$ za sve $P \in W$, tj. $W \subseteq S$. To pokazuje da je skup S i otvoren. Kako je S neprazan, jer je $P_0 \in S$, a skup U je, kao otvoren pravokutnik, povezan, zaključujemo da mora biti $S = U$, tj. $g(P) = f(P)$ za sve $P \in U$.

Ostaje pokazati da je $f \in C^1(U)$ i da vrijedi (2). Fiksirajmo indeks $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i stavimo u (10) $x'_j := x_j$ za sve $j \neq i$. Dobivamo

$$\partial_i F(Q_{\vartheta_i})(x'_i - x_i) + \partial_{n+1} F(Q_{\vartheta_i})(f(P'_i) - f(P)) = 0\,, \tag{11}$$

gdje je $P'_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ i $Q_{\vartheta_i} = \big(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \vartheta_i(x'_i - x_i), x_{i+1}, \ldots, x_n, f(P) + \vartheta_i(f(P'_i) - f(P))\big)$ za neki $\vartheta_i \in \langle 0, 1\rangle$, pa je

$$\frac{f(P'_i) - f(P)}{x'_i - x_i} = -\frac{\partial_i F(Q_{\vartheta_i})}{\partial_{n+1} F(Q_{\vartheta_i})}\,. \tag{12}$$

Kako je funkcija f neprekidna, a F je klase C^1 i $\partial_{n+1}F(Q) \neq 0$, to limes u Q desne strane u (12) postoji, pa postoji i limes lijeve strane u x_i, tj. postoji parcijalna derivacija $\partial_i f(P)$ i vrijedi

$$\begin{aligned}\partial_i f(P) &= \lim_{x'_i \to x_i} \frac{f(P'_i) - f(P)}{x'_i - x_i} = -\lim_{x'_i \to x_i} \frac{\partial_i F(Q_{\vartheta_i})}{\partial_{n+1} F(Q_{\vartheta_i})} = \\ &= -\frac{\partial_i F(Q)}{\partial_{n+1} F(Q)} = -\frac{\partial_i F(P, f(P))}{\partial_{n+1} F(P, f(P))}\,.\end{aligned} \tag{13}$$

Kako to vrijedi za svaki $i = 1, \ldots, n$, to sve parcijalne derivacije funkcije f postoje i iz (13) se vidi da su neprekidne na U, pa je f klase C^1 na U i za njene derivacije vrijede formule (2). ■

Napomena 11.1 Tvrdnja o jedinstvenosti u teoremu o implicitnoj funkciji, može se pojačati. Isti dokaz kao dokaz jedinstvenosti, pokazuje da, uz oznake kao u dokazu teorema, za svaku povezanu otvorenu okolinu $U_1 \subseteq U$, postoji jedinstvena neprekidna realna funkcija na U_1, koja je implicite definirana funkcijom F i koja u P_0 ima vrijednost y_0. Ta je funkcija klase C^1 i parcijalne derivacije su dâne formulama (2).

Napomena 11.2 Promotrimo formulu (9). Ona kaže da se na skupu U funkcija $g\colon U \to \mathbb{R}$ definirana s $g(P) := F(P, f(P))$ podudara s konstantnom funkcijom $\mathbf{0}\colon U \to \mathbb{R}$ za koju je $\mathbf{0}(P) = 0$ za sve $P \in U$. Stoga su, jer je prema Napomeni 7.1 diferencijabilnost lokalno svojstvo, i parcijalne derivacije tih funkcija jednake, tj. $\partial_i g(P) = \partial_i \mathbf{0}(P) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, $P \in U$. Primijenimo li teorem o deriviranju složene funkcije, dobivamo

$$\partial_i F(P, f(P)) + \partial_{n+1} F(P, f(P)) \cdot \partial_i f(P) = 0 \ , \ i = 1, \ldots, n \tag{14}$$

(što formalno izgleda kao da smo derivirali jednakost (9)). Ukoliko vrijedi $\partial_{n+1} F(P, f(P)) \neq 0$, možemo iz (14) izračunati $\partial_i f(P)$ i dobivamo upravo izraze (2). To opravdava i uobičajeni način nalaženja derivacije implicitne funkcije.

Primijetimo još nešto. Ako funkciju F zamijenimo njenim diferencijalom i umjesto polazne jednadžbe $F(P, y) = 0$ u varijabli y, gledamo jednadžbu $DF(P_0, y_0)(H) = 0$ u varijabli h_{n+1}, dobivamo jednadžbu

$$\partial_1 F(P_0, y_0) h_1 + \partial_2 F(P_0, y_0) h_2 + \cdots + \partial_{n+1} F(P_0, y_0) h_{n+1} = 0 \ .$$

Vidimo da zadnju varijablu h_{n+1} možemo izraziti pomoću ostalih, ukoliko je $\partial_{n+1} F(P_0, y_0) \neq 0$, a to je upravo bio bitan uvjet u Teoremu 11.1. Drugim riječima, naš pristup diferencijabilnosti kao mogućnosti aproksimacije zadane funkcije linearnom i ovdje se pokazao dobrim: jednadžbu $F(P, y) = 0$ možemo lokalno riješiti po $(n+1)$-voj varijabli ukoliko pripadnu linearnu jednadžbu, dobivenu zamjenom funkcije njenim diferencijalom, možemo riješiti po toj istoj varijabli.

Prirodno je očekivati da se problem implicitne funkcije pojavljuje i za vektorske funkcije i to u situaciji kada se umjesto jedne jednadžbe želi riješiti sistem jednadžbi. Kod linearnih sistema očekujemo da iz sistema od m jednadžbi s $m + n$ varijabli, nekih, naprimjer zadnjih, m varijabli možemo izraziti pomoću preostalih n. Naše iskustvo s linearnom aproksimacijom diferencijabilnih funkcija govori nam da bi tako moglo biti (barem lokalno) i u slučaju nelinearnog sistema od m jednadžbi i $n + m$ varijabli.

Promotrimo jednostavan primjer sistema od dvije jednadžbe s tri varijable:

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0 \\ G(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

gdje su F i G funkcije klase C^1, i neka je (x_0, y_0, z_0) jedno rješenje sistema (15), tj.

$$\begin{aligned} F(x_0, y_0, z_0) &= 0 \\ G(x_0, y_0, z_0) &= 0 \ . \end{aligned} \tag{16}$$

Ako je

$$\partial_3 F(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \ , \tag{17}$$

onda primjenom Teorema 11.1 zaključujemo da na nekoj okolini U točke (x_0, y_0) postoji funkcija h klase C^1 takva da je

$$F(x, y, h(x, y)) = 0 \quad , \ (x, y) \in U \ . \tag{18}$$

Ta ista vrijednost $z = h(x, y)$ mora zadovoljavati i drugu jednadžbu u (15), tj. mora biti

$$H(x, y) := G(x, y, h(x, y)) = 0 \ . \tag{19}$$

Ovako definirana funkcija H je klase C^1 i

$$H(x_0, y_0) = G(x_0, y_0, h(x_0, y_0)) = G(x_0, y_0, z_0) = 0 \ .$$

Ako je

$$\partial_2 H(x_0, y_0) \neq 0 \tag{20}$$

onda funkcija H definira implicitno na nekoj okolini V točke x_0, funkciju f klase C^1 takvu da je

$$H(x, f(x)) = 0 \quad , \ x \in V \ . \tag{21}$$

Definirajmo funkciju g s $g(x) := h(x, f(x))$, $x \in V$. Tada je

$$\begin{aligned} f(x_0) &= y_0 \\ g(x_0) &= h(x_0, y_0) = z_0 \end{aligned}$$

i vrijedi

$$\begin{aligned} F(x, f(x), g(x)) &= F(x, f(x), h(x, f(x))) \overset{(18)}{=} 0 \\ G(x, f(x), g(x)) &= G(x, f(x), h(x, f(x))) \overset{(19)}{=} 0 \end{aligned} \tag{22}$$

za sve $x \in V$.

Dakle, sistemom (15) implicitno su definirane funkcije f i g na V. Pogledajmo koje smo pretpostavke trebali. Osim (16) i (17), trebali smo i uvjet (20). Zbog (19) je

$$\partial_2 H(x_0, y_0) = \partial_2 G(x_0, y_0, z_0) + \partial_3 G(x_0, y_0, z_0) \cdot \partial_2 h(x_0, y_0) \ . \tag{23}$$

Prema Teoremu 11.1 je $\partial_2 h(x_0, y_0) = -\frac{\partial_2 F(x_0,y_0,z_0)}{\partial_3 F(x_0,y_0,z_0)}$, pa (23) daje

$$\begin{aligned}\partial_2 H(x_0, y_0) &= -\frac{1}{\partial_3 F(x_0,y_0,z_0)} \begin{vmatrix} \partial_2 F(x_0,y_0,z_0) & \partial_3 F(x_0,y_0,z_0) \\ \partial_2 G(x_0,y_0,z_0) & \partial_3 G(x_0,y_0,z_0) \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{\partial_3 F(x_0,y_0,z_0)} \det \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(x_0,y_0,z_0) \ .\end{aligned}$$

Uvjet (20) se dakle svodi na uvjet

$$\det \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(x_0,y_0,z_0) \neq 0 \ . \tag{24}$$

Uz ovaj uvjet, pretpostavka (17) postaje nepotrebna. Naime, ukoliko je $\partial_3 F(x_0,y_0,z_0) = 0$, onda iz (24) slijedi da mora biti $\partial_3 G(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, pa možemo postupiti analogno, zamijenivši uloge funkcija F i G. Prema tome, (24) je uvjet koji će zamijeniti zahtjev $\partial_{n+1} F(Q_0) \neq 0$ u Teoremu 11.1.

Da bismo odredili parcijalne derivacije funkcija f i g, derivirat ćemo jednakosti (22) kao u Napomeni 11.2. Tada je (bez pisanja varijabli)

$$\begin{aligned} \partial_1 F + \partial_2 F\, f' + \partial_3 F\, g' = 0 \\ \partial_1 G + \partial_2 G\, f' + \partial_3 G\, g' = 0 \ . \end{aligned} \tag{25}$$

Uvjet da ovaj sistem linearnih jednadžbi ima jedinstveno rješenje po f' i g' je upravo uvjet (24).

Slična razmatranja mogla bi se provesti i u općem slučaju sistema od m jednadžbi s $n+m$ varijabli, tj. funkcije iz $\mathbb{R}^{n+m}$ u $\mathbb{R}^m$. Međutim, elegantnije i uz bolje razumijevanje, do općeg rezultata dolazi se primjenom parcijalnog diferencijala.

Definicija 11.1 Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ otvoren skup, a $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^p$ preslikavanje. Točke iz $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ označavat ćemo s $N = (P, Q)$, pri čemu je $P = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $Q = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Ako postoji linearni operator $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ takav da je

$$\lim_{H \to 0} \frac{f(P_0 + H, Q_0) - f(P_0, Q_0) - A(H)}{\|H\|} = 0$$

onda kažemo da f ima ***parcijalni diferencijal*** po P, ili po prvih n varijabli, u točki (P_0, Q_0). U tom slučaju linearni operator A označavamo s $D_P f(P_0, Q_0)$. Analogno se definira parcijalni diferencijal $D_Q f(P_0, Q_0)$ po varijabli Q, odnosno po zadnjih m varijabli.

Drugim riječima, parcijalni diferencijal $D_P f(P_0, Q_0)$ je (pravi) diferencijal restrikcije $f|_{(\mathbb{R}^n \times \{Q_0\}) \cap \Omega}$ u točki P_0 i analogno je $D_Q f(P_0, Q_0)$ diferencijal restrikcije $f|_{(\{P_0\} \times \mathbb{R}^m) \cap \Omega}$ u Q_0.

Sasvim analogno kao u Propoziciji 7.1, pokazuje se da ako parcijalni diferencijali postoje, onda su jedinstveno određeni (što i opravdava uvedene oznake).

Teorem 11.2 *Ako je preslikavanje $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ diferencijabilno u točki $(P_0, Q_0) \in \Omega$, onda postoje parcijalni diferencijali $D_P f(P_0, Q_0)$ i $D_Q f(P_0, Q_0)$ i za sve $H \in \mathbb{R}^n$, $K \in \mathbb{R}^m$ vrijedi*

$$(i) \qquad \begin{aligned} D_P f(P_0, Q_0)(H) &= Df(P_0, Q_0)(H, 0) \quad , (0 \in \mathbb{R}^m) \\ D_Q f(P_0, Q_0)(K) &= Df(P_0, Q_0)(0, K) \quad , (0 \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

tj. $Df(P_0, Q_0)(H, K) = D_P f(P_0, Q_0)(H) + D_Q f(P_0, Q_0)(K)$.
Nadalje je

$$(ii) \qquad \begin{aligned} \|D_P f(P_0, Q_0)\| &\leq \|Df(P_0, Q_0)\| \\ \|D_Q f(P_0, Q_0)\| &\leq \|Df(P_0, Q_0)\| \,. \end{aligned}$$

Dokaz: Prva tvrdnja slijedi iz Korolara 3.2 (o limesu restrikcije) i jedinstvenosti parcijalnih diferencijala. Druga tvrdnja je neposredna posljedica prve i definicije norme operatora, Definicija 2.4. ■

Iz prethodnog teorema vidljivo je također da se, obzirom na standardne baze u $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^p$, matrica parcijalnog diferencijala $D_P f(P_0, Q_0)$ sastoji od prvih n stupaca matrice diferencijala $Df(P_0, Q_0)$, a matrica operatora $D_Q f(P_0, Q_0)$ se sastoji od zadnjih m stupaca matrice operatora $Df(P_0, Q_0)$. Osim toga, ako je preslikavanje f klase C^1 na Ω, onda su i $D_P f$ i $D_Q f$ neprekidna preslikavanja s Ω u prostor $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, odnosno $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$.

Sada imamo sve pripremljeno da dokažemo teorem o implicitnoj funkciji za slučaj vektorske funkcije.

Teorem 11.3 (O implicitnoj funkciji (vektorski slučaj)) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ otvoren skup, $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ preslikavanje klase C^1, $N_0 = (P_0, Q_0) \in \Omega$ točka takva da je $F(P_0, Q_0) = 0$ i parcijalni diferencijal $D_Q F(P_0, Q_0)$ je regularan. Tada postoji okolina $U \subseteq \mathbb{R}^n$ oko točke $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ i postoji jedinstveno neprekidno preslikavanje $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ takvo da je $f(P_0) = Q_0$ i $F(P, f(P)) = 0$ za sve $P \in U$. Štaviše, preslikavanje f je klase C^1 na U i vrijedi*

$$Df(P) = -D_Q F(P, f(P))^{-1} \circ D_P F(P, f(P)) \tag{26}$$

za sve $P \in U$.

Dokaz: Kako je F klase C^1 to je i funkcija $(P,Q) \mapsto D_QF(P,Q)$ neprekidna na Ω, a budući je $D_QF(P_0,Q_0)$ regularan operator, to je determinanta $\det D_QF(P_0,Q_0)$ koja se sastoji od parcijalnih derivacija funkcija $F_1,\dots,F_m$ po zadnjih m varijabli u (P_0,Q_0), različita od nule. Budući je determinanta neprekidna realna funkcija na prostoru kvadratnih matrica, to je $\det D_QF(P,Q) \neq 0$ i na nekoj okolini $W \subseteq \Omega$ točke (P_0,Q_0), pa je parcijalni diferencijal $D_QF(P,Q)$ regularan na W.

Označimo s $A := D_QF(P_0,Q_0)$ i s $\gamma := \|A^{-1}\|$. Kako je D_QF neprekidno na Ω to postoji okolina $W_1 \subseteq W$ oko (P_0,Q_0) takva da vrijedi

$$\|D_QF(P,Q) - D_QF(P_0,Q_0)\| < \frac{1}{2\gamma} \quad , \quad (P,Q) \in W_1 \,. \tag{27}$$

Neka su $a,b,b_1 > 0$ brojevi takvi da je $b < b_1$ i da za skupove $U := \langle x_1^0 - a, x_1^0 + a\rangle \times \cdots \times \langle x_n^0 - a, x_n^0 + a\rangle$, $V := K(Q_0,b)$ i $V_1 := K(Q_0,b_1)$ vrijedi $\overline{U} \times \overline{V} \subseteq \overline{U} \times V_1 \subseteq W_1$. Zbog neprekidnosti preslikavanja F možemo broj a odabrati tako da za $P \in U$ vrijedi

$$\|F(P,Q_0)\| = \|F(P,Q_0) - F(P_0,Q_0)\| < \frac{b}{2\gamma}\,, \tag{28}$$

pa je

$$\|A^{-1}(F(P,Q_0))\| \leq \|A^{-1}\|\,\|F(P,Q_0)\| < \gamma \cdot \frac{b}{2\gamma} = \frac{b}{2} \quad , \; P \in U \,. \tag{29}$$

Za $P \in U$ neka je $\varphi_{_P} \colon V_1 \to \mathbb{R}^m$ preslikavanje definirano s

$$\varphi_{_P}(Q) := Q - A^{-1}(F(P,Q)) \quad , \quad Q \in V_1 \,. \tag{30}$$

Preslikavanje $\varphi_{_P}$ je diferencijabilno na V_1 i vrijedi

$$D\varphi_{_P}(Q) = E - A^{-1} \circ D_QF(P,Q) \,, \quad Q \in V_1 \,, \tag{31}$$

jer je A^{-1} linearan operator. Pritom smo s $E \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ označili identitetu. Za normu operatora $D\varphi_{_P}(Q)$ nalazimo

$$\begin{aligned} \|D\varphi_{_P}(Q)\| &= \|E - A^{-1} \circ D_QF(P,Q)\| \\ &= \big\|A^{-1} \circ \big(D_QF(P_0,Q_0) - D_Q(F(P,Q)\big)\big\| \\ &\leq \|A^{-1}\|\,\|D_QF(P_0,Q_0) - D_QF(P,Q)\| \overset{(27)}{<} \frac{1}{2},\; P \in U,\; Q \in V_1 . \end{aligned} \tag{32}$$

Označimo s $B(U,\overline{V})$ i $BC(U,\overline{V})$ prostore svih omeđenih, odnosno omeđenih neprekidnih, preslikavanja s U u $\overline{V}$.[1] Kao što znamo, to su potpuni metrički prostori (Teorem 4.15 i Korolar 4.17). Definirajmo preslikavanje $\Psi\colon B(U,\overline{V}) \to (\mathbb{R}^m)^U$ s

$$\Psi(g)(P) := g(P) - A^{-1}(F(P,g(P)))\ ,\ \ g \in B(U,\overline{V})\ ,\ P \in U\ , \tag{33}$$

dakle

$$\Psi(g)(P) = \varphi_P\big(g(P)\big)\ , \tag{34}$$

gdje smo s $(\mathbb{R}^m)^U$ označili skup svih preslikavanja s U u $\mathbb{R}^m$. Primijetimo da ako je g neprekidno onda je i $\Psi(g)$ neprekidno.

Pokažimo najprije da Ψ preslikava $B(U,\overline{V})$ ponovo u $B(U,\overline{V})$. Za (omeđenu) funkciju $g\colon U \to \overline{V}$ i $P \in U$ je

$$\begin{aligned}\Psi(g)(P) - Q_0 &= g(P) - A^{-1}(F(P,g(P))) - Q_0 = \\ &= \big(g(P) - A^{-1}(F(P,g(P)))\big) - \big(Q_0 - A^{-1}(F(P,Q_0))\big) - A^{-1}(F(P,Q_0)) \\ &= \varphi_{_P}(g(P)) - \varphi_{_P}(Q_0) - A^{-1}(F(P,Q_0))\ ,\end{aligned} \tag{35}$$

pa je prema Teoremu 10.4 (o srednjoj vrijednosti za vektorske funkcije)

$$\begin{aligned}&\|\Psi(g)(P) - Q_0\| \leq \\ &\quad\leq \sup\{\|D\varphi_{_P}(Q)\| : Q \in [Q_0, g(P)]\}\cdot\|g(P) - Q_0\| + \|A^{-1}(F(P,Q_0))\| \leq \\ &\qquad\qquad\overset{(32),(29)}{\leq}\ \tfrac{1}{2}\|g(P) - Q_0\| + \tfrac{1}{2}b \leq b\ ,\end{aligned}$$

jer je $g(P) \in \overline{V} = \overline{K}(Q_0,b)$, te je $\Psi(g) \in B(U,\overline{V})$.

Pokažimo sada da je Ψ kontrakcija. Za preslikavanja $g_1, g_2 \in B(U,\overline{V})$ i $P \in U$ je

$$\Psi(g_1)(P) - \Psi(g_2)(P) = \varphi_{_P}(g_1(P)) - \varphi_{_P}(g_2(P))$$

pa je ponovo prema Teoremu 10.4 i (32)

$$\|\Psi(g_1)(P) - \Psi(g_2)(P)\| \leq \frac{1}{2}\|g_1(P) - g_2(P)\|\ .$$

Kako to vrijedi za sve $P \in U$ to je i

$$\|\Psi(g_1) - \Psi(g_2)\| \leq \frac{1}{2}\|g_1 - g_2\|\ ,$$

[1] Kako je V kugla, dakle omeđen skup, to su $B(U,\overline{V})$ i $BC(U,\overline{V})$ prostor svih, odnosno svih neprekidnih funkcija s U u $\overline{V}$, ali koristimo ove oznake kako bi bile u skladu s oznakama u § 4.

pa je $\Psi\colon B(U,\overline{V}) \to B(U,\overline{V})$ kontrakcija.

Prema Banachovom teoremu o fiksnoj točki (Teorem 4.14), preslikavanje Ψ ima jednu jedinu fiksnu točku. Postoji dakle jedinstvena funkcija $f\colon U \to \overline{V}$ takva da je $\Psi(f) = f$, tj.

$$\Psi(f)(P) = f(P) \ , \ P \in U \ ,$$

što prema (33), zbog regularnosti operatora A^{-1}, znači da je $f\colon U \to \overline{V}$ jedinstvena funkcija za koju je

$$F(P, f(P)) = 0 \ \ , \ \ P \in U \ . \tag{36}$$

Uočimo da zbog te jedinstvenosti vrijedi i $f(P_0) = Q_0$, pa je f jedinstveno preslikavanje na U implicite definirano funkcijom F i zahtjevom $f(P_0) = Q_0$, koje poprima vrijednosti u $\overline{V}$.

Pokažimo da je preslikavanje f neprekidno. Već smo primijetili da ako je $g\colon U \to \overline{V}$ neprekidno, onda je i $\Psi(g)$ neprekidno. Stoga, ako je Ψ_C restrikcija od Ψ na prostor $BC(U,\overline{V})$ svih omeđenih neprekidnih preslikavanja s U u $\overline{V}$, onda je i Ψ_C kontrakcija, koja, zbog potpunosti prostora $BC(U,\overline{V})$, također ima jedinstvenu fiksnu točku. Ali fiksna točka restrikcije Ψ_C je, očito, i fiksna točka preslikavanja Ψ. Stoga je $f \in BC(U,\overline{V})$, tj. preslikavanje f je neprekidno.

Da je f jedinstveno neprekidno preslikavanje sa U u $\mathbb{R}^m$ koje je implicite definirano funkcijom F i zahtjevom $f(P_0) = Q_0$, dokazuje se sasvim analogno kao u slučaju realne funkcije u Teoremu 11.1, s tim da se, uz iste oznake, umjesto činjenice $\partial_{n+1}F(P', f(P')) \neq 0$, sada koristi činjenica da je parcijalni diferencijal $D_Q F(P', f(P'))$ regularan operator.

Pokažimo sada da je f diferencijabilno na U. Neka je $P \in U$. Označimo $B := D_Q F(P, f(P))$. Kako je $(P, f(P)) \in U \times \overline{V} \subseteq W$, to je B regularan operator. Prema Lemi 10.7 primijenjenoj na preslikavanje $Q \mapsto F(P,Q)$ u točki $Q = f(P)$, postoji $\delta > 0$ takav da za $f(P+H) \in K(f(P), \delta)$ vrijedi

$$\begin{aligned} \|F(P, f(P+H))\| &= \|F(P, f(P+H)) - F(P, f(P))\| \geq \\ &\geq \frac{1}{2\,\|B^{-1}\|}\|f(P+H) - f(P)\| \ , \end{aligned}$$

tj.

$$\|f(P+H) - f(P)\| \leq 2\,\|B^{-1}\|\,\|F(P, f(P+H))\| \ . \tag{37}$$

Kako je f neprekidno, postoji $\delta_1 > 0$ takav da (37) vrijedi za sve H za koje je $\|H\| < \delta_1$.

Budući je DF neprekidan na $\overline{U} \times \overline{V}$, to postoji $\alpha > 0$ takav da je

$$\|D_P F(P', Q')\| \leq \|DF(P', Q')\| \leq \alpha \ , \ (P', Q') \in \overline{U} \times \overline{V} \, ,$$

pa primjenom Teorema 10.4 na preslikavanje $P \mapsto F(P, Q)$ dobivamo

$$\begin{aligned} \|F(P, f(P+H))\| &= \|F(P+H, f(P+H)) - F(P, f(P+H))\| \leq \\ &\leq \alpha \|H\| \ . \end{aligned} \tag{38}$$

Iz (37) i (38) dobivamo

$$\|f(P+H) - f(P)\| \leq \beta \|H\| \ , \tag{39}$$

gdje je $\beta := 2\,\|B^{-1}\|\,\alpha$.

Sada možemo pokazati da diferencijal $Df(P)$ postoji i da vrijedi (26). Zbog diferencijabilnosti preslikavanja F je za $(P, Q) \in U \times \overline{V}$

$$F(P+H, Q+K) - F(P, Q) - DF(P, Q)(H, K) = r(H, K) \tag{40}$$

gdje je

$$\lim_{(H,K) \to 0} \frac{r(H, K)}{\|(H, K)\|} = 0 \ . \tag{41}$$

Stavimo li u (40) $Q = f(P)$ i $Q + K = f(P+H)$, tj. $K = f(P+H) - f(P)$, bit će $F(P+H, Q+K) = F(P, Q) = 0$, pa dobivamo

$$DF(P, f(P))\big(H, f(P+H) - f(P)\big) = -r\big(H, f(P+H) - f(P)\big) \ . \tag{42}$$

Prema Teoremu 11.2, diferencijal od F možemo izraziti pomoću parcijalnih diferencijala, pa iz (42) slijedi

$$\begin{aligned} D_P F(P, f(P))(H) + \underbrace{D_Q F(P, f(P))}_{B} \big(f(P+H) - f(P)\big) &= \\ = -r\big(H, f(P+H) - f(P)\big) \ . \end{aligned} \tag{43}$$

Primijenimo li na ovu jednakost operator B^{-1}, gdje, kao i ranije, označavamo $B := D_Q F(P, f(P))$, dobivamo

$$B^{-1}\big(D_P F(P, f(P))(H)\big) + f(P+H) - f(P) = -B^{-1}\big(r(H, f(P+H) - f(P))\big),$$

odnosno

$$f(P+H)-f(P)=-\big(B^{-1}\circ D_PF(P,f(P))\big)(H)+r_1(H)\,, \tag{44}$$

gdje je $r_1(H):=-B^{-1}\big(r(H,f(P+H)-f(P))\big)$.

Pokažimo da je $\displaystyle\lim_{H\to 0}\frac{r_1(H)}{\|H\|}=0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\|r_1(H)\|}{\|H\|} &\le \frac{\|B^{-1}\|\,\|r(H,f(P+H)-f(P))\|}{\|H\|}\\
&= \|B^{-1}\|\,\frac{\|r(H,f(P+H)-f(P))\|}{\|(H,f(P+H)-f(P))\|}\cdot\frac{\|(H,f(P+H)-f(P))\|}{\|H\|}\\
&\le \|B^{-1}\|\,\frac{\|r(H,f(P+H)-f(P))\|}{\|(H,f(P+H)-f(P))\|}\cdot\frac{\|H\|+\|f(P+H)-f(P)\|}{\|H\|}\\
&\overset{(39)}{\le} \|B^{-1}\|\cdot(1+\beta)\,\frac{\|r(H,f(P+H)-f(P))\|}{\|(H,f(P+H)-f(P))\|}\,.
\end{aligned} \tag{45}$$

Kako je f neprekidno, to je zbog (41), limes desne strane u (45) jednak nuli pa je i $\displaystyle\lim_{H\to 0}\frac{r_1(H)}{\|H\|}=0$. To znači da je f diferencijabilno u točki P i zbog (44) vrijedi formula (26).

Konačno, neprekidnost parcijalnih derivacija preslikavanja f, dakle i funkcije $Df\colon\Omega\to\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, slijedi iz matričnog zapisa formule (26) i činjenice da se elementi inverzne matrice izražavaju kao racionalne, dakle neprekidne funkcije elemenata polazne matrice. ■

Napomena 11.3 Ako je preslikavanje F u teoremu o implicitnoj funkciji klase C^p, $p\ge 1$, onda se iz matričnog zapisa formule (26) i Korolara 9.5 vidi da je i preslikavanje f klase C^p.

Primijetimo na kraju još i to da uvjeti teorema o implicitnoj funkciji nisu i nužni za postojanje implicitno definirane funkcije f. Naprimjer, funkcija $F(x,y)=x^3-y^3$ implicite definira jedinstvenu funkciju $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ za koju je $F(x,f(x))=0$, $x\in\mathbb{R}$, iako je $\partial_yF(0,0)=0$.

Zadaci

1. Neka je $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x+\sin y$. Pokažite da u okolini $x_0=0\in\mathbb{R}$ postoji jedinstvena diferencijabilna funkcija φ sa svojstvom $f(x,\varphi(x))=0$

i $\varphi(0) = 0$. Možete li φ odrediti eksplicitno?

2. Neka je $f(x,y) = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - 1$ i $|x_0| < 3$. Dokažite da postoje dvije diferencijabilne funkcije φ_1, φ_2 definirane u okolini točke x_0 sa svojstvom $f(x, \varphi_i(x)) = 0$.

3. Neka je $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y^3 + 3x^2y - x^3 + 2x + 3y$. Dokažite da postoji jedinstvena diferencijabilna funkcija $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $f(x, \varphi(x)) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. Funkcija $f(x,y) = xy - \ln x + \ln y$ definirana je za $x, y > 0$. Dokažite da postoji jedinstvena diferencijabilna funkcija $\varphi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sa svojstvom $f(x, \varphi(x)) = 0$, $\forall x > 0$. Odredite lokalne ekstreme za φ.

5. Pokažite da postoji jedinstvena diferencijabilna funkcija $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $x + y + g(x,y) = e^{-(x+y+g(x,y))}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Izračunajte $Dg(x,y)$. Možete li g odrediti eksplicitno?

6. Neka je $f \in C^1(\mathbb{R})$ funkcija takva da je derivacija f' strogo rastuća i da vrijedi $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \infty$. Dokažite da $\forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ postoji otvoren skup U i diferencijabilna funkcija $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ tako da je $x_0 \in U$ i $f(x + \varphi(x)) = f(x) + f(\varphi(x))$, $\forall x \in U$.

7. Neka je $A \in M_{n,m+n}$, $A = (A_1, A_2)$ pri čemu A_1 i A_2 predstavljaju prvih m, odnosno posljednjih n stupaca matrice A. Pretpostavimo još da je matrica A_2 regularna. Primijenite teorem o implicitnoj funkciji u točki $(0,0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ na funkciju $f\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ definiranu s $f(P) = AP$. Pokažite da do istog rezultata možemo doći i primjenom teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja Cramerovog sistema linearnih jednadžbi.

8. Pokažite da u okolini svake točke (x_0, y_0, z_0) koja zadovoljava sistem
$$\begin{aligned} x^4 + (x+z)y^3 - 3 &= 0 \\ x^4 + (2x+3z)y^3 - 6 &= 0 \end{aligned}$$
postoji jedinstveno rješenje u obliku $y = \varphi_1(x), z = \varphi_2(x)$ pri čemu su φ_1 i φ_2 diferencijabilne funkcije.

9. Pokažite da sistem jednadžbi
$$\begin{aligned} x - e^u \cos v &= 0 \\ v - e^y \sin x &= 0 \end{aligned}$$

ima rješenja. Dokažite: ako je točka (x_0, y_0, u_0, v_0) neko rješenje gornjeg sistema onda u njezinoj okolini postoji jedinstveno rješenje sistema u obliku $(u, v) = \varphi(x, y)$. Pokažite da je $\det D\varphi(x, y) = \frac{v}{x}$.

§ 12 Teorem o inverznom preslikavanju

Aproksimacija preslikavanja diferencijalom omogućuje da se i pitanje lokalne invertibilnosti preslikavanja svede na pitanje invertibilnosti linearnog operatora. Točnije, vrijedi

Teorem 12.1 (O inverznom preslikavanju) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ preslikavanje klase C^1 na Ω i neka je u točki $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \Omega$ diferencijal $Df(P_0)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ regularan operator. Tada postoje okoline $U \subseteq \mathbb{R}^n$ oko P_0 i $V \subseteq \mathbb{R}^n$ oko $Q_0 = f(P_0)$ i postoji preslikavanje $g\colon V \to U$ koje je inverzno preslikavanju $f|_U\colon U \to V$. Preslikavanje g je diferencijabilno klase C^1 i vrijedi*

$$Dg(f(P)) = Df(P)^{-1} \quad , \ P \in U\ . \tag{1}$$

Dokaz: Definirajmo preslikavanje $F\colon \Omega \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ s

$$F(P, Q) := f(P) - Q\ . \tag{2}$$

F je klase C^1 i $F(P_0, Q_0) = 0$. Osim toga je $D_P F(P_0, Q_0) = Df(P_0)$ regularan operator. Stoga, prema Teoremu 11.3 o implicitnoj funkciji, postoje okoline $U_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ oko P_0 i $V_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ oko Q_0 i postoji jedinstveno preslikavanje $g\colon V_1 \to U_1$ klase C^1 takvo da je

$$F(g(Q), Q) = 0 \quad , \ Q \in V_1\ . \tag{3}$$

Uvrstimo li to u (2) dobivamo

$$f(g(Q)) = Q \quad , \ Q \in V_1$$

odnosno

$$f \circ g = 1_{V_1}\ . \tag{4}$$

Kako je (4) jednakost dviju funkcija na otvorenom skupu V_1, to su i njihovi diferencijali na V_1 jednaki (Napomena 7.1), pa dobivamo

$$Df(g(Q_0)) \circ Dg(Q_0) = 1_{\mathbb{R}^n}\ . \tag{5}$$

Zbog jedinstvenosti preslikavanja g je $g(Q_0) = P_0$ pa iz (5) dobivamo

$$Dg(Q_0) = Df(P_0)^{-1} \ . \tag{6}$$

Znači, preslikavanje $g\colon V_1 \to U_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ je klase C^1 i zbog (6) je diferencijal $Dg(Q_0)$ regularan operator. Zbog toga možemo i sa g ponoviti upravo provedeno zaključivanje. Postoje dakle, otvoreni skupovi $U \subseteq U_1$ oko P_0, $V_2 \subseteq V_1$ oko Q_0 i preslikavanje $\varphi\colon U \to V_2$ klase C^1 takvo da je

$$g \circ \varphi = 1_U \ . \tag{7}$$

Neka je $V := g^{\leftarrow}(U) \subseteq V_1$. Kako je g neprekidno, to je V otvorena okolina oko Q_0. Zbog (4) je g injektivno preslikavanje, a zbog (7) slika od g sadrži U. Stoga je

$$g(V) = g(g^{\leftarrow}(U)) = U \, ,$$

pa je $g|_V : V \to U$ bijekcija.

Iz (4) restrikcijom na V dobivamo

$$f \circ g|_V = 1_V$$

pa je

$$f|_{g(V)} \circ g|_V = 1|_V$$

odnosno

$$f|_U = (g|_V)^{-1} \ .$$

Stoga je $f|_U : U \to V$ bijekcija s inverzom $g|_V$ klase C^1. Formula (1) sada slijedi iz (4) primjenom teorema o diferencijabilnosti kompozicije. ■

Napomena 12.1 Iz matričnog zapisa formule (1) i Korolara 9.5, vidi se da ako je preslikavanje f klase C^p, $p \geq 1$, onda je i lokalni inverz g također klase C^p.

Definicija 12.1 Neka su Ω i Ω' otvoreni skupovi u $\mathbb{R}^n$. Za diferencijabilno preslikavanje $f\colon \Omega \to \Omega'$ klase C^1 kažemo da je ***difeomorfizam*** ako postoji diferencijabilno preslikavanje $g\colon \Omega' \to \Omega$ klase C^1 takvo da je $g \circ f = 1_\Omega$ i $f \circ g = 1_{\Omega'}$, tj. ako je f bijekcija takva da su i f i f^{-1} diferencijabilna preslikavanja klase C^1.

Teorem o inverznom preslikavanju govori, dakle, da je uz navedene uvjete, preslikavanje f ***lokalni difeomorfizam***.

Primijetimo da Teorem 12.1 zaista ima samo lokalni karakter. Moguće je naime da je diferencijal preslikavanja f u svakoj točki regularan operator, ali da f nema (globalni) inverz. (Za funkciju jedne varijable na intervalu to nije moguće, jer je takva funkcija uvijek strogo monotona.)

Primjer 12.1 Preslikavanje $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definirano s $f(x,y):=(e^x\cos y, e^x\sin y)$ je očito klase C^∞, i Jacobijeva matrica je jednaka $\begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{pmatrix}$. Njena determinanta jednaka je e^{2x}, što je $\neq 0$ za sve $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, pa je diferencijal od f svuda regularan operator. Ipak, f nema globalni inverz jer je f periodična funkcija, tj.

$$f(x, y+2k\pi) = f(x,y)\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

pa nije injektivna.

Primijetimo još i to da diferencijabilnost preslikavanja f^{-1} ne slijedi iz same diferencijabilnosti preslikavanja f (čak niti ako je f^{-1} neprekidno).

Primjer 12.2 Neka je $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ preslikavanje dano s $f(x,y):=(x^3, y-x)$. Očito je f klase C^1 i lako se provjeri da je inverzno preslikavanje $g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dano s $g(u,v):=(\sqrt[3]{u}, v+\sqrt[3]{u})$. Iako je preslikavanje g svuda neprekidno, ono nije diferencijabilno u $(0,0)$.

Dokažimo na kraju i jednu jednostavnu, ali važnu posljedicu teorema o inverznom preslikavanju.

Teorem 12.2 *Neka je $f\colon\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ preslikavanje klase C^1 takvo da je diferencijal $Df(P)$ regularan za sve $P\in\Omega$. Tada je za svaki otvoreni skup $W\subseteq\Omega$, slika $f(W)$ otvoren skup, tj. f je **otvoreno preslikavanje**. Specijalno je skup $f(\Omega)$ otvoren.*

Dokaz: Neka je $Q\in f(W)$ proizvoljna točka i neka je $P\in W$ takav da je $Q=f(P)$. Kako je $Df(P)$ regularan, postoje otvoreni skupovi $U\subseteq W$ oko P i V oko Q takvi da je $f(U)=V$. Kako je V otvoren i $Q\in V=f(U)\subseteq f(W)$, zaključujemo da je $f(W)$ otvoren skup. ■

Zadaci

1. Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) := x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}$ za $x \neq 0$ te $f(0) = 0$. Pokažite da je f diferencijabilna na $\mathbb{R}$, ali nije klase C^1. Dokažite da f nije lokalno invertibilna u okolini točke $x_0 = 0$. (Uočite da ovaj primjer pokazuje da tvrdnja Teorema o inverznoj funkciji ne vrijedi ako funkcija nije klase C^1.)

2. Neka je $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) := (\cos x + \cos y, \sin x + \sin y)$. U kojim točkama je f lokalno diferencijabilno invertibilna?

3. Neka je $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^2$ funkcija definirana formulom $f(x, y) := (x \cos \frac{y}{x}, x \sin \frac{y}{x})$. Pokažite da je f lokalni difeomorfizam u svakoj točki svoje domene. Da li je f i globalni difeomorfizam?

4. Neka je $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) := (yz, zx, xy)$. Odredite sve točke P u kojima je f lokalni difeomorfizam i za svaku takvu točku izračunajte Jacobijan inverzne funkcije u točki $f(P)$.

§ 13 Taylorov teorem srednje vrijednosti

Za proučavanje lokalnih svojstava funkcije često nije dovoljna linearna aproksimacija, već trebaju neka bolja, finija sredstva. O jednoj takvoj aproksimaciji polinomom govori Taylorov[1] teorem, koji zbog oblika u kojem ćemo prikazivati 'ostatak' svrstavamo u teoreme srednje vrijednosti. Za realnu funkciju f jedne varijable koja je diferencijabilna klase C^{p+1} na nekoj okolini U točke x_0, teorem tvrdi da za $h \in \mathbb{R}$ takav da je $[x_0, x_0 + h] \subseteq U$, postoji $\vartheta \in \langle 0, 1\rangle$ takav da je

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) h^j + \frac{1}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x_0 + \vartheta h) h^{p+1} . \qquad (1)$$

Pokazat ćemo da vrijedi direktna generalizacija ovog teorema na funkcije više varijabli.

[1] Brook Taylor (1685–1731), engleski matematičar

Teorem 13.1 (Taylorov teorem srednje vrijednosti) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ diferencijabilno preslikavanje klase C^{p+1} i $[P_0, P_0+H] \subseteq \Omega$. Tada postoji $\vartheta \in \langle 0,1\rangle \subseteq \mathbb{R}$ takav da je*

$$f(P_0+H) = f(P_0) + \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j!} D^j f(P_0)(H) + \frac{1}{(p+1)!} D^{p+1} f(P_0+\vartheta H)(H)\ . \quad (2)$$

Polinom $f(P_0) + \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j!} D^j f(P_0)(H)$ zove se ***Taylorov polinom*** stupnja p funkcije f, a

$$R_p(H) := \frac{1}{(p+1)!} D^{p+1} f(P_0+\vartheta H)(H)$$

je p***-ti ostatak*** funkcije f u točki P_0.

Dokaz: Neka je $\varphi(t) = P_0 + tH$, $t \in \mathbb{R}$. Tada je funkcija $g = f \circ \varphi$ realna funkcija koja je klase C^{p+1} na nekoj okolini U segmenta $[0,1]$ u $\mathbb{R}$ i vrijedi $g(0) = f(P_0)$, $g(1) = f(P_0+H)$. Primijenimo li Taylorov teorem na funkciju g i segment $[0,1]$, zaključujemo da postoji $\vartheta \in \langle 0,1\rangle$ takav da je

$$g(1) = g(0) + \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j!} g^{(j)}(0) + \frac{1}{(p+1)!} g^{(p+1)}(\vartheta)\ . \quad (3)$$

Odredimo $g^{(j)}(t)$, $t \in [0,1]$. Kako je $g = f \circ \varphi$, to je

$$g'(t) = (f\circ\varphi)'(t) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(\varphi(t)) \cdot h_i = \big(\sum_i h_i \partial_i f\big)(\varphi(t)) \quad (4)$$

gdje je $H = (h_1, \ldots, h_n)$. Označimo li s $f_1 := \sum_i h_i \partial_i f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ vidimo da je $g' = f_1 \circ \varphi$ funkcija istog oblika kao g. Stoga je

$$\begin{aligned} g''(t) &= (f_1\circ\varphi)'(t) = \big(\sum_j h_j \partial_j f_1\big)(\varphi(t)) = \\ &= \big(\sum_j h_j \partial_j \sum_i h_i \partial_i f\big)(\varphi(t)) = \big(\sum_j \sum_i h_j h_i \partial_j \partial_i f\big)(\varphi(t)) \end{aligned} \quad (5)$$

što je ponovo funkcija oblika $f_2 \circ \varphi$, za neku funkciju $f_2\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

Međutim, desne strane u formulama (4) i (5) su upravo diferencijal, odnosno drugi diferencijal funkcije f u točki $\varphi(t)$ primijenjeni na vektor H. Nastavimo li indukcijom dalje, dobivamo

$$g^{(k)}(t) = D^k f(\varphi(t))(H)\ ,\ t \in [0,1],\ k = 1, 2, \dots, p+1, \tag{6}$$

što uvrštavanjem u (3) daje traženu formulu (2). ∎

Uz oznake kao u Teoremu 13.1 imamo sljedeće posljedice.

Korolar 13.2 *Neka je $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencijabilno preslikavanje klase C^{p+1} i $P_0 \in \Omega$. Ako su $r > 0$, $M > 0$ takvi da je $|\partial_1^{i_1}\partial_2^{i_2}\cdots\partial_n^{i_n} f(P)| \le M$ za sve $i_1, \dots, i_n$ takve da je $i_1 + \cdots + i_n = p+1$, i sve $P \in K(P_0, r)$, onda je $|R_p(H)| \le \frac{Mn^{p+1}}{(p+1)!}\|H\|^{p+1}$, čim je $\|H\| < r$.*

Dokaz: Prema Teoremu 13.1, izrazu za više diferencijale u 9.10 i polinomijalnoj formuli, postoji $\vartheta \in \langle 0, 1\rangle$ takav da je

$$\begin{aligned}
|R_p(H)| &= \Big| \frac{1}{(p+1)!} \sum_{i_1+\cdots+i_n=p+1} \frac{(p+1)!}{i_1!\cdots i_n!}\, \partial_1^{i_1}\partial_2^{i_2}\cdots\partial_n^{i_n} f(P_0+\vartheta H)\ h_1^{i_1}\cdots h_n^{i_n} \Big| \\
&\le \frac{1}{(p+1)!}\, M \sum_{i_1+\cdots+i_n=p+1} \frac{(p+1)!}{i_1!\cdots i_n!} |h_1|^{i_1}\cdots|h_n|^{i_n} \\
&= \frac{1}{(p+1)!}\, M(|h_1| + \cdots + |h_n|)^{p+1} \le \frac{M}{(p+1)!}(n\cdot\|H\|)^{p+1}\ .
\end{aligned}$$

∎

Korolar 13.3 *Neka je $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencijabilno preslikavanje klase C^{p+1} i $P_0 \in \Omega$. Tada je*

$$\lim_{H\to 0} \frac{R_p(H)}{\|H\|^p} = 0\ .$$

Dokaz: Kako su funkcije $\partial_1^{i_1}\partial_2^{i_2}\cdots\partial_n^{i_n} f$, $i_1 + \cdots + i_n = p+1$, neprekidne u P_0, budući je $f \in C^{p+1}(\Omega)$, to su one i ograničene na nekoj okolini točke P_0 (Lema 2.8). Stoga postoje $r > 0$, $M > 0$ takvi da je $|\partial_1^{i_1}\partial_2^{i_2}\cdots\partial_n^{i_n} f(P)| \le M$ za sve $i_1 + \cdots + i_n = p+1$ i sve $P \in K(P_0, r)$. Prema prethodnom korolaru je tada

$$\frac{|R_p(H)|}{\|H\|^p} \le \frac{Mn^{p+1}}{(p+1)!}\,\|H\|\,,$$

odakle slijedi tvrdnja. ∎

Prethodni korolar pokazuje koliko je dobra aproksimacija funkcije f u točki P_0 p-tim Taylorovim polinomom. Međutim, za neke funkcije je ta ista aproksimacija dobra i u točkama neke okoline oko P_0.

Korolar 13.4 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija klase C^∞, $P_0 \in \Omega$ i $r > 0$ takav da je $K(P_0, r) \subseteq \Omega$. Ako postoje $p_0 \in \mathbb{N}$ i $M > 0$ takvi da je za svaki $p \geq p_0$, $|\partial_1^{i_1} \partial_2^{i_2} \cdots \partial_n^{i_n} f(P)| \leq M$ za sve $P \in K(P_0, r)$ i sve $i_1, \ldots, i_n$ takve da je $i_1 + \cdots + i_n = p+1$, onda je $\lim\limits_p R_p(H) = 0$ za sve H za koje je $\|H\| < r$, tj.*

$$f(P_0 + H) = f(P_0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} D^j f(P_0)(H) \ .$$

U tom slučaju kažemo da je funkcija f ***analitička u okolini točke*** P_0, a red $f(P_0) + \sum \frac{1}{j!} D^j f(P_0)(H)$ je ***Taylorov red*** funkcije f oko točke P_0. Skup svih analitičkih funkcija na Ω označavamo s $C^\omega(\Omega)$.

Dokaz: Prema Korolaru 13.2, za $\|H\| < r$ i svaki $p \geq p_0$ vrijedi

$$|R_p(H)| \leq M \frac{(n\|H\|)^{p+1}}{(p+1)!}$$

pa tvrdnja slijedi iz činjenice da je $\lim\limits_k \dfrac{\alpha^k}{k!} = 0$ za sve $\alpha \in \mathbb{R}$. ■

Napomenimo na kraju da je $C^\omega(\Omega) \subsetneqq C^\infty(\Omega)$, tj. postoje funkcije klase C^∞ koje nisu analitičke. Takva je, naprimjer, funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$. Sve su njene derivacije u 0 jednake nuli, pa kada bi ta funkcija bila analitička u 0, bila bi konstantna, što nije.

§ 14 Ekstremi

Velik dio matematike bavi se pitanjima postojanja i nalaženja ekstrema funkcija. Mi ćemo ovdje razmotriti neka najjednostavnija pitanja postojanja ekstrema diferencijabilnih funkcija više varijabli.

Za realnu funkciju $f\colon S \to \mathbb{R}$ kažemo da ima ***maksimum*** u točki $P_0 \in S$ ako je $f(P_0) \geq f(P)$ za sve $P \in S$. Vrijednost $f(P_0)$ je maksimum funkcije f na skupu S. Ukoliko je $f(P_0) > f(P)$ za sve $P \in S \setminus \{P_0\}$, onda kažemo da f ima u točki P_0 ***strogi maksimum***. Za f kažemo da ima (strogi) ***lokalni maksimum*** u točki P_0 ako postoji okolina točke P_0 takva da restrikcija funkcije f na tu okolinu ima (strogi) maksimum u P_0. Analogno se definiraju (strogi) minimum i (strogi) lokalni minimum. Jasno je da pojam lokalnih ekstrema ima smisla samo ako je S snabdjeven nekom topologijom.

Definicija 14.1 Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, a $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija. Za točku $P_0 \in \Omega$ kažemo da je ***stacionarna*** ili ***kritična točka*** funkcije f, ako je $Df(P_0) = 0$, tj. ako je $\partial_i f(P_0) = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Teorem 14.1 (Nuždan uvjet za postojanje lokalnog ekstrema) *Ako je $P_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ točka lokalnog ekstrema diferencijabilne funkcije $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, onda je P_0 stacionarna točka za f, tj. $Df(P_0) = 0$.*

Dokaz: Ako f ima u P_0 lokalni minimum, onda za svaki $i = 1, \ldots, n$ i restrikcija

$$\varphi_i\colon x_i \mapsto f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)$$

funkcije f na pravac kroz P_0 određen i-tim koordinatnim vektorom, ima u točki x_i^0 lokalni minimum. Kako je φ_i funkcija jedne varijable, to je $\varphi_i'(x_i^0) = 0$, a jer je $\varphi_i'(x_i^0) = \partial_i f(P_0)$, dobivamo tvrdnju teorema. Analogno se zaključuje u slučaju lokalnog maksimuma. ■

Kao i kod funkcija jedne varijable, stacionarnost preslikavanja f nije i dovoljna za ekstrem. Potrebno je promatrati i drugi diferencijal.

Prije nego formuliramo neke dovoljne uvjete za postojanje ekstrema, definirat ćemo neke pojmove vezane za (simetrične) ***kvadratne forme***, tj. za funkcije $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ oblika $q(H) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$, $H \in \mathbb{R}^n$, gdje su $a_{ij} \in \mathbb{R}$ takvi da je $a_{ij} = a_{ji}$.

Definicija 14.2 Neka je $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratna forma.

(a) q je ***pozitivno definitna***, ako je

  (i) $q(H) \geq 0$, $H \in \mathbb{R}^n$, i

  (ii) $q(H) = 0$ ako i samo ako je $H = 0$.

  Ako umjesto (i) vrijedi $q(H) \leq 0$ za sve $H \in \mathbb{R}^n$, onda kažemo da je q ***negativno definitna*** .

(b) q je ***pozitivno semidefinitna*** ako je $q(H) \geq 0$ za sve $H \in \mathbb{R}^n$.

q je ***negativno semidefinitna*** ako je $q(H) \leq 0$ za sve $H \in \mathbb{R}^n$.

(c) q je ***indefinitna*** ako nije niti pozitivno, niti negativno semidefinitna.

Lako se vidi da ako je kvadratna forma q indefinitna, onda u svakoj okolini nule, $0 \in \mathbb{R}^n$, postoje točke u kojima q poprima pozitivne vrijednosti, i postoje točke u kojima q poprima negativne vrijednosti.

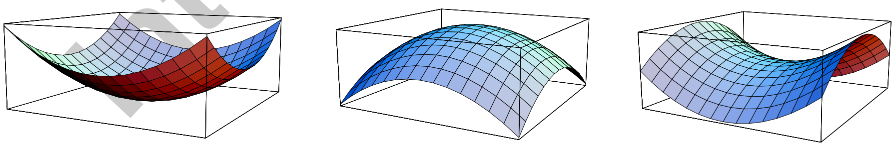
Teorem 14.2 (Dovoljni uvjeti postojanja lokalnog ekstrema) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija klase C^2, i neka je $P_0 \in \Omega$ stacionarna točka funkcije f, tj. $Df(P_0) = 0$.*

(i) *Ako je drugi diferencijal $D^2 f(P_0)$ funkcije f u točki P_0 pozitivno definitna kvadratna forma, onda f ima u točki P_0 strogi lokalni minimum.*

(ii) *Ako je $D^2 f(P_0)$ negativno definitna kvadratna forma, onda f ima u točki P_0 strogi lokalni maksimum.*

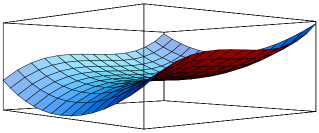
(iii) *Ako je $D^2 f(P_0)$ indefinitna kvadratna forma, onda f nema u točki P_0 lokalni ekstrem, tj. P_0 je **sedlasta točka** funkcije f.*

Primijetimo da teorem ništa ne govori o slučaju kad je $D^2 f(P_0)$ samo semidefinitna kvadratna forma. Tada, naime, drugi diferencijal ne daje dovoljno informacija, pa su potrebna druga sredstva. Situacija je međutim mnogo složenija nego kod funkcija jedne varijable.

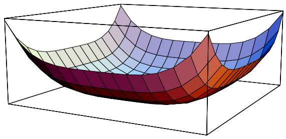


$f(x,y)=x^2+y^2$ *strogi lokalni minimum* — $f(x,y)=1-x^2-y^2$ *strogi lokalni maksimum* — $f(x,y)=x^2-y^2$ *sedlasta točka*

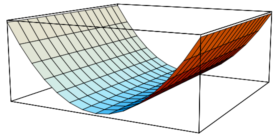
Primjeri grafova funkcija u okolini stacionarne točke u kojoj je drugi diferencijal pozitivno definitna, negativno definitna odnosno indefinitna kvadratna forma



$f(x,y)=x^2+y^3$
sedlasta točka



$f(x,y)=x^4+y^4$
strogi lokalni minimum



$f(x,y)=x^2$
(nestrogi) lokalni minimum

U sva tri gornja primjera radi se o stacionarnoj točki u kojoj je drugi diferencijal pozitivno semidefinitna kvadratna forma

Dokaz: Kako je $f \in C^2(\Omega)$ i $Df(P_0) = 0$, po Taylorovom teoremu za svaki P iz neke okoline točke P_0 postoji $\vartheta_P \in \langle 0, 1\rangle$ takav da je

$$f(P) - f(P_0) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(P_0 + \vartheta_P(P - P_0))(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \, . \qquad (1)$$

Označimo

$$a_{ij} := \partial_i \partial_j f(P_0)$$

$$r_{ij}(P) := \partial_i \partial_j f(P_0 + \vartheta_P(P - P_0)) - \partial_i \partial_j f(P_0) \, .$$

Za $P \neq P_0$ neka je $y_i := \dfrac{x_i - x_i^0}{\|P - P_0\|}$, $i = 1, \ldots, n$. Tada je $|y_i| \leq 1$ i $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$. Uvrstimo li sve to u (1) dobivamo

$$f(P) - f(P_0) = \frac{\|P - P_0\|^2}{2} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j + \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}(P) y_i y_j \Big) \, . \qquad (2)$$

(i) Neka je $D^2 f(P_0)$, tj. funkcija $(y_1, \ldots, y_n) \mapsto \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j$, pozitivno definitna kvadratna forma. To je neprekidna funkcija, pa ona na jediničnoj sferi $\mathbb{S}^{n-1} := \{(y_1, \ldots, y_n) : \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 = 1\}$ poprima minimum (Korolar 5.9). Označimo taj minimum s ε. Zbog pozitivne definitnosti drugog diferencijala je $\varepsilon > 0$. Kako je $f \in C^2(\Omega)$ to je $\lim\limits_{P \to P_0} r_{ij}(P) = 0$, pa postoji okolina U oko P_0 takva da je $|r_{ij}(P)| < \frac{\varepsilon}{n^2}$ za sve $P \in U$. Zbog $|y_i| \leq 1$ za $P \in U \setminus \{P_0\}$ vrijedi

$$\Big| \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}(P) y_i y_j \Big| \leq \sum_{i,j=1}^{n} |r_{ij}(P)| < \varepsilon \, .$$

Zbog toga je u (2) izraz u zagradi na desnoj strani > 0, pa je za sve $P \in U \setminus \{P_0\}$, $f(P) > f(P_0)$, tj. f ima u P_0 strogi lokalni minimum.

(ii) Ako je drugi diferencijal $D^2 f(P_0)$ negativno definitna kvadratna forma, tada je $-D^2 f(P_0) = D^2(-f)(P_0)$ pozitivno definitna, pa prema (i) zaključujemo da funkcija $-f$ ima u P_0 strogi lokalni minimum, odakle slijedi da f ima u P_0 strogi lokalni maksimum.

(iii) Neka je $D^2 f(P_0)$ indefinitna kvadratna forma. Tada postoje vektori $H' = (h'_1, \dots, h'_n)$, $H'' = (h''_1, \dots, h''_n)$ takvi da je $\sum\limits_{i,j} a_{ij} h'_i h'_j > 0$ i $\sum\limits_{i,j} a_{ij} h''_i h''_j < 0$. Za $t \in \mathbb{R}$ neka je

$$P'_t = P_0 + tH' \;\;,\;\; P''_t = P_0 + tH'' \,.$$

Tada je, uz oznake kao na početku dokaza teorema, $y'_i = \dfrac{th'_i}{|t|\|H'\|}$ pa je $y'_i y'_j = \dfrac{1}{\|H'\|^2} h'_i h'_j$. Uvrstimo li to u (2) dobivamo

$$f(P'_t) - f(P_0) = \frac{t^2}{2}\Big(\sum_{i,j} a_{ij} h'_i h'_j + \sum_{i,j} r_{ij}(P'_t) h'_i h'_j\Big) \,. \tag{3}$$

Kako je $\lim\limits_{t \to 0} r_{ij}(P'_t) = 0$, to je za dovoljno malene t, drugi sumand u zagradi po apsolutnoj vrijednosti manji od prvog (koji je pozitivan realan broj neovisan o t), pa je $f(P'_t) > f(P_0)$. Kako se za svaku okolinu U točke P_0 može uzeti t tako malen da je $P'_t \in U$, zaključujemo da f u P_0 nema lokalni maksimum.

Analogno, polazeći od točke P''_t, zaključujemo da f nema u P_0 niti lokalni minimum, čime je teorem dokazan. ■

Da bi se Teorem 14.2 mogao efektivno upotrijebiti, potrebno je imati kriterij kako da se ustanovi kakva je, s obzirom na definitnost, zadana kvadratna forma.

Neka je $q(t_1, \dots, t_n) = \sum\limits_{i,j} a_{ij} t_i t_j$ kvadratna forma. Tada je pridružena matrica $A = [a_{ij}]$ simetrična, pa se može dijagonalizirati (vidi [2]). U novim koordinatama forma q ima oblik

$$q(t'_1, \dots, t'_n) = \sum_i \lambda_i {t'_i}^2$$

pa očito vrijedi sljedeće:

(*i*) Kvadratna forma q je pozitivno definitna ako i samo ako su sve svojstvene vrijednosti matrice A strogo pozitivne.

(*ii*) q je negativno definitna ako i samo ako su sve svojstvene vrijednosti matrice A strogo negativne.

(*iii*) q je pozitivno semidefinitna ako i samo ako su sve svojstvene vrijednosti matrice A veće ili jednake nuli.

(*iv*) q je negativno semidefinitna ako i samo ako su sve svojstvene vrijednosti matrice A manje ili jednake nuli.

(*v*) q je indefinitna ako postoje barem dvije svojstvene vrijednosti različite od 0 i suprotnog predznaka.

Kako nije uvijek jednostavno dijagonalizirati kvadratnu formu, koristi se sljedeći kriterij:

Teorem 14.3 (Sylvesterov[1] kriterij) *Neka je* $q(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i,j} a_{ij} t_i t_j$ *(simetrična) kvadratna forma i označimo redom determinante*

$$\alpha_1 := a_{11}\ ,\ \alpha_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \alpha_n := \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(*i*) *q je pozitivno definitna kvadratna forma ako i samo ako je $\alpha_i > 0$ za sve $i = 1, \ldots, n$*

(*ii*) *q je negativno definitna kvadratna forma ako i samo ako je $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 < 0$, $\alpha_4 > 0$, $\ldots$.*

Sylvesterov kriterij, kao i činjenice o dijagonalizaciji kvadratnih formi, nećemo dokazivati, jer bi nas to odvelo predaleko u algebru. Dokaz se može naći u [2, Poglavlje III. 5].

Zadaci

1. Odredite sve lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$.

[1]James Joseph Sylvester (1814–1897), engleski matematičar

2. Odredite sve lokalne ekstreme funkcije $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$.
3. Odredite sve lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.
4. Pokažite da točka $(0, 0)$ nije točka lokalnog ekstrema za funkciju $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$ premda restrikcija funkcije f na proizvoljan pravac kroz ishodište ima u $(0, 0)$ lokalni minimum.

U praksi se često javlja potreba za računanjem tzv. ***uvjetnih*** ili ***vezanih ekstrema***. Precizna formulacija ovog problema sadržana je u narednom teoremu o nužnim uvjetima.

Teorem A *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, neka su $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ funkcije klase C^1, neka je za $k \in \mathbb{R}$ zadan skup $S = \{P \in \Omega : g(P) = k\}$ te neka vrijedi $\nabla g(P) \neq 0$, $\forall P \in S$. Ako je $P_0 \in S$ točka lokalnog ekstrema za $f|_S$ onda postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ sa svojstvom $\nabla f(P_0) = \lambda g(P_0)$.*

Koordinatno zapisan, uvjet iz gornjeg teorema glasi:

$$\partial_i f(P_0) = \lambda \partial_i g(P_0),\ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Dokaz: (Samo za slučaj $n = 3$.) Pri konstrukciji tangencijalne ravnine na plohu S vidjeli smo da je $\nabla g(P_0)$ okomit na vektor $c'(t_0)$ gdje je c proizvoljna diferencijabilna krivulja na S sa svojstvom $c(t_0) = P_0$. S druge strane, ako je P_0 točka lokalnog ekstrema za $f|_S$ onda je i t_0 točka lokalnog ekstrema za kompoziciju $f \circ c$. Zato je $(f \circ c)'(t_0) = 0$, odnosno $(\nabla f(P_0) \mid c'(t_0)) = 0$. To pokazuje da je i $\nabla f(P_0) \perp c'(t_0)$ i zato su vektori $\nabla f(P_0)$ i $\nabla g(P_0)$ kolinearni.

Uobičajeno je pri računanju uvjetnih ekstrema definirati tzv. ***Lagrangeovu funkciju***

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda g(x_1, \ldots, x_n).$$

Deriviramo li parcijalno funkciju L po svim varijablama i sve parcijalne derivacije izjednačimo s nulom dobivamo upravo gornje nužne uvjete (pritom posljednja jednadžba dobivena izjednačavanjem s nulom parcijalne derivacije funkcije L po varijabli λ upravo daje uvjet $g(x_1, \ldots, x_n) = k$).

Često se javlja i problem određivanja lokalnih ekstrema funkcije f uz više zadanih uvjeta: $g_1(P) = 0, \ldots, g_m(P) = 0$. Ovdje bez dokaza navodimo analogon Teorema A koji opisuje nužne uvjete u ovoj situaciji.

Teorem B *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f, g_1, \ldots g_m\colon \Omega \to \mathbb{R}$ funkcije klase C^1 pri čemu je $m < n$. Neka je $S = \{P \in \Omega : g_i(P) = 0, \forall i = 1, \ldots, m\}$*

te neka je $\{\nabla g_1(P), \dots, \nabla g_m(P)\}$ linearno nezavisan skup $\forall P \in S$. Ako je P_0 točka lokalnog ekstrema za funkciju $f|_S$ onda postoje brojevi $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $\nabla f(P_0) = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(P_0)$.

Kao i prije i ovdje možemo definirati Lagrangeovu funkciju

$$L(x_1, \dots x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

i nužne uvjete iz gornjeg teorema dobiti derivirajući funkciju L po svim varijablama.

5. Dokažite, koristeći gornji Teorem A, da svaka simetrična matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ ima svojstvenu vrijednost.

6. U ravnini $Ax + By + Cz + D = 0$ odredite točku najbližu ishodištu.

7. Za $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2+c^2 > 0$, izračunajte minimum i maksimum funkcije $f(x, y, z) = ax + by + cz$ na jediničnoj sferi u $\mathbb{R}^3$. Pomoću dobivenog rezultata dokažite Cauchyevu nejednakost za skalarni produkt u $\mathbb{R}^3$.

8. Odredite, ako postoji, točku na elipsi $x^2+\frac{y^2}{4} = 1$ u kojoj tangenta na elipsu čini s koordinatnim osima trokut najmanje, odnosno najveće površine.

9. Neka je $c > 0$ i $S = \left\{(x_1, \dots, x_n) : \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = c, x_i \geq 0, \forall i\right\}$. Izračunajte najmanju i najveću vrijednost funkcije $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$ na skupu S. Pomoću dobivenog rezultata dokažite da je za svakih n pozitivnih brojeva njihova geometrijska sredina manja ili jednaka od aritmetičke.

10. Neka je $T = (a, b)$, $a, b > 0$. Odredite, ako postoji, pravac koji prolazi točkom T, na koordinatnim osima odsijeca pozitivne odsječke i s koordinatnim osima čini trokut najmanje, odnosno najveće površine.

11. Odredite pravokutan trokut opsega 12 koji rotacijom oko hipotenuze daje tijelo najmanjeg, odnosno najvećeg volumena.

12. Izračunajte ekstreme funkcije $f(x, y, z) = x + y + z$ uz uvjete $x^2 + y^2 = 2$, $x + z = 1$.

13. Provjerite, služeći se geometrijskom argumentacijom, da je $(0, 1, 0)$ točka minimuma za funkciju $f(x, y, z) = x^2+y^2$ uz uvjete $z = 0$, $z^2-(y-1)^3 = 0$. Pojavljuje li se ova točka kao rješenje Lagrangeovog sistema jednadžbi? Zašto?

14. Na skupu $S = \{(x, y, z) : 2x^2 + y^2 - 4 = 0, x + y + z = 0\}$ pronađite točku najbližu, odnosno najudaljeniju od y-osi.

15. Dokažite da funkcija $f(x, y) = x^2y - 4x^2 - 2y^2$ svoj minimum na proizvoljnom kompaktnom skupu $K \subset \mathbb{R}^2$ dostiže na rubu od K.

16. Neka su $S, K, \overline{K}$ redom jedinična sfera, otvorena i zatvorena jedinična kugla u $\mathbb{R}^n$, te neka je realna funkcija f neprekidna na $\overline{K}$, diferencijabilna na K i konstantna na S. Dokažite da postoji točka $P_0 \in K$ u kojoj je $\nabla f(P_0) = 0$.

17. Izračunajte minimum i maksimum funkcije $f(x, y, z) = 2(x + y + z) - xyz$ na zatvorenoj kugli $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$.

18. Neka je $T \in \mathbb{R}^n, T \neq 0$. Odredite minimum i maksimum funkcije $f(P) := (P \mid T) + \sqrt{1 - \|P\|^2}$ na zatvorenoj jediničnoj kugli u $\mathbb{R}^n$.

U iduća tri zadatka pokušajte karakter stacionarne točke dobivene rješavanjem Lagrangeovog sistema jednadžbi odrediti eliminiranjem jedne nepoznanice koristeći zadani uvjet. Time polazni problem uvjetnih ekstrema svodimo na računanje običnih (bezuvjetnih) ekstrema što omogućuje i primjenu Teorema o dovoljnim uvjetima lokalnih ekstrema.

19. Odredite dimenzije pravokutnika zadanog opsega $2s$ tako da mu površina bude maksimalna.

20. Odredite dimenzije pravokutne kade volumena V tako da joj oplošje bude minimalno.

21. Odredite trokut zadanog opsega $o = 2s$ s maksimalnom površinom.

Eliminacija neke od nepoznanica kao u prethodnim primjerima često je međutim nepraktična (jer može dovesti do kompliciranih računa), a ponekad je i nemoguća. S druge strane, zadani uvjet $g(P) = 0$ zbog pretpostavke $\nabla g(P) \neq 0$ uvijek omogućuje primjenu Teorema o implicitnoj funkciji što će još uvijek biti dovoljno, jer je za ispitivanje karaktera stacionarne točke dovoljno poznavati derivacije drugog reda. Račun koji slijedi zbog jednostavnosti izvest ćemo samo u dimenziji $n = 2$.

Pretpostavimo da su $f, g\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcije klase C^2; neka je $S = \{(x, y) \in \Omega : g(x, y) = 0\}$ te neka vrijedi $\nabla g(x, y) \neq 0, \forall (x, y) \in S$. Tražimo lokalne ekstreme za f uz uvjet $g(x, y) = 0$. Neka je $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ Lagrangeova funkcija. Pretpostavimo da smo rješavanjem Lagrangeovog sistema jednadžbi dobili kritičnu točku $(x_0, y_0) \in S$, neka je još λ_0 pripadna vrijednost ***Lagrangeovog multiplikatora***. Kako je $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ bez smanjenja općenitosti smijemo pretpostaviti da je $\partial_2 g(x_0, y_0) \neq 0$. Primjenom Teorema o implicitnoj funkciji dobivamo interval $I \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $x_0 \in I$ i diferencijabilnu funkciju $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ sa svojstvima $\varphi(x_0) = y_0$, $g(x, \varphi(x)) = 0, \forall x \in I$. Pritom je $\varphi'(x) = -\frac{\partial_1 g(x, \varphi(x))}{\partial_2 g(x, \varphi(x))}, \forall x \in I$.

Sada je jasno da je (x_0, y_0) točka lokalnog uvjetnog ekstrema za funkciju f uz uvjet $g(x, y) = 0$ ako i samo ako je x_0 točka lokalnog ekstrema za funkciju $\tilde{f}\colon I \to \mathbb{R}$ definiranu s $\tilde{f}(x) = f(x, \varphi(x))$. (Pritom je jasno da je x_0 kritična točka za $\tilde{f}$, to jest vrijedi $\tilde{f}'(x_0) = 0$.) Preostaje izračunati $\tilde{f}''(x_0)$ (što možemo zbog pretpostavke da su f i g klase C^2).

22. Uz gornje pretpostavke i oznake dokažite:

$$\tilde{f}''(x_0) = \frac{-1}{(\partial_2 g(x_0, y_0))^2} \det \begin{bmatrix} 0 & \partial_1 g(x_0, y_0) & \partial_2 g(x_0, y_0) \\ \partial_1 g(x_0, y_0) & \partial_1^2 L(x_0, y_0, \lambda_0) & \partial_1 \partial_2 L(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \partial_2 g(x_0, y_0) & \partial_2 \partial_1 L(x_0, y_0, \lambda_0) & \partial_2^2 L(x_0, y_0, \lambda_0) \end{bmatrix}.$$

23. U elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ upišite pravokutnik stranica paralelnih koordinatnim osima tako da mu površina bude maksimalna; primijenite tvrdnju prethodnog zadatka.

Eventualna generalizacija rezultata iz zadatka 22 očito zahtijeva vrlo komplicirane račune. Ovdje ćemo dovoljne uvjete za vezane ekstreme u općem slučaju (n varijabli, m uvjeta, $m < n$) izvesti drukčije, primjenom Teorema o inverznoj funkciji.[1]

Neka su $f, g_1, \ldots, g_m\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcije klase C^3, neka je $S := \{P \in \Omega : g_i(P) = 0, \forall i = 1, \ldots, m\}$ te neka je skup $\{\nabla g_i(P) : i = 1, \ldots, m\}$ linearno

[1] Rezultate koji slijede iznosimo prema članku. D. Spring, *On the second derivative test for constrained local extrema*, Am. Math. Monthly 92(9), 1985, 631–643

nezavisan $\forall P \in S$. Definirajmo Lagrangeovu funkciju

$$L(\lambda_1, \dots, \lambda_m, x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(P) + f(P).$$

Pretpostavimo da je $V = (C,T) = (c_1, \dots, c_m, a_1, \dots, a_n)$ neko rješenje Lagrangeovog sistema jednadžbi (tj. kritična točka restrikcije $f|_S$). Neka je, nadalje, $\frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}(T) \neq 0$ (što nije smanjenje općenitosti jer zbog linearne nezavisnosti gradijenata, neka od $m \times m$ minora u matrici $\frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(T)$ mora biti $\neq 0$, stoga, ako treba, možemo prenumerirati varijable). Promatrat ćemo ***Hesseovu matricu*** (tj. matricu čiji su elementi parcijalne derivacije drugog reda; uočite da je ova matrica simetrična zbog Schwarzovog teorema) Lagrangeove funkcije L u točki $V = (C,T)$:

$$HL(V) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \partial_1 g_1(T) & \cdots & \partial_n g_1(T) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \partial_1 g_m(T) & \cdots & \partial_n g_m(T) \\ \partial_1 g_1(T) & \cdots & \partial_1 g_m(T) & \partial_1^2 L(V) & \cdots & \partial_1 \partial_n L(V) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_n g_1(T) & \cdots & \partial_n g_m(T) & \partial_n \partial_1 L(V) & \cdots & \partial_n^2 L(V) \end{bmatrix}.$$

Promatrat ćemo glavne minore Δ_k matrice $HL(V)$ i brojeve $\gamma_k = (-1)^m \Delta_k$. Ustvari, trebat će nam samo posljednjih $n - m$ brojeva: $\gamma_{2m+1}, \dots, \gamma_{n+m}$.

Definicija *Neka je $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ konačan niz realnih brojeva koji nisu svi jednaki 0, neka je $k = \max\{i : \alpha_i \neq 0\}$. Kažemo da je niz $\alpha_1, \dots, \alpha_r$:*

(*a*) *pozitivno semidefinitan, ako je $\alpha_j > 0, \forall j \leq k$,*

(*b*) *negativno semidefinitan, ako je $(-1)^j \alpha_j > 0, \forall j \leq k$,*

(*c*) *sedlastog tipa, ako ne vrijedi niti (a), niti (b), tj. ili je $\alpha_j = 0$ za neki $j < k$ ili je narušen redoslijed predznaka,*

(*d*) *pozitivno definitan, ako je pozitivno semidefinitan uz $k = r$,*

(*e*) *negativno definitan, ako je negativno semidefinitan uz $k = r$.*

Sada smo u mogućnosti izreći

Teorem C *Neka su ispunjene pretpostavke iz prethodne diskusije. Ako je niz $\gamma_{2m+1}, \dots, \gamma_{n+m}$*

(a) *pozitivno (negativno) definitan onda f ima lokalni uvjetni minimum (maksimum) u točki T,*

(b) *netrivijalan (tj. nisu svi γ_j jednaki 0) i sedlastog tipa, onda T nije točka uvjetnog lokalnog ekstrema za f.*

Dokaz ovog teorema provest ćemo u sljedeća dva zadatka. No prije toga uočimo sljedeće:

(1) Ako je $\det HL(V) \neq 0$ teorem svakako daje odluku.

(2) U slučaju $n = 2, m = 1$ dobili smo upravo rezultat iz zadatka 22.

(3) U slučaju $m = 0$ (tj. kad nema uvjeta) tvrdnja gornjeg teorema se svodi na poznati rezultat za obične (bezuvjetne) lokalne ekstreme (Teoremi 14.2 i 14.3).

24. Dokažite tvrdnju Teorema C uz trivijalne uvjete: $g_j(P) = x_j = 0$, za sve $j = 1, \ldots, m$.

25. Dokažite Teorem C! Uputa: definirajte zamjenu varijabli $\varphi\colon \mathbb{R}^m \times \Omega \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ formulom $\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, x_1, \ldots, x_n) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m, z_1, \ldots, z_n)$, pri čemu je $z_j = g_j(x_1, \ldots, x_n)$ za $1 \leq j \leq m$, te $z_j = x_j$ za $m + 1 \leq j \leq n$; primijenite Teorem o inverznoj funkciji i iskoristite prethodni zadatak.

U sljedećim zadacima ispitajte karakter dobivenih kritičnih točaka služeći se Teoremom C.

26. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y, z) = xyz$ uz uvjet $x^2+y^2+z^2 = 1$.

27. Izračunajte udaljenost kružnice $x^2 + y^2 = 2$ od pravca $x + y = 4$.

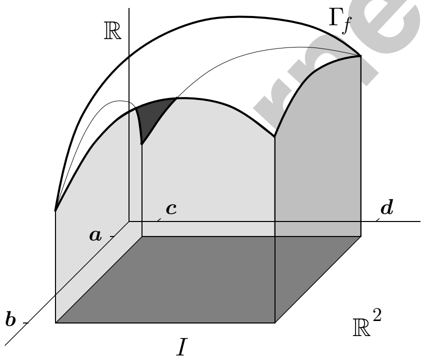
28. Izračunajte lokalne ekstreme funkcije $f(x, y, z, t) = -x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ uz uvjet $x = z$.

3

Riemannov integral

§ 15 Integracija na pravokutniku

U ovom ćemo poglavlju definirati Riemannov[1] integral ograničene funkcije više varijabli i dokazati neka osnovna svojstva Riemannovog integrala. Zbog jednostavnosti oznaka, uglavnom ćemo se baviti funkcijama dviju varijabli. Veći broj varijabli ne donosi ništa kvalitativno novog, pa ćemo te definicije i rezultate na kraju samo ukratko navesti.



Neka je $I = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ zatvoren pravokutnik, a $f\colon I \to \mathbb{R}$ ograničena realna funkcija. Želimo definirati integral $\displaystyle\int_I f$ koji će, ukoliko je f nenegativna 'dobra' funkcija, predstavljati volumen tijela odozgo omeđenog grafom funkcije f. Postupamo kao i u slučaju funkcije jedne varijable.

Pod ***razdiobom*** ρ segmenta $[a, b]$ podrazumijevamo svaki konačan skup točaka $x_i \in [a, b]$, $i = 1, \ldots, k$, takvih da je $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$, i

[1]Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), njemački matematičar

koristit ćemo oznaku $\rho = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b\}$. ***Razdioba pravokutnika*** I je par $\rho = (\rho_x, \rho_y)$, gdje su $\rho_x = \{a = x_0 < \ldots < x_k = b\}$ i $\rho_y = \{c = y_0 < \ldots < y_l = d\}$ razdiobe segmenta $[a, b]$, odnosno $[c, d]$. Pravokutnike $I_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, l$, zovemo pravokutnicima razdiobe ρ. Skup svih razdioba pravokutnika I označavamo s $\rho(I)$. Broj $\delta(\rho) := \max\{\operatorname{diam} I_{ij} : i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, l\}$ zovemo ***dijametar*** ili ***očica*** razdiobe ρ. S $\pi(I_{ij}) := (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ označavat ćemo površinu pravokutnika I_{ij} i slično za $\pi(I)$. Očito je

$$\pi(I) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \pi(I_{ij}) \ . \tag{1}$$

Za ograničenu funkciju $f \colon I \to \mathbb{R}$ i razdiobu ρ pravokutnika I označimo

$$m := m(f) := \inf f(I) \ , \qquad M := M(f) := \sup f(I)$$

$$\left.\begin{array}{l} m_{ij} := m_{ij}(f) := \inf f(I_{ij}) \\ M_{ij} := M_{ij}(f) := \sup f(I_{ij}) \end{array}\right. , i = 1, \ldots, k \ , \ j = 1, \ldots, l \ .$$

Očito je

$$m \leq m_{ij} \leq M_{ij} \leq M \ , \quad \forall i, j \ . \tag{2}$$

Donja i ***gornja Darbouxova***[1] ***suma*** za funkciju f s obzirom na razdiobu ρ su brojevi

$$\begin{aligned} s(f, \rho) &:= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} m_{ij}\, \pi(I_{ij}) \\ S(f, \rho) &:= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} M_{ij}\, \pi(I_{ij}) \ . \end{aligned}$$

Zbog (1) i (2) za svaku razdiobu ρ vrijedi

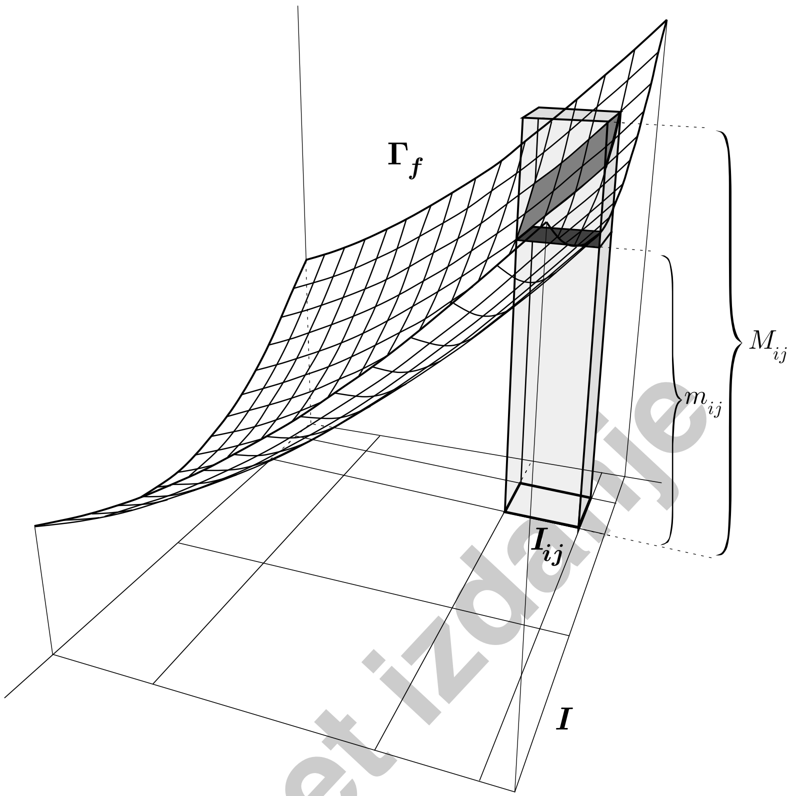
$$m\, \pi(I) \leq s(f, \rho) \leq S(f, \rho) \leq M\, \pi(I) \ . \tag{3}$$

Stoga su dobro definirani brojevi

$$\begin{aligned} \underline{\int} f &:= \sup\{s(f, \rho) : \rho \in \rho(I)\} \\ \overline{\int} f &:= \inf\{S(f, \rho) : \rho \in \rho(I)\} \end{aligned}$$

To su ***donji*** odnosno ***gornji Riemannov integral*** funkcije f.

[1] Jean Gaston Darboux (1842–1917), francuski matematičar



Sumandi u Darbouxovim sumama su volumeni prizmi kakve su, po jedna za svaku od suma, označene na crtežu

Za razdiobu $\rho = (\rho_x, \rho_y)$ kažemo da ***profinjuje*** razdiobu $\rho' = (\rho'_x, \rho'_y)$ i pišemo $\rho' \leq \rho$, ako je $\rho'_x \subseteq \rho_x$ i $\rho'_y \subseteq \rho_y$, tj. ako se ρ_x dobije iz ρ'_x dodavanjem novih diobenih točaka i isto tako za ρ_y. Kao i za funkcije jedne varijable, lako se pokazuje da vrijedi

Lema 15.1 *Ako razdioba ρ profinjuje ρ', $\rho' \leq \rho$, onda je $s(f, \rho') \leq s(f, \rho)$ i $S(f, \rho) \leq S(f, \rho')$.* ■

Kao posljedicu dobivamo

Korolar 15.2 *Za omeđenu funkciju $f\colon I \to \mathbb{R}$ i svake dvije razdiobe ρ, ρ' pravokutnika I, vrijedi*

$$s(f,\rho) \le S(f,\rho') \tag{4}$$

pa je i

$$\underline{\int} f \le \overline{\int} f\,. \tag{5}$$

Dokaz: Neka je $\rho = (\rho_x, \rho_y)$, $\rho' = (\rho'_x, \rho'_y)$ te neka je $\rho'' = (\rho''_x, \rho''_y)$ (neko) njihovo zajedničko profinjenje (naprimjer $\rho''_x = \rho_x \cup \rho'_x$ i $\rho''_y = \rho_y \cup \rho'_y$). Tada, prema Lemi 15.1 i (3), vrijedi

$$s(f,\rho) \le s(f,\rho'') \le S(f,\rho'') \le S(f,\rho')\,. \qquad \blacksquare$$

Definicija 15.1 Za ograničenu funkciju $f\colon I \to \mathbb{R}$ kažemo da je ***integrabilna u Riemannovom smislu*** ili ***R-integrabilna*** na pravokutniku I, ako je $\underline{\int} f = \overline{\int} f$. U tom slučaju ta se zajednička vrijednost označava s $\int_I f$ i zove ***Riemannov integral*** funkcije f na pravokutniku I.

Za integral $\int_I f$ uobičajene su i oznake $\int_I f(x,y)\,dx\,dy$ i $\iint_I f(x,y)\,dx\,dy$, kao i termin ***dvostruki integral***.

Primjer 15.1 Nije svaka omeđena funkcija R-integrabilna. Naprimjer, za proizvoljan pravokutnik $I = [a,b] \times [c,d]$, funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x,y) = \begin{cases} 1\,, & x, y \text{ racionalni} \\ 0\,, & \text{inače} \end{cases}$$

nije R-integrabilna na I. Zaista, za svaku razdiobu ρ i svaki $i = 1,\ldots,k$; $j = 1,\ldots,l$, je $m_{ij} = 0$, $M_{ij} = 1$, pa je $s(f,\rho) = 0$ i $S(f,\rho) = \pi(I)$. Stoga je i $\underline{\int} f = 0 \ne \pi(I) = \overline{\int} f$.

Označimo s $R(I)$ skup svih R-integrabilnih funkcija na pravokutniku I. Nadalje označimo s $\mathring{I} = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle = I \setminus \partial I$ otvoreni pravokutnik. Osnovna 'algebarska' svojstva Riemannovog integrala dana su u sljedećem teoremu.

Teorem 15.3 (*i*) *Uz uobičajeno zbrajanje funkcija i množenje funkcije realnim brojem, je skup $R(I)$ svih R-integrabilnih funkcija na pravokutniku I vektorski prostor, a $\int_I\colon R(I) \to \mathbb{R}$ je monoton linearan funkcional.*

(*ii*) *Neka je* $I = I_1 \cup I_2$ *tako da je* $\mathring{I}_1 \cap \mathring{I}_2 = \emptyset$ *i* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *omeđena funkcija.* f *je R-integrabilna ako i samo ako su restrikcije* $f|_{I_1}$ *i* $f|_{I_2}$ *R-integrabilne na* I_1 *odnosno* I_2*, i u tom slučaju vrijedi*

$$\int_I f = \int_{I_1} f|_{I_1} + \int_{I_2} f|_{I_2}\ . \tag{6}$$

Dokaz: (*i*) Kao i ranije, za omeđenu funkciju $f\colon I \to \mathbb{R}$ i razdiobu ρ pravokutnika I označit ćemo

$$\begin{aligned} m_{ij}(f) &:= \inf f(I_{ij}) \\ M_{ij}(f) &:= \sup f(I_{ij})\ \ ,\ i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, l\ . \end{aligned}$$

(*a*) Neka su $f, g \in R(I)$. Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji razdioba $\rho \in \rho(I)$ takva da je

$$S(f,\rho) - \overline{\int} f < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad S(g,\rho) - \overline{\int} g < \frac{\varepsilon}{2} \tag{7}$$

$$\underline{\int} f - s(f,\rho) < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad \underline{\int} g - s(g,\rho) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{8}$$

Kako je $M_{ij}(f+g) \leq M_{ij}(f) + M_{ij}(g)$, to zbog (7) imamo

$$\overline{\int}(f+g) \leq S(f+g,\rho) \leq S(f,\rho) + S(g,\rho) < \overline{\int} f + \frac{\varepsilon}{2} + \overline{\int} g + \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Zbog integrabilnosti od f i g je $\overline{\int} f = \int_I f$, $\overline{\int} g = \int_I g$, pa je

$$\overline{\int}(f+g) < \int_I f + \int_I g + \varepsilon$$

za svaki $\varepsilon > 0$. Stoga je

$$\overline{\int}(f+g) \leq \int_I f + \int_I g\ . \tag{9}$$

Analogno, zbog $m_{ij}(f+g) \geq m_{ij}(f) + m_{ij}(g)$ i (8) dobivamo

$$\underline{\int}(f+g) \geq \int_I f + \int_I g\ \ . \tag{10}$$

Kako je donji Riemannov integral uvijek manji ili jednak od gornjeg, (5), iz (9) i (10) dobivamo

$$\int_I f + \int_I g \le \underline{\int}(f+g) \le \overline{\int}(f+g) \le \int_I f + \int_I g$$

pa je $\underline{\int}(f+g) = \overline{\int}(f+g) = \int_I (f+g)$, tj. $f+g \in R(I)$ i zbog (9) i (10) vrijedi

$$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g\ .$$

(b) Neka je $f \in R(I)$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Ako je $\lambda > 0$, onda je $m_{ij}(\lambda f) = \lambda m_{ij}(f)$ pa je

$$\begin{aligned}\underline{\int}\lambda f &= \sup\{s(\lambda f, \rho) : \rho \in \rho(I)\} = \\ &= \sup\{\lambda s(f, \rho) : \rho \in \rho(I)\} = \\ &= \lambda \sup\{s(f, \rho) : \rho \in \rho(I)\} = \lambda \underline{\int} f = \lambda \int_I f\end{aligned}$$

Analogno se dobiva da je $\overline{\int}\lambda f = \lambda \int_I f$, pa je $\lambda f \in R(I)$ i vrijedi

$$\int_I \lambda f = \lambda \int_I f\ . \tag{11}$$

Za $\lambda = 0$ je očito $\lambda f = 0 \in R(I)$ i vrijedi (11). Nadalje, kako je $m_{ij}(-f) = -M_{ij}(f)$, to za $\lambda = -1$ vrijedi

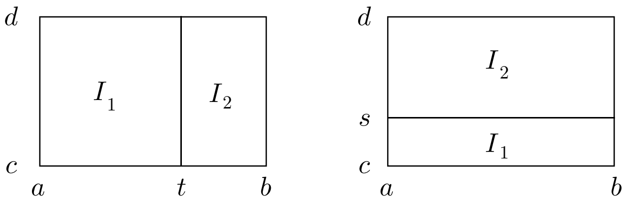
$$\begin{aligned}\underline{\int}(-f) &= \sup\{s(-f, \rho) : \rho \in \rho(I)\} = \\ &= \sup\{-S(f, \rho) : \rho \in \rho(I)\} = \\ &= -\inf\{S(f, \rho) : \rho \in \rho(I)\} = -\overline{\int} f = -\int_I f\ .\end{aligned}$$

Analogno se dobiva i $\overline{\int}(-f) = -\underline{\int} f = -\int_I f$, pa je $-f \in R(I)$ i vrijedi $\displaystyle\int_I (-f) = -\int_I f$.

Dakle, za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ je $\lambda f \in R(I)$ i vrijedi (11). Zbog (a) i (b) je stoga $R(I)$ vektorski prostor, a $\displaystyle\int_I$ linearan funkcional.

(c) Konačno, monotonost integrala $\displaystyle\int_I$ slijedi jednostavno iz činjenice da za $f \le g$ i svaku razdiobu ρ vrijedi $m_{ij}(f) \le m_{ij}(g)$.

(ii) Ako je $I = [a,b] \times [c,d] = I_1 \cup I_2$ tako da je $\mathring{I}_1 \cap \mathring{I}_2 = \emptyset$, onda



je ili $I_1 = [a,t] \times [c,d]$, $I_2 = [t,b] \times [c,d]$ za neki broj $t \in \langle a,b \rangle$, ili je $I_1 = [a,b] \times [c,s]$, $I_2 = [a,b] \times [s,d]$ za neki $s \in \langle c,d \rangle$. U oba slučaja možemo zaključivati na sljedeći način: za funkciju $f\colon I \to \mathbb{R}$ označimo s

$$f_1 := f|_{I_1} \ , \quad f_2 := f|_{I_2} \ .$$

Za svaki $\varepsilon > 0$ postoje razdiobe ρ, ρ_1, ρ_2 pravokutnika I, I_1 i I_2 takve da je

$$S(f_1,\rho_1) - \overline{\int} f_1 < \varepsilon \ , \ \ S(f_2,\rho_2) - \overline{\int} f_2 < \varepsilon \ , \ \ S(f,\rho) - \overline{\int} f < \varepsilon \ . \tag{12}$$

Neka je ρ' profinjenje razdiobe ρ koje sadrži obje razdiobe ρ_1 i ρ_2 i neka su ρ_1' i ρ_2' razdiobe koje ρ' inducira na I_1 i I_2. Tada ρ_1' i ρ_2' profinjuju razdiobe ρ_1 i ρ_2 pa i za ove razdiobe vrijede nejednakosti (12), tj. vrijedi

$$\begin{aligned} -\varepsilon < \overline{\int} f_1 - S(f_1,\rho_1') &\le \ 0 \\ -\varepsilon < \overline{\int} f_2 - S(f_2,\rho_2') &\le \ 0 \\ 0 \le \ S(f,\rho') - \overline{\int} f \ &< \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti, zbog

$$S(f,\rho') = S(f_1,\rho_1') + S(f_2,\rho_2')$$

dobivamo

$$-2\varepsilon < \overline{\int} f_1 + \overline{\int} f_2 - \overline{\int} f < \varepsilon \ .$$

Kako to vrijedi za svaki $\varepsilon > 0$, dobivamo

$$\overline{\int} f = \overline{\int} f_1 + \overline{\int} f_2 \, . \tag{13}$$

Analogno se pokazuje da vrijedi

$$\underline{\int} f = \underline{\int} f_1 + \underline{\int} f_2 \, . \tag{14}$$

Neka je najprije $f \in R(I)$. Tada je $\underline{\int} f = \overline{\int} f$ pa iz (13) i (14) dobivamo

$$\overline{\int} f_1 + \overline{\int} f_2 = \underline{\int} f_1 + \underline{\int} f_2$$

odnosno

$$(\overline{\int} f_1 - \underline{\int} f_1) + (\overline{\int} f_2 - \underline{\int} f_2) = 0 \, .$$

Kako su oba sumanda na lijevoj strani nenegativna, to su oba jednaka nuli, tj. f_1 i f_2 su R-integrabilne funkcije i iz (13) dobivamo (6). Obratno, ako su f_1 i f_2 R-integrabilne, onda je $\overline{\int} f_i = \underline{\int} f_i$, $i = 1, 2$, pa iz (13) i (14) slijedi

$$\overline{\int} f = \int_{I_1} f_1 + \int_{I_2} f_2 = \underline{\int} f \, ,$$

tj. $f \in R(I)$ i vrijedi (6). ∎

Napomena 15.1 Ako su $I, J \in \mathbb{R}^2$ pravokutnici takvi da je $I \subseteq J$, a $f\colon J \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija koja je R-integrabilna na J, onda prema tvrdnji (ii) prethodnog teorema, zaključujemo da je restrikcija $f|_I\colon I \to \mathbb{R}$ R-integrabilna na I. U takvoj se situaciji obično kaže da je f R-integrabilna na I, a umjesto $\int_I f|_I$ piše se jednostavno $\int_I f$.

Kao još jednu posljedicu tvrdnje (ii) Teorema 15.3, dobivamo

Korolar 15.4 *Neka je $f\colon I \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija, a ρ neka razdioba pravokutnika I, sa pripadnim pravokutnicima I_{ij}. f je R-integrabilna na I ako i samo ako su restrikcije $f|_{I_{ij}}$ integrabilne na I_{ij}, za sve $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, l$, i u tom slučaju vrijedi* $\displaystyle\int_I f = \sum_{i,j} \int_{I_{ij}} f$. ∎

Jedna jednostavna karakterizacija R-integrabilnosti je dana sljedećim teoremom:

Teorem 15.5 *Omeđena funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ je R-integrabilna ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji razdioba ρ pravokutnika I takva da je*

$$S(f,\rho) - s(f,\rho) < \varepsilon\ . \tag{15}$$

Dokaz: Neka je f R-integrabilna, tj. $\underline{\int} f = \overline{\int} f$. Prema svojstvu supremuma, odnosno infimuma, za svaki $\varepsilon > 0$ postoje razdiobe ρ', ρ'' pravokutnika I takve da je

$$\underline{\int} f - s(f,\rho') < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$S(f,\rho'') - \overline{\int} f < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Neka je razdioba ρ neko zajedničko profinjenje za ρ' i ρ''. Tada zbog Leme 15.1 imamo

$$\begin{aligned} S(f,\rho) - s(f,\rho) &\le S(f,\rho'') - s(f,\rho') \\ &= \Big(S(f,\rho'') - \overline{\int} f\Big) + \Big(\underline{\int} f - s(f,\rho')\Big) < \varepsilon\ . \end{aligned}$$

Obratno, neka za svaki $\varepsilon > 0$ postoji razdioba ρ takva da vrijedi (15). Tada je

$$0 \le \overline{\int} f - \underline{\int} f \le S(f,\rho) - s(f,\rho) < \varepsilon$$

za svaki $\varepsilon > 0$, pa je $\overline{\int} f - \underline{\int} f = 0$, tj. f je R-integrabilna. ∎

Sada možemo pokazati da osim konstantnih, ima i drugih, interesantnijih, funkcija koje su R-integrabilne.

Teorem 15.6 *Svaka neprekidna funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ je R-integrabilna.*

Dokaz: Kako je I kompaktan, to je neprekidna funkcija f ograničena (Korolar 5.9). Nadalje, prema Teoremu 5.13, f je uniformno neprekidna, pa za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $|f(x,y) - f(x',y')| < \frac{\varepsilon}{\pi(I)}$, čim je

$\|(x,y)-(x',y')\| < \delta$. Neka je ρ razdioba pravokutnika I s očicom $\delta(\rho) < \delta$. Tada za sve $(x,y),(x',y') \in I_{ij}$ vrijedi $|f(x,y)-f(x',y')| < \frac{\varepsilon}{\pi(I)}$, pa je specijalno i $M_{ij} - m_{ij} < \frac{\varepsilon}{\pi(I)}$ (jer, prema Korolaru 5.9, f poprima na I_{ij} minimum i maksimum). Stoga je

$$S(f,\rho) - s(f,\rho) = \sum_{i,j} (M_{ij} - m_{ij})\, \pi(I_{ij}) < \frac{\varepsilon}{\pi(I)} \sum_{i,j} \pi(I_{ij}) = \varepsilon$$

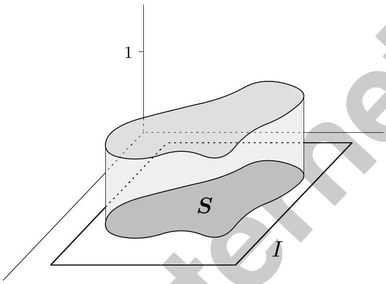
pa je, prema Teoremu 15.5, f R-integrabilna na I. ■

U § 17 ovaj ćemo rezultat znatno poboljšati.

§ 16 Površina skupa i skupovi mjere nula

Površina pravokutnika je produkt duljina njegovih stranica. Međutim za općenit skup u $\mathbb{R}^2$ pojam površine je mnogo složeniji. Jedna od mogućih definicija je sljedeća:

Definicija 16.1 Za omeđen skup $S \subseteq \mathbb{R}^2$ kažemo da ***ima površinu*** ili da je ***izmjeriv u Jordanovom***[1] ***smislu***, odnosno ***J-izmjeriv***, ako postoji pravokutnik I koji sadrži skup S, $I \supseteq S$, takav da je karakteristična funkcija $\chi_S : I \to \mathbb{R}$ skupa S, R-integrabilna. U tom slučaju broj $\int_I \chi_S$ zovemo ***površina skupa*** S i označavamo s $\pi(S)$.



Koristeći Teorem 15.3(ii), lako se vidi da postojanje i iznos površine skupa S ne ovisi o odabranom pravokutniku $I \supseteq S$, tj. definicija površine je dobra. Odavde odmah slijedi da, ako skupovi S_1 i S_2 imaju površinu, i $S_1 \subseteq S_2$, onda je $\pi(S_1) \leq \pi(S_2)$, tj. površina je monotona funkcija. Također, svaki pravokutnik $I = [a,b] \times [c,d]$ ima površinu u smislu ove definicije i ona je jednaka $\pi(I) = (b-a)(d-c)$.

[1] Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922), francuski matematičar

Primjer 16.1 Nema svaki omeđen skup u $\mathbb{R}^2$ površinu. Naprimjer, skup $\mathbf{Q} := (\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}) \bigcap ([0,1]\times[0,1])$ 'racionalnih točaka' u jediničnom kvadratu $I = [0,1]\times[0,1]$, nema površinu, jer njegova karakteristična funkcija $\chi_{\mathbf{Q}}$ nije R-integrabilna na I (Primjer 15.1).

Od posebnog interesa će nam biti skupovi koji imaju malenu površinu. Točnije, kažemo da omeđen skup A ***ima površinu nula*** ako A ima površinu i ta je površina jednaka nuli.

Teorem 16.1 (karakterizacija skupova površine nula) *Omeđen skup $A\subseteq\mathbb{R}^2$ ima površinu nula ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan pokrivač $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ skupa A pravokutnicima I_j, takav da je $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \pi(I_j) < \varepsilon$.*

Štoviše, ako je skup A površine nula sadržan u pravokutniku I, onda postoji particija ρ tog pravokutnika takva da je $\displaystyle\sum_{\substack{i,j\\ I_{ij}\cap A\neq\emptyset}} \pi(I_{ij}) < \varepsilon$.

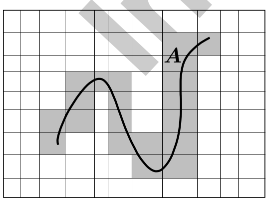
Dokaz: $\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $\varepsilon > 0$ i neka su $I_1, \dots, I_n$ pravokutnici takvi da je $A \subseteq \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} I_j$ i da je $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \pi(I_j) < \varepsilon$. Odaberimo pravokutnik I takav da je $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} I_j \subseteq I$.

Kako za karakteristične funkcije vrijedi $\chi_A \le \chi_{\bigcup_j I_j} \le \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \chi_{I_j}$, to je i

$$0 \le \underline{\int} \chi_A \le \overline{\int} \chi_A \le \overline{\int} \sum_{j=1}^{n} \chi_{I_j} = \int_I \sum_{j=1}^{n} \chi_{I_j} = \sum_{j=1}^{n} \int_I \chi_{I_j} = \sum_{j=1}^{n} \pi(I_j) < \varepsilon \,.$$

Budući to vrijedi za svaki $\varepsilon > 0$, zaključujemo da je funkcija χ_A integrabilna i da je $\pi(A) = \int_I \chi_A = 0$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Obratno, neka je A skup površine nula i I pravokutnik takav da je $A\subseteq I$.



I

Tada je karakteristična funkcija χ_A R-integrabilna na I i $\overline{\int}\chi_A = \int_I \chi_A = 0$. Stoga za svaki $\varepsilon > 0$, postoji razdioba ρ pravokutnika I takva da je $S(\chi_A, \rho) < \varepsilon$, tj.

$$\sum_{\substack{i,j\\ I_{ij}\cap A\neq\emptyset}} M_{ij}(\chi_A)\,\pi(I_{ij}) + \sum_{\substack{i,j\\ I_{ij}\cap A=\emptyset}} M_{ij}(\chi_A)\,\pi(I_{ij}) < \varepsilon \,. \quad (1)$$

Međutim, za one i, j za koje je $I_{ij} \cap A = \emptyset$ je $\chi_{_A}|_{I_{ij}} = 0$, tj. $M_{ij}(\chi_{_A}) = 0$, pa je druga suma u (1) jednaka nuli. S druge strane, ako je $I_{ij} \cap A \neq \emptyset$ onda je $M_{ij}(\chi_{_A}) = 1$, pa iz (1) dobivamo

$$\sum_{\substack{i,j \\ I_{ij} \cap A \neq \emptyset}} \pi(I_{ij}) < \varepsilon \ , \tag{2}$$

te je $\{I_{ij} : I_{ij} \cap A \neq \emptyset\}$ traženi konačni pokrivač za A. ■

Napomena 16.1 Može se postići da su svi I_j u prethodnom teoremu kvadrati. Zaista, za dani $\varepsilon > 0$ neka su $I_1, \ldots , I_n$ pravokutnici takvi da je $A \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j$ i $\sum\limits_{j=1}^{n} \pi(I_j) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Označimo s a_j, b_j stranice pravokutnika I_j. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a_j \leq 2b_j$ i $b_j \leq 2a_j$. U protivnom učinimo sljedeće: Pretpostavimo da je $2b_j < a_j$ za neki j, i neka je k najmanji prirodan broj takav da je $k \cdot 2b_j \geq a_j$. Tada je $k \geq 2$. Podijelimo stranicu a_j na k jednakih dijelova. Time smo podijelili pravokutnik I_j na k manjih pravokutnika sa stranicama b_j i $a'_j := \dfrac{a_j}{k}$. Tada je $2b_j \geq a'_j$, ali je i $2a'_j \geq b_j$.

Zaista, pretpostavimo da je $2a'_j < b_j$, tj. $2\dfrac{a_j}{k} < b_j$. Tada je $\dfrac{k}{4} \cdot 2b_j > a_j$. Neka je $l \in \mathbb{N}$ takav da je $\dfrac{k}{4} \leq l < \dfrac{k}{4} + 1$. Tada je i $l \cdot 2b_j > a_j$, no zbog $k \geq 2$ je $l < \dfrac{k}{4} + 1 < \dfrac{k}{4} + 1 + \dfrac{3k-4}{4} = k$, što je u suprotnosti sa minimalnošću pri izboru broja k.

Zamijenimo sada I_j sa ovako dobivenim manjim pravokutnicima, koji imaju traženi odnos stranica. Konačno, zamijenimo svaki pravokutnik kvadratom nad duljom stranicom.

Iz Teorema 16.1 slijedi

Korolar 16.2

(*i*) *Unija konačno mnogo skupova površine nula je opet skup površine nula.*

(*ii*) *Podskup skupa površine nula i sâm ima površinu nula.* ■

Primjeri 16.2 (*i*) Svaki konačan skup, tj. skup koji se sastoji od konačno mnogo točaka, skup je površine nula.

(*ii*) Za svaku točku $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ i broj $h > 0$ su 'horizontalni' segment $\{(x',y) : x \leq x' \leq x+h\}$, i 'vertikalni' segment $\{(x,y') : y \leq y' \leq y+h\}$, skupovi površine nula. Zaista, za zadani $\varepsilon > 0$, takav se segment može pokriti jednim pravokutnikom duljine h i širine $\frac{\varepsilon}{2h}$, dakle površine $\frac{\varepsilon}{2}$.

(*iii*) Rub pravokutnika $I = [a,b] \times [c,d]$ je skup površine nula. To slijedi iz (*i*) i Korolara 16.2(*i*).

Napomena 16.2 Neka je $I = [a,b] \times [c,d]$ pravokutnik, ∂I njegov rub, a $\mathring{I} = I \setminus \partial I = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$ otvoren pravokutnik. Prema Primjeru 16.2(*ii*) je rub ∂I skup površine nula, pa je $\chi_{\partial I}$ R-integrabilna funkcija na I i njen je integral jednak nuli. Kako je

$$\chi_{\mathring{I}} = \chi_I - \chi_{\partial I}$$

to, prema Teoremu 15.3, zaključujemo da i otvoren pravokutnik ima površinu i ona je jednaka

$$\begin{aligned}\pi(\mathring{I}) &= \int_I \chi_{\mathring{I}} = \int_I \chi_I - \int_I \chi_{\partial I} = \pi(I) = \\ &= (b-a)(d-c)\,.\end{aligned}$$

Stoga su, koristeći Teorem 16.1, skupovi površine nula karakterizirani i svojstvom da se mogu pokriti s konačno mnogo otvorenih pravokutnika proizvoljno male ukupne površine, tj. vrijedi karakterizacija kao u Teoremu 16.1, samo s otvorenim pravokutnicima umjesto zatvorenim.

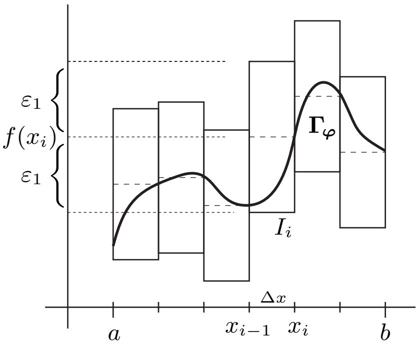
Lema 16.3 *Neka je* $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna realna funkcija. Tada je graf* $\Gamma_\varphi = \{(x,\varphi(x)) : x \in [a,b]\} \subseteq \mathbb{R}^2$ *skup površine nula.*

Dokaz: Kako je skup $[a,b]$ kompaktan, to je φ omeđena funkcija, pa je i Γ_φ omeđen skup. Osim toga je φ i uniformno neprekidna funkcija, pa za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ takav da za $x, x' \in [a,b]$ za koje je $|x - x'| < \delta$, vrijedi $|\varphi(x) - \varphi(x')| < \varepsilon_1$, gdje je $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Odaberimo ekvidistantnu razdiobu

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$$

tako da je

$$x_i - x_{i-1} =: \Delta x = \frac{b-a}{k} < \delta\,, \quad i = 1, \ldots, k\,.$$



Tada je $\varphi([x_{i-1},x_i])\subseteq\langle\varphi(x_i)-\varepsilon_1,\varphi(x_i)+\varepsilon_1\rangle$, $i=1,\dots,k$, pa je dio grafa funkcije φ koji se nalazi nad segmentom $[x_{i-1},x_i]$ sadržan u pravokutniku

$$I_i := [x_{i-1},x_i]\times[\varphi(x_i)-\varepsilon_1,\varphi(x_i)+\varepsilon_1].$$

Stoga je $\Gamma_\varphi\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$, i

$$\sum_{i=1}^{k}\pi(I_i)=k\cdot\Delta x\cdot 2\varepsilon_1=(b-a)\cdot 2\cdot\frac{\varepsilon}{2(b-a)}=\varepsilon,$$

pa je, prema Teoremu 16.1, Γ_φ skup površine nula. ■

Primjeri 16.3 Koristeći Lemu 16.3 i Korolar 16.2, vidimo da su, naprimjer, kružnica, polukružnica, elipsa, rub trokuta, rub paralelograma, rub polukruga, proizvoljan kružni luk, 'kosi' segment, poligonalna linija, ... , skupovi površine nula.

Pojam površine ne zadovoljava sve zahtjeve koje bismo željeli. Zato se uvodi pojam mjere. Mi ćemo, međutim, obraditi samo jedan specijalan slučaj—skupove mjere nula.

Definicija 16.2 Za skup $A\subseteq\mathbb{R}^2$ kažemo da je ***skup*** (Lebesgueove) ***mjere nula*** ukoliko za svaki $\varepsilon>0$ postoji niz pravokutnika I_j, $j\in\mathbb{N}$, takav da je $A\subseteq\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} I_j$ i $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\pi(I_j)<\varepsilon$.

Zbog napomene na prethodnoj stranici, umjesto zatvorenih pravokutnika možemo uzeti i otvorene pravokutnike.

Očito je svaki konačan (dakle, i prazan) skup mjere nula. Ali i svaki prebrojiv skup ima mjeru nula. Vrijedi, štoviše, sljedeći teorem:

Teorem 16.4

(*i*) *Ako je $A\subseteq\mathbb{R}^2$ skup površine nula, onda je A i skup mjere nula.*

(*ii*) *Ako je $A\subseteq\mathbb{R}^2$ skup mjere nula i $B\subseteq A$, onda je i B skup mjere nula.*

(*iii*) *Prebrojiva unija skupova mjere nula je opet skup mjere nula.*

Familija skupova koja ima svojstva (*ii*) i (*iii*) naziva se ***σ-ideal skupova***.

Dokaz: Tvrdnje (*i*) i (*ii*) su očite. Dokažimo (*iii*). Neka je $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, gdje su svi A_i skupovi mjere nula. Tada za svaki $i \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon > 0$ postoje pravokutnici I_{ij}, $j \in \mathbb{N}$, takvi da je $A_i \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_{ij}$ i $\sum_{j=1}^{\infty} \pi(I_{ij}) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Tada je $\{I_{ij} : i, j \in \mathbb{N}\}$ prebrojiva familija pravokutnika takva da je $A \subseteq \bigcup_{i,j\in\mathbb{N}} I_{ij}$ i

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \pi(I_{ij}) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

pa je A skup mjere nula. ∎

U dokazu prethodnog teorema koristili smo činjenicu da se radi o redovima s pozitivnim članovima, za koje je konvergencija isto što i apsolutna konvergencija, pa se članovi mogu proizvoljno permutirati i grupirati (vidi [6]).

Iz rečenog je vidljivo da je, naprimjer, skup $\mathbf{Q}$ racionalnih točaka iz Primjera 16.1, skup mjere nula, iako $\mathbf{Q}$ nije skup površine nula. Međutim, za kompaktne skupove ti se pojmovi podudaraju.

Teorem 16.5 *Kompaktan skup je skup mjere nula ako i samo ako je on skup površine nula.*

Dokaz: Neka je A kompaktan skup koji ima mjeru nula. Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji niz otvorenih pravokutnika $\mathring{I}_j$, $j \in \mathbb{N}$, takvih da je $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathring{I}_j$ i $\sum_{j=1}^{\infty} \pi(\mathring{I}_j) < \varepsilon$. Zbog kompaktnosti, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je već $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \mathring{I}_j$, pa je A skup površine nula. ∎

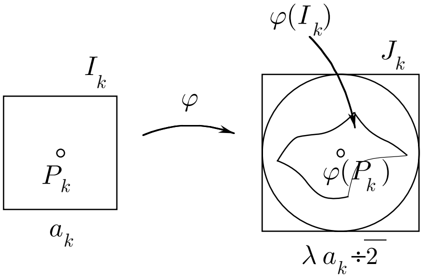
Dokažimo na kraju i

Teorem 16.6 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ preslikavanje klase C^1. Ako je $A \subseteq \Omega$ skup mjere nula, onda je i $\varphi(A)$ skup mjere nula.*

Dokaz: Dokažimo teorem najprije u specijalnom slučaju, tj. uz dodatnu pretpostavku, da postoji kompaktan skup $K \subseteq \Omega$ takav da je $A \subseteq K$.

Neka je $\delta > 0$ takav da je $\overline{K}(P,\delta) \subseteq \Omega$ za sve $P \in K$ (takav δ postoji jer je $K \subseteq \Omega$ kompaktan, pa je $d(K, \mathbb{R}^2 \setminus \Omega) > 0$, vidi Korolar 5.10). Prema Korolaru 10.6, postoji $\lambda > 0$ takav da za sve $P \in K$, $P' \in K(P,\delta)$ vrijedi

$$\|\varphi(P) - \varphi(P')\| < \lambda \|P - P'\| \ . \tag{3}$$



Kako je A skup mjere nula, za zadani $\varepsilon > 0$ postoji niz kvadrata I_k, $k \in \mathbb{N}$ (zaključuje se kao u Napomeni 16.1) sa središtem u točkama $P_k \in A$ i stranicama a_k manjim od δ, $k \in \mathbb{N}$, takvi da je $A \subseteq \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} I_k$ i

$$\sum_{k=1}^{\infty} \pi(I_k) < \frac{\varepsilon}{2\lambda^2} \ . \tag{4}$$

Neka su J_k kvadrati sa središtima u točkama $\varphi(P_k)$ i stranicama $\lambda a_k \sqrt{2}$, $k \in \mathbb{N}$. Tada je $\pi(J_k) = 2\lambda^2 \pi(I_k)$ i zbog (3) je

$$\varphi(I_k) \subseteq K(\varphi(P_k), \frac{\lambda a_k}{\sqrt{2}}) \subseteq J_k \ .$$

Stoga je

$$\varphi(A) \subseteq \varphi(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \varphi(I_k) \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} J_k$$

a zbog (4) je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \pi(J_k) = 2\lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \pi(I_k) < \varepsilon \ ,$$

pa je $\varphi(A)$ skup površine nula.

U općem slučaju postupamo ovako: Prema Teoremu 5.5 postoji rastući niz kompaktnih skupova $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots K_i \subseteq K_{i+1} \subseteq \ldots \subseteq \Omega$ takvih da je $\Omega = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} K_i$. Za svaki $i \in \mathbb{N}$ je $A \cap K_i \subseteq K_i$ skup mjere nula, pa je po dokazanom specijalnom slučaju, i $\varphi(A \cap K_i)$ skup mjere nula. Kako je prebrojiva unija skupova mjere nula opet skup mjere nula, zaključujemo da je i

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap \Omega) = \varphi\big(A \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i\big) = \varphi\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A \cap K_i\big) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \varphi\big(A \cap K_i\big)$$

skup mjere nula. ■

§ 17 Karakterizacija R-integrabilnosti

U Teoremu 15.6 pokazali smo da je svaka neprekidna realna funkcija na pravokutniku, $f\colon I = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, R-integrabilna. Koristeći Teorem 15.3(ii), lako se vidi da ako je $I = I_1 \cup I_2$ kao u tom teoremu, a $f\colon I \to \mathbb{R}$ funkcija koja je neprekidna na I_1 i na I_2, onda je ona R-integrabilna i na I, iako u točkama segmenta $I_1 \cap I_2$ može imati prekide. Međutim da bismo mogli na zadovoljavajući način govoriti i o Riemannovom integralu funkcija koje su definirane na široj klasi skupova nego što su pravokutnici, moramo najprije ispitati kakvi sve mogu biti skupovi prekida omeđene funkcije $f\colon I \to \mathbb{R}$, a da ona još uvijek bude R-integrabilna.

U tu svrhu najprije ćemo karakterizirati neprekidnost realne funkcije pomoću pojma oscilacije.

Definicija 17.1 Neka je (X,d) metrički prostor, a $f\colon X \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija. Za točku $P_0 \in X$ i broj $\delta > 0$ definiramo brojeve

$$\begin{aligned} M(f,P_0,\delta) &:= \sup\{f(P) : d(P,P_0) < \delta\} \\ m(f,P_0,\delta) &:= \inf\{f(P) : d(P,P_0) < \delta\}. \end{aligned}$$

Oscilacija funkcije f u točki P_0 definira se kao broj

$$o(f,P_0) := \lim_{\delta\to 0}\big(M(f,P_0,\delta) - m(f,P_0,\delta)\big)\ .$$

Ovaj limes postoji jer je uvijek $M(f,P_0,\delta) - m(f,P_0,\delta) \geq 0$, i za $\delta' < \delta$ je $M(f,P_0,\delta') - m(f,P_0,\delta') \leq M(f,P_0,\delta) - m(f,P_0,\delta)$, pa se lako vidi da je $\lim\limits_{\delta\to 0}(M(f,P_0,\delta) - m(f,P_0,\delta)) = \inf\{M(f,P_0,\delta) - m(f,P_0,\delta) : \delta > 0\}$.

Teorem 17.1 *Ograničena funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$ je neprekidna u točki P_0 ako i samo ako je $o(f,P_0) = 0$.*

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je f neprekidna u P_0. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $P \in K(P_0,\delta)$ vrijedi $|f(P) - f(P_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, pa je $M(f,P_0,\delta) - m(f,P_0,\delta) \leq \varepsilon$. Kako to vrijedi za svaki $\varepsilon > 0$, zaključujemo da je $o(f,P) = \inf\limits_{\delta>0}\big(M(f,P_0,\delta) - m(f,P_0,\delta)\big) = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Obratno, neka je $o(f,P_0) = 0$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_0 > 0$ takav da za sve $0 < \delta \leq \delta_0$ vrijedi $M(f,P_0,\delta) - m(f,P_0,\delta) < \varepsilon$, pa je pogotovo

$|f(P)-f(P')| < \varepsilon$ za sve $P, P' \in K(P_0, \delta)$. Specijalno je tada $|f(P)-f(P_0)| < \varepsilon$ za sve $P \in K(P_0, \delta)$, pa je f neprekidna u P_0. ■

Dokažimo još jednu činjenicu koja će nam trebati.

Teorem 17.2 *Neka je $f\colon X \to \mathbb{R}$ ograničena realna funkcija na metričkom prostoru X. Tada je za svaki $\varepsilon > 0$ skup $D_\varepsilon := \{P \in X : o(f,P) \geq \varepsilon\}$ zatvoren.*

Dokaz: Dokažimo da je skup $X \setminus D_\varepsilon$ otvoren. Neka je $P_0 \in X \setminus D_\varepsilon$. Tada je $o(f, P_0) < \varepsilon$ pa je i $M(f, P_0, \delta) - m(f, P_0, \delta) < \varepsilon$ za dovoljno malen $\delta > 0$. Neka je $P \in K(P_0, \delta)$ i neka je $\delta' > 0$ takav da je $K(P, \delta') \subseteq K(P_0, \delta)$. Tada je

$$\begin{aligned} M(f, P, \delta') &\leq M(f, P_0, \delta) \\ m(f, P, \delta') &\geq m(f, P_0, \delta) \end{aligned}$$

pa je i $M(f, P, \delta') - m(f, P, \delta') < \varepsilon$. Stoga je i $o(f, P) = \inf\{M(f, P, \delta') - m(f, P, \delta') : \delta' > 0\} < \varepsilon$, tj. $P \in X \setminus D_\varepsilon$. Dakle, $K(P_0, \delta) \subseteq X \setminus D_\varepsilon$, tj. $X \setminus D_\varepsilon$ je otvoren skup. ■

Vratimo se sada pitanjima integrabilnosti i dokažimo najprije lemu koja s Teoremom 17.1 daje i alternativni dokaz R-integrabilnosti neprekidne funkcije (Teorem 15.6).

Lema 17.3 *Neka je $f\colon I \to \mathbb{R}$ ograničena realna funkcija na pravokutniku $I = [a,b] \times [c,d]$ i neka je $\eta > 0$ takav da je $o(f, P) < \eta$ za sve $P = (x, y) \in I$.*[1] *Tada postoji particija ρ pravokutnika I takva da je $S(f, \rho) - s(f, \rho) < \eta\pi(I)$.*

Dokaz: Kako je $o(f, P) < \eta$, to za svaki $P \in I$ postoji $\delta_P > 0$ takav da je

$$M(f, P, \delta_P) - m(f, P, \delta_P) < \eta\ .$$

Neka je ρ particija pravokutnika I čija je očica $\delta(\rho)$ manja od Lebesgueovog broja pokrivača $\{K(P, \delta_P) : P \in I\}$. Tada za svaki pravokutnik I_{ij} razdiobe ρ postoji $P \in I$ takav da je $I_{ij} \subseteq K(P, \delta_P)$ pa je $M_{ij} - m_{ij} < \eta$. Stoga je

$$S(f, \rho) - s(f, \rho) = \sum_{i,j} (M_{ij} - m_{ij})\, \pi(I_{ij}) < \eta\pi(I)\ . \qquad ■$$

Sljedeći ključni teorem daje nužne i dovoljne uvjete za R-integrabilnost omeđene funkcije na pravokutniku.

[1] Takav η postoji jer je $o(f, P) \leq 2M$, za svaki $P \in I$, gdje je $M := \sup_{P \in I} |f(P)|$.

Teorem 17.4 (Lebesgueova karakterizacija R-integrabilnosti) *Neka je $f\colon I \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija na pravokutniku I i neka je $D \subseteq I$ skup točaka u kojima f nije neprekidna. f je R-integrabilna ako i samo ako je D skup mjere nula.*

Dokaz: $\boxed{\Leftarrow}$ Neka je D skup mjere nula i neka je $\varepsilon > 0$. Označimo

$$D_\varepsilon := \left\{P \in I : o(f,P) \geq \frac{\varepsilon}{2\pi(I)}\right\} .$$

Prema Teoremu 17.1 je $D_\varepsilon \subseteq D$ pa je, zbog Teorema 16.4(ii), i D_ε skup mjere nula. Prema Teoremu 17.2, skup D_ε je zatvoren, te je, zbog svoje omeđenosti, i kompaktan. Stoga je, prema Teoremu 16.5, D_ε skup povšine nula. Prema Teoremu 16.1 postoji dakle particija ρ pravokutnika I takva da je

$$\sum_{\substack{i,j \\ I_{ij}\cap D_\varepsilon \neq \emptyset}} \pi(I_{ij}) < \frac{\varepsilon}{4M} \,, \tag{1}$$

gdje je $M := \sup\{|f(P)| : P \in I\}$.

Označimo sa $S_1 := \bigcup\{I_{ij} : I_{ij}\cap D_\varepsilon \neq \emptyset\}$ i $S_2 := \bigcup\{I_{ij} : I_{ij}\cap D_\varepsilon = \emptyset\}$. Kako je za sve i,j

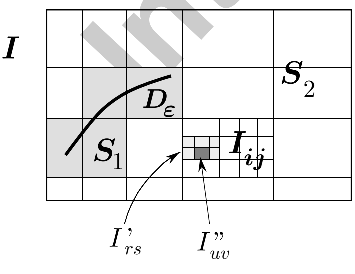
$$M_{ij} - m_{ij} \leq 2M \tag{2}$$

to je, zbog (1),

$$\sum_{I_{ij}\subseteq S_1} (M_{ij} - m_{ij})\,\pi(I_{ij}) \leq 2M \sum_{I_{ij}\subseteq S_1} \pi(I_{ij}) < \frac{\varepsilon}{2} \,. \tag{3}$$

Neka je $I_{ij} \subseteq S_2$. Tada je $o(f,P) < \frac{\varepsilon}{2\pi(I)}$ za sve $P \in I_{ij}$, pa, prema Lemi 17.3, postoji particija ρ'_{ij} pravokutnika I_{ij} takva da je

$$\sum_{\substack{r,s \\ I'_{rs}\subseteq I_{ij}}} (M'_{rs} - m'_{rs})\,\pi(I'_{rs}) < \frac{\varepsilon}{2\pi(I)}\,\pi(I_{ij}) \,. \tag{4}$$



Pravokutnika $I_{ij} \subseteq S_2$ ima samo konačno mnogo, pa postoji particija ρ'' čitavog pravokutnika I takva da profinjuje razdiobu ρ i da inducirane razdiobe pravokutnika I_{ij} profinjuju razdiobe ρ'_{ij}. Kako za $I''_{uv} \subseteq I'_{rs}$ vrijedi $M''_{uv} - m''_{uv} \leq M'_{rs} - m'_{rs}$ i $\displaystyle\sum_{I''_{uv}\subseteq I'_{rs}} \pi(I''_{uv}) = \pi(I'_{rs})$, zbog (4) dobivamo

$$\begin{aligned}\sum_{I''_{uv}\subseteq S_2}(M''_{uv}-m''_{uv})\,\pi(I''_{uv}) &= \sum_{I_{ij}\subseteq S_2}\sum_{I'_{rs}\subseteq I_{ij}}\sum_{I''_{uv}\subseteq I'_{rs}}(M''_{uv}-m''_{uv})\,\pi(I''_{uv})\\ &\le \sum_{I_{ij}\subseteq S_2}\sum_{I'_{rs}\subseteq I_{ij}}(M'_{rs}-m'_{rs})\,\pi(I'_{rs})\\ &\overset{(4)}{<} \sum_{I_{ij}\subseteq S_2}\frac{\varepsilon}{2\pi(I)}\,\pi(I_{ij})\le\frac{\varepsilon}{2}\,. \qquad (5)\end{aligned}$$

Slično, jer razdioba ρ'' profinjuje razdiobu ρ, iz (3) dobivamo

$$\begin{aligned}\sum_{I''_{uv}\subseteq S_1}(M''_{uv}-m''_{uv})\,\pi(I''_{uv}) &= \sum_{I_{ij}\subseteq S_1}\sum_{I''_{uv}\subseteq I_{ij}}(M''_{uv}-m''_{uv})\,\pi(I''_{uv})\\ &\le \sum_{I_{ij}\subseteq S_1}(M_{ij}-m_{ij})\,\pi(I_{ij})\overset{(3)}{<}\frac{\varepsilon}{2}\,. \qquad (6)\end{aligned}$$

Iz (5) i (6) za Darbouxove sume dobivamo

$$S(f,\rho'')-s(f,\rho'')<\varepsilon$$

pa je f R-integrabilna na I.

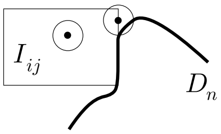
$\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $f\colon I\to\mathbb{R}$ R-integrabilna. Za $n\in\mathbb{N}$ označimo

$$D_n := \{P\in I : o(f,P)\ge \tfrac{1}{n}\}\,.$$

Tada je $D=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$, pa je, zbog Teorema 16.4(iii), dovoljno pokazati da su D_n skupovi mjere nula. Pokažimo štoviše da su D_n skupovi površine nula.

Neka je $\varepsilon>0$ i $n\in\mathbb{N}$. Kako je f R-integrabilna, postoji razdioba ρ pravokutnika I takva da je

$$S(f,\rho)-s(f,\rho)<\frac{\varepsilon}{2n}\,. \qquad (7)$$



Za indekse i,j za koje je $M_{ij}-m_{ij}<\frac{1}{n}$ je $o(f,P)<\frac{1}{n}$ za sve $P\in\mathring{I}_{ij}$, pa je $\mathring{I}_{ij}\cap D_n=\emptyset$. Stoga, za one indekse i,j za koje je $\mathring{I}_{ij}\cap D_n\ne\emptyset$ vrijedi $M_{ij}-m_{ij}\ge\frac{1}{n}$, pa je

$$\begin{aligned}\sum_{\mathring{I}_{ij}\cap D_n\neq\emptyset}\pi(I_{ij}) &\le \sum_{\mathring{I}_{ij}\cap D_n\neq\emptyset} n(M_{ij}-m_{ij})\,\pi(I_{ij})\\ &\le n\sum_{\text{svi } i,j}(M_{ij}-m_{ij})\,\pi(I_{ij})\\ &= n(S(f,\rho)-s(f,\rho)) \overset{(7)}{<} \frac{\varepsilon}{2}\,,\end{aligned}$$

što pokazuje da se skup $D'_n := D_n \cap \bigcup_{i,j}\mathring{I}_{ij}$ može pokriti s konačno mnogo pravokutnika ukupne površine manje od $\frac{\varepsilon}{2}$.

Skup $D''_n := D_n \setminus D'_n$ sadržan je u uniji rubova pravokutnika I_{ij} (i to samo onih koji sijeku D_n), a taj je skup površine nula, pa se i on može pokriti s konačno mnogo nekih pravokutnika (ne nužno pravokutnika razdiobe ρ) kojima je ukupna površina manja od $\frac{\varepsilon}{2}$. Stoga se i skup $D_n = D'_n \cup D''_n$ može pokriti s konačno mnogo pravokutnika ukupne površine manje od ε, pa je D_n skup površine nula. ■

Za neko svojstvo koje vrijedi svuda osim na nekom skupu mjere nula, kaže se da vrijedi ***skoro svuda*** (ili ***skoro uvijek***, kako je uobičajeno u vjerojatnosti). Lebesgueova karakterizacija R-integrabilnosti, dakle, kaže da je omeđena funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ R-integrabilna ako i samo ako je skoro svuda neprekidna.

Kao neposrednu posljedicu Teorema 17.4, dobivamo sljedeću karakterizaciju skupova koji imaju površinu, tj. skupova koji su J-izmjerivi.

Korolar 17.5 (Karakterizacija J-izmjerivih skupova) *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ omeđen skup. Tada su sljedeća svojstva ekvivalentna:*

(*i*) *S je J-izmjeriv, tj. ima površinu*

(*ii*) *∂S je skup mjere nula*

(*iii*) *∂S je skup površine nula.*

Dokaz: Neka je $I \subseteq \mathbb{R}^2$ pravokutnik takav da je $S \subseteq \mathring{I}$. Skup točaka u kojima karakteristična funkcija $\chi_S\colon I \to \mathbb{R}$ skupa S nije neprekidna, upravo je skup ∂S, rub skupa S (vidi i Teorem 2.3). Prema Lebesgueovoj karakterizaciji R-integrabilnosti, χ_S je R-integrabilna ako i samo ako je ∂S skup mjere nula. Time je dokazana ekvivalencija svojstava (*i*) i (*ii*).

Nadalje, kako je skup S omeđen, to je i njegov zatvarač $\overline{S}$ omeđen skup, pa je $\partial S = \overline{S} \cap \overline{(\mathbb{R}^2 \setminus S)}$ omeđen i zatvoren skup, dakle kompaktan, pa ekvivalencija svojstava (ii) i (iii) slijedi iz Teorema 16.5. ■

Primjeri 17.1 Prema Korolaru 17.5 i Primjerima 16.3 vidimo da su, naprimjer, krug, polukrug, područje ravnine omeđeno elipsom, trokut, paralelogram, poligon, ... , i oni podskupovi ravnine koji se mogu rastaviti na konačno mnogo takvih skupova, J-izmjerivi skupovi. Štoviše, zbog svojstva monotonosti koje ima površina, svi navedeni skupovi imaju površinu veću od nule, jer je u svaki od tih skupova moguće smjestiti neki pravokutnik, za kojeg znamo da mu je površina pozitivna. To su ujedno i tipični primjeri skupova po kojima se u praksi integriraju neprekidne funkcije.

Korolar 17.6

(i) *Omeđen skup S je skup površine nula, ako i samo ako je njegov zatvarač $\overline{S}$ skup površine nula.*

(ii) *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ J-izmjeriv skup. S je skup površine nula, ako i samo ako je $\operatorname{Int} S = \emptyset$.*

Dokaz:

(i) $\boxed{\Rightarrow}$ Ako je S skup površine nula, onda je i njegov rub, kao rub J-izmjerivog skupa, skup površine nula. Stoga je i $\overline{S} = S \cup \partial S$ skup površine nula.

$\boxed{\Leftarrow}$ Obratno, ako je $\overline{S}$ skup površine nula, onda je i S, kao njegov podskup, skup površine nula,

(ii) $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $\pi(S) = 0$. Kada bi bilo $\operatorname{Int} S \neq \emptyset$, onda bi postojali točka $P \in S$ i broj $r > 0$ takvi da je $K(P, r) \subseteq \operatorname{Int} S \subseteq S$, što se protivi činjenici da je površina kruga $K(P, r)$ pozitivan broj.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ako je $\operatorname{Int} S = \emptyset$ onda je $S \subseteq \bar{S} = \operatorname{Int} S \cup \partial S = \partial S$. Kako je ∂S skup površine nula, jer je S J-izmjeriv, mora biti i S, kao njegov podskup, skup površine nula. ■

Napomena 17.1 (i) Analogon tvrdnje (i) prethodnog korolara za skupove mjere nula, ne vrijedi. Naprimjer, skup $\mathbf{Q}$ racionalnih točaka jediničnog kvadrata, mjere je nula, dok njegov zatvarač $\overline{\mathbf{Q}} = [0, 1] \times [0, 1]$ nije.

(ii) U tvrdnji (ii) prethodnog korolara, važna je pretpostavka da je skup S J-izmjeriv, tj. da ima površinu. Naime, ukoliko samo pretpostavimo da je

Int $S = \emptyset$, ne možemo zaključiti da skup S ima površinu, čak niti da je izmjeriv u Lebesgueovom smislu. U analognoj jednodimenzionalnoj situaciji, takav je, naprimjer, Vitalijev[1] neizmjeriv skup, (vidi [7, str. 3], skup A iz dokaza da na $\mathbb{R}$ postoje neizmjerivi skupovi).

§ 18 Riemannov integral na J-izmjerivim skupovima

Do sada smo promatrali integral funkcije definirane na pravokutniku. Sada želimo pojam integrabilnosti proširiti na omeđene funkcije $f\colon S \to \mathbb{R}$ definirane na proizvoljnom J-izmjerivom skupu $S \subseteq \mathbb{R}^2$. Ideja je sljedeća. Neka je pravokutnik $I = [a,b] \times [c,d]$ takav da je $S \subseteq I$. Promatrajmo funkciju $\tilde{f}\colon I \to \mathbb{R}$ definiranu s

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & , \text{ za } (x,y) \in S \\ 0 & , \text{ za } (x,y) \in I \setminus S \ . \end{cases}$$

Definicija 18.1 Za omeđenu funkciju f kažemo da je ***R-integrabilna*** na J-izmjerivom skupu S ukoliko je $\tilde{f}$ R-integrabilna na I, i u tom slučaju definiramo

$$\int_S f := \int_I \tilde{f} \quad .$$

Koristeći Teorem 15.3, lako se pokaže da definicija ne ovisi o izboru pravokutnika $I \supseteq S$. Specijalno, u slučaju pravokutnika, integrabilnost i integral u ovom smislu, podudaraju se s ranijom definicijom iz § 15.

Neposredno iz prethodne definicije i Teorema 17.4, dobivamo sljedeću ***Lebesgueovu karakterizaciju R-integrabilnosti na J-izmjerivom skupu***:

Teorem 18.1 *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ J-izmjeriv skup. Omeđena funkcija $f\colon S \to \mathbb{R}$ je R-integrabilna ako i samo ako je neprekidna osim eventualno na skupu mjere nula.*

Specijalno, svaka neprekidna omeđena realna funkcija na J-izmjerivom skupu je R-integrabilna.

[1] Giuseppe Vitali (1875–1932), talijanski matematičar

Dokaz: $\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $I \subseteq \mathbb{R}^2$ pravokutnik takav da je S sadržan u otvorenom pravokutniku $\mathring{I}$, i neka je $\tilde{f}\colon I \to \mathbb{R}$ proširenje od f nulom kao u prethodnoj definiciji. Neka su $D \subseteq S$ i $\tilde{D} \subseteq I$ skupovi točaka diskontinuiteta funkcija f odnosno $\tilde{f}$. Kako za svaki skup A vrijedi $\overline{A} = \operatorname{Int} A \cup \partial A$, to je $I = \overline{S} \cup (I \setminus \overline{S}) = \operatorname{Int} S \cup \partial S \cup (I \setminus \overline{S})$. Na $I \setminus \overline{S}$ je $\tilde{f} = 0$, pa je $\tilde{f}$ neprekidna na otvorenom skupu $I \setminus \overline{S}$, tj. $\tilde{D} \cap (I \setminus \overline{S}) = \emptyset$. Na otvorenom skupu $\operatorname{Int} S$ je $\tilde{f} = f$, pa je u točkama skupa $\operatorname{Int} S$ funkcija $\tilde{f}$ neprekidna ako i samo ako je f neprekidna, tj. $\tilde{D} \cap \operatorname{Int} S = D \cap \operatorname{Int} S$. Zaključujemo dakle da je $\tilde{D} \subseteq D \cup \partial S$.

Ako pretpostavimo da je f skoro svuda neprekidna, tj. da je D skup mjere nula, onda, jer je i ∂S skup mjere nula zbog J-izmjerivosti skupa S, zaključujemo da je i $\tilde{D}$ skup mjere nula. Stoga je funkcija $\tilde{f}$ R-integrabilna na I, pa je f R-integrabilna na S.

$\boxed{\Rightarrow}$ Obratno, kako je $\tilde{f}|_S = f$, to je $D \subseteq \tilde{D}$, pa ako je f R-integrabilna na S, tj. $\tilde{f}$ R-integrabilna na I, onda je po Lebesgueovoj karakterizaciji R-integrabilnosti na I, $\tilde{D}$ skup mjere nula, pa je i D skup mjere nula. ■

Specijalno, dakle, sve neprekidne realne funkcije definirane na krugu, polukrugu, trokutu, poligonu, dijelu ravnine omeđenom elipsom ili dijelovima drugih 'lijepih' krivulja, su R-integrabilne.

Primijetimo da definicija R-integrabilnosti ima smisla i za omeđen skup S koji nije nužno J-izmjeriv. Međutim, u tom slučaju funkcija koja je neprekidna na S ne mora nužno biti i R-integrabilna, što je najčešće neprihvatljivo. Zato smo se u definiciji R-integrabilnosti na prethodnoj stranici, ograničili na J-izmjerive skupove.

Lako se dokazuje

Teorem 18.2 *Neka su $T \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^2$ J-izmjerivi skupovi a $f\colon S \to \mathbb{R}$ R-integrabilna funkcija. Onda je f R-integrabilna i na T, (tj. restrikcija $f|_T$ je R-integrabilna) i $\int_T f = \int_S f\chi_T$, uz oznaku $\int_T f := \int_T f|_T$.*

Dokaz: Prema Lebesgueovom kriteriju, Teorem 18.1, skup $D(f)$ diskontinuiteta funkcije f je skup mjere nula. Kako je restrikcija neprekidne funkcije na proizvoljan podskup — neprekidna, to je $D(f|_T) \subseteq D(f)$, pa je i skup diskontinuiteta restrikcije $f|_T$ skup mjere nula. Stoga je, prema drugom smjeru Lebesgueovog kriterija, $f|_T$ R-integrabilna na T i za proizvoljan pravokutnik $I \supseteq S \supseteq T$ vrijedi

$$\int_T f := \int_T f|_T = \int_I \widetilde{f|_T} = \int_I \widetilde{f\chi_T} = \int_S f\chi_T \,. \qquad ■$$

Dakle, na $\int_T f$ možemo uvijek gledati kao na $\int_S f\chi_T$, gdje je S proizvoljan J-izmjeriv skup koji sadrži skup T (naprimjer dovoljno veliki pravokutnik), a $\chi_T : S \to \mathbb{R}$ je pripadna karakteristična funkcija, i to bez obzira da li je funkcija f definirana samo na skupu T ili i na nekom većem skupu.

Napomena 18.1 Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ J-izmjeriv skup. Praktično je funkciju f proširiti nulom na čitavu ravninu $\mathbb{R}^2$, tj. definirati $\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in S \\ 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus S \end{cases}$. Time je $\tilde{f}$ definirana i na svakom nadskupu skupa S, pa ako je npr. $Z \subseteq \mathbb{R}^2$ neki J-izmjeriv nadskup skupa S, možemo promatrati integral $\int_Z \tilde{f}$, i to ćemo katkada zvati integralom funkcije f (koja je zapravo definirana samo na skupu S) po, većem, skupu Z.

Koristan je i sljedeći dogovor i pripadni zapis. Ako s $\chi_S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ označimo karakterističnu funkciju skupa S obzirom na $\mathbb{R}^2$, onda je $\tilde{f} = \tilde{f}\chi_S$. To su, dakle, dva zapisa iste funkcije, ali je oznaka $\tilde{f}\chi_S$ bolja, jer sadrži i podatak o skupu S, tj. već je iz sâme oznake vidljivo da ta funkcija iščezava izvan skupa S. To posebno dolazi do izražaja ako je funkcija f zadana nekim konkretnim izrazom, koji može imati smisla i izvan skupa na kojem tu funkciju promatramo. Naprimjer, promatrajmo na jediničnom krugu $K := K(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$ funkciju $f : K \to \mathbb{R}$ definiranu izrazom $f(x,y) := \sqrt{5 - x^2 - y^2}$. Tada je, naprimjer, uz sve dosadašnje oznake i dogovore, vrijednost funkcije $\tilde{f}$ u točki $(1,1)$ jednaka 0. No kako izraz $\sqrt{5 - x^2 - y^2}$, kojim je definirana funkcija f, ima smisla i u točki $(1,1)$, i njegova vrijednost u toj točki je $\sqrt{3}$, to lako dolazi do nesporazuma, a onda i do greške. S druge strane, bez obzira kako je funkcija f definirana, vrijednost funkcije $\tilde{f}\chi_K$ u $(1,1)$ je uvijek 0.

Napomena 18.2 Za funkciju $\tilde{f}\chi_S$ koristit ćemo jednostavno oznaku $f\chi_S$, iako sâma funkcija f možda i nije definirana izvan skupa S, pa formalno gledano, niti produkt $f\chi_S$ nije definiran izvan S. Međutim, bez obzira da li je i kako f definirana izvan S, vrijednost funkcije $\tilde{f}\chi_S$ u točkama izvan skupa S je jednaka nuli, a na skupu S se podudara s funkcijom f. Zato oznaka $f\chi_S$ ne može dovesti do zabune.

Na sličan je način opravdana i sljedeća oznaka. Neka je funkcija $f : S \to \mathbb{R}$ R-integrabilna na J-izmjerivom skupu S, a $T \subseteq \mathbb{R}^2$ neka je priozvoljan J-izmjeriv skup. Tada možemo govoriti i o integralu funkcije f na skupu T, tako da pod integralom $\int_T f$ podrazumijevamo integral $\int_{T\cap S} f$, tj. integral $\int_{T\cap S} f\chi_{T\cap S}$, ili, što je isto, $\int_T \tilde{f}|_T$, odnosno $\int_T f\,\chi_T$.

Dokažimo sada teorem o osnovnim svojstvima familije $R(S)$ svih R-integrabilnih funkcija na skupu S i Riemannovog integrala na familiji $R(S)$.

Teorem 18.3

(a) *Skup $R(S)$ svih R-integrabilnih funkcija na J-izmjerivom skupu S je vektorski prostor, a $\int_S \colon R(S) \to \mathbb{R}$ je monoton linearan funkcional.*

(b) *Ako su funkcije $f, g\colon S \to \mathbb{R}$ R-integrabilne, onda je i njihov produkt fg R-integrabilna funkcija, što zajedno s (a) pokazuje da familija $R(S)$ ima strukturu* **algebre**.

(c) *Neka je $f\colon S \to \mathbb{R}$ R-integrabilna funkcija. Tada je i funkcija $|f|\colon S \to \mathbb{R}$ R-integrabilna i vrijedi*

$$\Big| \int_S f \Big| \le \int_S |f| \le M\pi(S) \,, \tag{1}$$

gdje je $M := \sup\limits_{P\in S} |f(P)|$.

Dokaz: (a) slijedi neposredno iz definicije R-integrabilnosti na skupu S i Teorema 15.3(i) o svojstvima integrala na pravokutniku I.

(b) Zbog R-integrabilnosti funkcija f i g su, zbog Lebesgueovog kriterija, Teorem 18.1, skupovi $D(f)$ i $D(g)$ točaka diskontinuiteta funkcija f i g skupovi mjere nula. Kako je skup točaka diskontinuiteta produkta fg sadržan u $D(f) \cup D(g)$, to je i on skup mjere nula. Stoga je i produkt $fg\colon S \to \mathbb{R}$ R-integrabilna funkcija.

(c) Zbog R-integrabilnosti je funkcija f neprekidna osim eventualno na nekom skupu $D(f) \subseteq S$ mjere nula. No tamo gdje je f neprekidna, neprekidna je i funkcija $|f|$, pa je skup $D(|f|)$ točaka diskontinuiteta funkcije $|f|$, sadržan u skupu $D(f)$, dakle je i on mjere nula. Prema Lebesgueovom kriteriju, Teorem 18.1, zaključujemo da je i funkcija $|f|$ R-integrabilna.

Konačno, kako je $-|f| \le f \le |f|$, to je, zbog linearnosti i monotonosti integrala,

$$-\int_S |f| \le \int_S f \le \int_S |f| \,,$$

odakle slijedi prva nejednakost u (1). Druga nejednakost slijedi iz monotonosti integrala i činjenice da je $\int_S 1 = \pi(S)$. ∎

Dokažimo sada i osnovna svojstva familije J-izmjerivih skupova.

Teorem 18.4 *Neka su S_1 i S_2 J-izmjerivi skupovi. Onda su i skupovi $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$, $S_1 \setminus S_2$ također J-izmjerivi, tj. familija J-izmjerivih skupova je* ***prsten skupova***.

Dokaz: Kako su S_1 i S_2 J-izmjerivi skupovi, prema Korolaru 17.5 su ∂S_1 i ∂S_2 skupovi površine nula. Budući je $\partial(S_1 \cup S_2) \subseteq \partial S_1 \cup \partial S_2$ i $\partial(S_1 \cap S_2) \subseteq \partial S_1 \cup \partial S_2$, vidi Propoziciju 1.4, to su $\partial(S_1 \cup S_2)$ i $\partial(S_1 \cap S_2)$ također skupovi površine nula, pa su skupovi $(S_1 \cup S_2)$ i $(S_1 \cap S_2)$ J-izmjerivi skupovi. Da je i skup $(S_1 \setminus S_2)$ J-izmjeriv, pokazuje se analogno, jer je $\partial(S_1 \setminus S_2) = \partial(S_1 \cap (\mathbb{R}^2 \setminus S_2)) \subseteq \partial S_1 \cup \partial(\mathbb{R}^2 \setminus S_2) = \partial S_1 \cup \partial S_2$. ∎

Indukcijom se lako pokaže da su unija i presjek svake konačne familije J-izmjerivih skupova ponovo J-izmjerivi skupovi.

Pokažimo sada da promjena vrijednosti funkcije na malenom skupu ne utječe na njenu integrabilnost, niti na vrijednost integrala.

Teorem 18.5 *Neka je S J-izmjeriv skup a $f\colon S \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija koja je jednaka nuli osim u točkama skupa $A \subseteq S$ koji je površine nula. Tada je f R-integrabilna i $\int_S f = 0$.*

Dokaz: Prema Korolaru 17.6, zatvarač $\overline{A}$ je skup površine nula. Neka je $\tilde{f} = f\chi_S$ proširenje funkcije f nulom. Kako je na otvorenom skupu $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{A}$ ta funkcija jednaka nuli, dakle i neprekidna, to je njen skup diskontinuiteta sadržan u $\overline{A}$, pa je površine nula. Stoga je funkcija $\tilde{f}$ R-integrabilna na svakom pravokutniku koji sadrži skup S, tj. $f \in R(S)$.

Označimo li s $M := \sup\limits_{P \in S} |f(P)| = \sup\limits_{P \in A} |f(P)|$, dobivamo

$$0 \leq \Big| \int_S f \Big| \leq \int_S |f| \leq \int_S M\,\chi_A = M\,\pi(A) = 0\,,$$

pa je $\int_S f = 0$. ∎

Primijetimo da se u prethodnom teoremu uvjet da je A skup površine nula ne može zamijeniti slabijim zahtjevom da je A skup mjere nula, kako pokazuje primjer karakteristične funkcije skupa $\mathbf{Q}$, Primjer 16.1.

Kao posljedicu dobivamo

Korolar 18.6 *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ J-izmjeriv skup, a $f, g\colon S \to \mathbb{R}$ omeđene funkcije takve da je skup $A := \{P \in S : f(P) \neq g(P)\}$ površine nula. Ako je funkcija f R-integrabilna na S onda je i g R-integrabilna na S i vrijedi $\displaystyle\int_S g = \int_S f$.*

Dokaz: Funkcija $g - f\colon S \to \mathbb{R}$ jednaka je nuli, osim u točkama skupa A, pa je ona, prema prethodnom Teoremu 15.3, R-integrabilna, i njen je integral jednak nuli. Kako je $R(S)$ vektorski prostor, Teorem 18.3, to je i $g = (g - f) + f$ R-integrabilna na S, i vrijedi

$$\int_S g = \int_S (g - f) + \int_S f = \int_S f \, . \qquad \blacksquare$$

Napomena 18.3 Prethodni korolar pokazuje da vrijednosti funkcije na nekom skupu površine nula, ne utječu na R-integrabilnost funkcije kao niti na vrijednost integrala. Međutim, promjena vrijednosti na skupu *mjere* nula može utjecati na R-integrabilnost. Naprimjer, karakteristična funkcija $\chi_{\mathbf{Q}}$ skupa $\mathbf{Q} = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap I$ iz Primjera 16.1 se od konstantne funkcije $c(P) = 0$, $P \in I$, razlikuje samo na skupu $\mathbf{Q}$ koji je mjere nula. Ipak, funkcija c je R-integrabilna na I i $\displaystyle\int_I c = 0$, dok funkcija $\chi_{\mathbf{Q}}$ nije R-integrabilna.

Iz Teorema 18.5 također neposredno slijedi

Korolar 18.7 *Proizvoljna omeđena funkcija f definirana na skupu A površine nula, R-integrabilna je na A, i* $\displaystyle\int_A f = 0$. $\blacksquare$

Dokažimo sada aditivnost Riemannovog integrala obzirom na područje integracije.

Teorem 18.8

(a) *Neka su $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ J-izmjerivi skupovi, a $f\colon S_1 \cup S_2 \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija. f je R-integrabilna na $S_1 \cup S_2$ ako i samo ako je R-integrabilna na S_1 i na S_2, i u tom slučaju je*

$$\int_{S_1} f + \int_{S_2} f = \int_{S_1 \cup S_2} f + \int_{S_1 \cap S_2} f \, . \tag{2}$$

(b) *Neka su S_i, $i = 1, \dots, n$, J-izmjerivi skupovi takvi da su $S_i \cap S_j$ skupovi površine nula za sve $i \neq j$, i označimo sa $S := \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ njihovu uniju. Omeđena funkcija $f\colon S \to \mathbb{R}$ je R-integrabilna na S, ako i samo ako je R-integrabilna na S_i za sve $i = 1, \dots, n$, i u tom slučaju vrijedi*

$$\int_S f = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_i} f \, .$$

Dokaz: (a) J-izmjerivost skupova $S_1 \cup S_2$ i $S_1 \cap S_2$ je već dokazana u Teoremu 18.4. Ako je f R-integrabilna na $S_1 \cup S_2$, onda je, prema Teoremu 18.2, ona R-integrabilna i na skupovima S_1, S_2 i na $S_1 \cap S_2$. Formula (2) slijedi iz činjenice da je $\chi_{S_1} + \chi_{S_2} = \chi_{S_1 \cup S_2} + \chi_{S_1 \cap S_2}$, i da je $\widetilde{f|_S} = f \cdot \chi_S \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ za svaki podskup $S \subseteq S_1 \cup S_2$, te linearnosti integrala (Teorem 15.3(i)).

Obratno, ako je f R-integrabilna na S_1 i na S_2, onda je, prema Teoremu 18.2, ona R-integrabilna i na $S_1 \cap S_2$, pa R-integrabilnost na $S_1 \cup S_2$, tj. R-integrabilnost funkcije $f\chi_{S_1 \cup S_2} = f\chi_{S_1} + f\chi_{S_2} - f\chi_{S_1 \cap S_2}$ na I, slijedi iz činjenice da je skup $R(I)$ svih R-integrabilnih funkcija na pravokutniku I, vektorski prostor (Teorem 15.3(i)).

(b) Skup S je, kao konačna unija J-izmjerivih skupova, J-izmjeriv, Korolar 16.2, a prema Korolaru 18.7 je $\int\limits_{S_i \cap S_j} f = 0$ za sve $i \neq j$, pa tvrdnja slijedi indukcijom iz (a). ■

Napomena 18.4 Kako prema Korolaru 18.6 skupovi površine nula ne utječu na R-integrabilnost, to, prema Teoremima 18.2 i 18.8, zaključujemo da ako je $f \colon I = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija, a ρ neka razdioba pravokutnika I, onda je f R-integrabilna na I ako i samo ako je R-integrabilna na svim otvorenim pravokutnicima $\mathring{I}_{ij}$ razdiobe ρ, i u tom slučaju je

$$\int_I f = \sum_{i,j} \int_{\mathring{I}_{ij}} f \ .$$

Na nekoliko sljedećih stranica bavit ćemo se razdiobama J-izmjerivih skupova, i pokazati da se integral R-integrabilne funkcije može dobiti kao limes gornjih odnosno donjih suma obzirom na razdiobe kojima očice teže k nuli, Korolar 18.12. Taj ćemo rezultat koristiti u dokazu Teorema 20.1 o zamjeni varijabli u dvostrukom integralu.

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ J-izmjeriv skup. ***Razdiobom*** σ ***skupa*** S naziva se svaki rastav skupa S na konačnu uniju J-izmjerivih skupova $S = \bigcup\limits_{s=1}^{k(\sigma)} S_s$ takvih da su $S_s \cap S_t$, za $s \neq t$, skupovi površine nula. Pisat ćemo $\sigma = \{S_s\}$, a skup svih razdiobâ skupa S označavat ćemo sa $\sigma(S)$. Za razdiobu $\sigma' = \{S'_t\}$ skupa S kažemo da ***profinjuje*** razdiobu $\sigma = \{S_s\}$, i pišemo $\sigma' > \sigma$, ako za svaki t postoji s takav da je $S'_t \subseteq S_s$.

Za omeđenu funkciju $f\colon S \to \mathbb{R}$ i razdiobu $\sigma = \{S_s\}$ J-izmjerivog skupa S, označimo s $m_s := \inf f(S_s)$ i $M_s := \sup f(S_s)$, i slično kao u definiciji Darbouxovih suma, neka je

$$s(f,\sigma,S) := \sum_{s=1}^{k(\sigma)} m_s\,\pi(S_s)$$
$$S(f,\sigma,S) := \sum_{s=1}^{k(\sigma)} M_s\,\pi(S_s)\ .$$

Lako se vidi da ako razdioba σ' profinjuje razdiobu σ, onda je

$$s(f,\sigma,S) \le s(f,\sigma',S) \le S(f,\sigma',S) \le S(f,\sigma,S)\ .$$

Teorem 18.9 *Neka je $f\colon S \to \mathbb{R}$ R-integrabilna funkcija na J-izmjerivom skupu $S \subseteq \mathbb{R}^2$. Tada je*

$$\int_S f = \sup\{\, s(f,\sigma,S) : \sigma \in \sigma(S)\,\} \tag{3}$$
$$= \inf\{\, S(f,\sigma,S) : \sigma \in \sigma(S)\,\}\ . \tag{4}$$

Pri tome se, ako je $\pi(S) > 0$, supremum odnosno infimum može uzimati i samo po onim razdiobama $\sigma = \{S_s\}$ skupa S za koje je $\pi(S_s) > 0$ za sve s.

Zbog toga, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji razdioba σ skupa S takva da je $S(f,\sigma,S) - s(f,\sigma.S) < \varepsilon$.

Dokaz: Prema Teoremu 18.8, za svaku razdiobu σ skupa S, funkcija f je R-integrabilna i na svakom od skupova S_s, i zbog monotonosti integrala, vrijedi

$$\int_S f = \sum_s \int_{S_s} f \ge \sum_s \int_{S_s} m_s = \sum_s m_s\,\pi(S_s)\ .$$

Da bismo dokazali (3), dovoljno je pokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji razdioba σ skupa S takva da je

$$\int_S f - \sum_s m_s\,\pi(S_s) < \varepsilon\ . \tag{5}$$

Neka je $I = [a,b] \times [c,d]$ neki pravokutnik koji sadrži skup S, i neka je $\tilde{f}\colon I \to \mathbb{R}$ funkcija koja proširuje f nulom, kao u Definiciji 18.1. R-integrabilnost od f na skupu S upravo znači R-integrabilnost funkcije $\tilde{f}$ na pravokutniku I, pa za zadani ε postoji razdioba ρ pravokutnika I na manje pravokutnike I_{ij}, tako da je

$$\int_I \tilde{f} - \sum_{i,j} m_{ij}(\tilde{f})\, \pi(I_{ij}) < \frac{\varepsilon}{2}\ , \tag{6}$$

gdje smo, kao i inače, označili $m_{ij}(f) := \inf\limits_{P \in I_{ij}} \tilde{f}(P)$. Kako skup S ima površinu, njegov rub ∂S je skup površine nula, pa razdiobu ρ možemo odabrati tako da, osim (6), vrijedi i

$$\sum_{I_{ij} \cap \partial S \neq \emptyset} \pi(I_{ij}) < \frac{\varepsilon}{4M}\ , \tag{7}$$

gdje je $M := \sup\limits_{P \in S} |f(P)| = \sup\limits_{P \in I} |\tilde{f}(P)|$. (Ukoliko je $f = \mathbf{0}$, integral i sume su jednaki nuli, pa se nema što dokazivati.)

Neka je σ razdioba skupa S koju čine svi presjeci $S_{ij} := S \cap I_{ij}$, što su, prema Teoremu 18.4, zaista J-izmjerivi skupovi. Rastavimo donju Darbouxovu sumu funkcije $\tilde{f}$ na tri dijela:

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j} m_{ij}(\tilde{f})\, \pi(I_{ij}) = \\ &\quad = \sum_{I_{ij} \subseteq \operatorname{Int} S} m_{ij}(\tilde{f})\, \pi(I_{ij}) + \sum_{I_{ij} \cap \partial S \neq \emptyset} m_{ij}(\tilde{f})\, \pi(I_{ij}) + \sum_{Iij \subseteq I \setminus \overline{S}} m_{ij}(\tilde{f})\, \pi(I_{ij})\ . \end{aligned} \tag{8}$$

Prva suma na desnoj strani jednaka je $\sum\limits_{I_{ij} \subseteq \operatorname{Int} S} m_{ij}\, \pi(S_{ij})$, jer, za $I_{ij} \subseteq \operatorname{Int} S$, je $S_{ij} = I_{ij}$ i

$$m_{ij} := \inf f(S_{ij}) = \inf f(I_{ij}) = \inf \tilde{f}(I_{ij})\ ,$$

a treća je suma jednaka nuli, jer je $\tilde{f}(P) = 0$ za sve $P \in I \setminus \overline{S} \subseteq I \setminus S$.

Kako je $m_{ij}(\tilde{f}) \leq M$ za sve i, j, to je, zbog (7), druga suma u (8) manja od $\frac{\varepsilon}{4}$, pa iz (6) dobivamo

$$\int_I \tilde{f} < \sum_{I_{ij} \subseteq \operatorname{Int} S} m_{ij}\, \pi(S_{ij}) + \frac{3}{4}\varepsilon\ . \tag{9}$$

Nadalje je, zbog $m_{ij} \leq M$ i $\pi(S_{ij}) \leq \pi(I_{ij})$ za sve i, j,

$$\sum_{I_{ij} \cap \partial S \neq \emptyset} m_{ij}\, \pi(S_{ij}) \leq \sum_{I_{ij} \cap \partial S \neq \emptyset} M\, \pi(I_{ij}) \overset{(7)}{\leq} \frac{\varepsilon}{4}\ , \tag{10}$$

pa, kako je $\int_I \tilde{f} = \int_S f$ i $S_{ij} = \emptyset$ za $I_{ij} \subseteq I \setminus \overline{S}$, iz (9) dobivamo

$$\int_S f < \sum_{i,j} m_{ij}\, \pi(S_{ij}) + \varepsilon \,,$$

što dokazuje (5), a time i (3).

Analogno se dokazuje druga jednakost. ■

Za razdiobu $\sigma = \{S_s\}$ skupa S, broj $\delta(\sigma) := \max\limits_s \operatorname{diam} S_s$ naziva se ***očicom razdiobe*** σ.

Teorem 18.10 *Neka je $f\colon I = [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ R-integrabilna funkcija. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaku razdiobu $\sigma = \{S_s\}$ skupa*[1] *I čija je očica $\delta(\sigma) < \delta$, vrijedi*

$$S(f,\sigma,I) - s(f,\sigma,I) < \varepsilon$$

tj.

$$\sum_s (M_s - m_s)\, \pi(S_s) < \varepsilon \,.$$

Dokaz: Dokažimo teorem najprije u slučaju kada je funkcija f neprekidna. Tada je f i uniformno neprekidna, pa za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$\forall P, P' \in I \,, \quad \|P - P'\| < \delta \implies |f(P) - f(P')| < \frac{\varepsilon}{\pi(I)} \,. \tag{11}$$

Neka je $\sigma = \{S_s\}$ razdioba skupa I takva da je $\delta(\sigma) < \delta$. Skupovi S_s su J-izmjerivi, pa su i njihovi zatvarači $\overline{S}_s = S_s \cup \partial S_s$ J-izmjerivi skupovi, i $\pi(\overline{S}_s) = \pi(S_s)$.

Zbog kompaktnosti skupova $\overline{S}_s$ je $\overline{m}_s := \inf f(\overline{S}_s) = \min f(\overline{S}_s)$ i $\overline{M}_s := \sup f(\overline{S}_s) = \max f(\overline{S}_s)$, pa je, zbog uniformne neprekidnosti, tj. zbog (11), $\overline{M}_s - \overline{m}_s < \frac{\varepsilon}{\pi(I)}$, te je

$$\sum_s (M_s - m_s)\, \pi(S_s) \le \sum_s (\overline{M}_s - \overline{m}_s)\, \pi(S_s) < \varepsilon \,.$$

U općem slučaju, za R-integrabilnu funkciju f, skup $D(f)$ točaka u kojima f nije neprekidna, je prema Lebesgueovoj karakterizaciji R-integrabilnosti, skup

[1] Govorit ćemo *razdioba skupa I*, a ne *razdioba pravokutnika I*, kada želimo istaknuti da se radi o proizvoljnoj razdiobi na J-izmjerive skupove S_s, a ne nužno na pravokutnike I_{ij}, i takvu ćemo razdiobu označavati sa σ a ne ρ.

mjere nula. Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je $M := \sup\limits_{P \in I} |f(P)|$, te neka su I_j, $j \in \mathbb{N}$, pravokutnici takvi da je

$$D(f) \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathring{I}_j \qquad \text{i} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \pi(I_j) < \frac{\varepsilon}{8M} \,. \tag{12}$$

Označimo s I'_j pravokutnike koncentrične s I_j i dvostruke površine, te neka je $U := \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} \mathring{I}_j$ i $V := \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} \mathring{I}'_j$. Restrikcija $f|_{I \setminus U} \colon I \setminus U \to [-M, M]$ je neprekidna funkcija. Neka je $g \colon I \to [-M, M]$ neprekidno proširenje od $f|_{I \setminus U}$, koje, jer je $I \setminus U$ zatvoren podskup od I, postoji prema Tietzeovom teoremu 6.5. Kako je g neprekidna funkcija, prema već dokazanom, postoji $\delta > 0$ takav da za svaku razdiobu σ skupa I za koju je $\delta(\sigma) < \delta$, vrijedi

$$S(g, \sigma, I) - s(g, \sigma, I) < \frac{\varepsilon}{2} \,. \tag{13}$$

Neka je $\delta' < \delta$ Lebesgueov broj pokrivača $\{\, K(P, \frac{\delta}{2}) \cap (I \setminus \overline{U}) : P \in I \setminus V \,\} \cup \{V\}$ pravokutnika I. Tada za razdiobu $\sigma \in \sigma(I)$ za koju je $\delta(\sigma) < \delta'$, vrijedi

$$\begin{aligned} \sum_s S(f, \sigma, I) \,-\, s(f, \sigma, I) &= \sum_s \big(M_s(f) - m_s(f)\big)\, \pi(S_s) \\ &\le \sum_{S_s \subseteq I \setminus \overline{U}} \big(M_s(f) - m_s(f)\big)\, \pi(S_s) + \sum_{S_s \subseteq V} \big(M_s(f) - m_s(f)\big)\, \pi(S_s) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Zaista, izvan skupa U su funkcije f i g jednake, pa za $S_s \subseteq I \setminus \overline{U}$ vrijedi $M_s(f) = M_s(g)$ i $m_s(f) = m_s(g)$, te je, zbog (13), prva suma u drugom retku manja od $\frac{\varepsilon}{2}$, a druga je suma manja od $\frac{\varepsilon}{2}$ jer je $M_s(f) - m_s(f) \le 2M$, i za $s \neq t$ su $S_s \cap S_t$ skupovi površine nula, pa je $\sum\limits_{S_s \subseteq V} \pi(S_s) \le \sum\limits_{j=1}^{\infty} \pi(I'_j) < \frac{\varepsilon}{4M}$. Na prijelazu iz prvog u drugi redak je nejednakost, a ne jednakost, jer se neki od skupova S_s nalaze i u $I \setminus \overline{U}$ i u V. ■

Korolar 18.11 *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ J-izmjeriv skup a $f \colon S \to \mathbb{R}$ R-integrabilna funkcija. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaku razdiobu $\sigma = \{S_s\}$ skupa S čija je očica manja od δ, vrijedi $S(f, \sigma, S) - s(f, \sigma, S) < \varepsilon$. Specijalno je i*

$$\int_S f - \sum_s m_s \, \pi(S_s) < \varepsilon \,.$$

Dokaz: Neka je $I \subseteq \mathbb{R}^2$ neki pravokutnik koji sadrži skup S, a $\tilde{f}$ proširenje funkcije f nulom. R-integrabilnost od f na S znači R-integrabilnost funkcije $\tilde{f}$ na I, pa, prema prethodnom teoremu, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaku razdiobu $\tilde{\sigma} \in \sigma(I)$ čija je očica manja od δ, vrijedi $S(\tilde{f}, \tilde{\sigma}, I) - s(\tilde{f}, \tilde{\sigma}, I) < \varepsilon$. Neka je $\sigma = \{S_s\}$ razdioba skupa S takva da je $\delta(\sigma) < \delta$, i neka je ρ razdioba pravokutnika I takva da je $\delta(\rho) < \delta$. Pravokutnike razdiobe ρ označimo s I_{ij}, i neka je $\tilde{\sigma}$ razdioba skupa I koja se sastoji od skupova S_s razdiobe σ i svih presjeka $I_{ij} \cap (I \setminus S) = I_{ij} \setminus S$. Tada je $\delta(\tilde{\sigma}) < \delta$, pa zbog $\tilde{f}|_{I_{ij} \setminus S} = \mathbf{0}$, vrijedi

$$\begin{aligned}
&S(f, \sigma, S) - s(f, \sigma, S) = \\
&= \sum_s \big(M_s(f) - m_s(f)\big)\, \pi(S_s) + \sum_{I_{ij} \setminus S \neq \emptyset} \big(\sup \tilde{f}(I_{ij} \setminus S) - \inf \tilde{f}(I_{ij} \setminus S)\big)\, \pi(I_{ij} \setminus S) \\
&\qquad = S(\tilde{f}, \tilde{\sigma}, I) - s(\tilde{f}, \tilde{\sigma}, I) < \varepsilon \;.
\end{aligned}$$

■

Korolar 18.12 *Neka je f R-integrabilna funkcija na J-izmjerivom skupu S, i neka je za svaki $\delta > 0$ dâna neka razdioba σ_δ skupa S čija je očica $\delta(\sigma_\delta) < \delta$. Tada je*

$$\begin{aligned}
\int_S f &= \lim_{\delta \to 0} S(f, \sigma_\delta, S) = \inf_\delta S(f, \sigma_\delta, S) \\
&= \lim_{\delta \to 0} s(f, \sigma_\delta, S) = \sup_\delta s(f, \sigma_\delta, S) \;.
\end{aligned}$$

Dokaz: Prema prethodnom korolaru, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta' > 0$ takav da za svaku razdiobu σ skupa S čija je očica $\delta(\sigma) < \delta'$, vrijedi $\int_S f - s(f, \sigma, S) < \varepsilon$. Stoga, za svaki $\delta < \delta'$ vrijedi

$$0 \le \int_S f - s(f, \sigma_\delta, S) < \varepsilon \;,$$

tj.

$$\int_S f \ge s(f, \sigma_\delta, S) > \int_S f - \varepsilon \;,$$

pa je

$$\int_S f = \sup_\delta s(f, \sigma_\delta, S) = \lim_{\delta \to 0} s(f, \sigma_\delta, S) \;.$$

Slično se dokazuje i druga jednakost. ■

Dokažimo na kraju i sljedeći teorem srednje vrijednosti.

Teorem 18.13 (O srednjoj vrijednosti za Riemannov integral) *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ povezan J-izmjeriv skup, a $f\colon S \to \mathbb{R}$ neprekidna omeđena funkcija. Tada postoji točka $P_0 \in S$ takva da je $\int_S f = f(P_0)\,\pi(S)$.*

Dokaz: Ako je $\operatorname{Int} S = \emptyset$, onda je prema Korolaru 17.6, S skup površine nula, pa teorem očito vrijedi.

Neka je dakle $\operatorname{Int} S \neq \emptyset$. Tada je, prema Korolaru 17.6 (ii), $\pi(S) > 0$. Označimo s $m := \inf f(S)$, $M := \sup f(S)$. Kako za svaku točku $P \in S$ vrijedi $m \leq f(P) \leq M$, to, zbog monotonosti integrala, vrijedi $m\,\pi(S) \leq \int_S f \leq M\,\pi(S)$. Ako je $m\,\pi(S) < \int_S f < M\,\pi(S)$, tj. $\frac{1}{\pi(S)} \int_S f \in \langle m, M\rangle$, onda, zbog neprekidnosti funkcije f i povezanosti skupa S, postoji točka $P_0 \in S$ takva da je $\frac{1}{\pi(S)} \int_S f = f(P_0)$, Korolar 2.17$(a)$, pa je $\int_S f = f(P_0)\,\pi(S)$.

Pokažimo da ukoliko je $\int_S f = m\,\pi(S)$, onda je $f(P) = m$ čak za sve točke $P \in \operatorname{Int} S$. Zaista, ako postoji točka $P \in \operatorname{Int} S$ takva da je $f(P) > m$, onda, zbog otvorenosti skupa $\operatorname{Int} S$ i neprekidnosti funkcije f, postoji $\delta > 0$ takav da je $K := \overline{K}(P, \delta) \subseteq \operatorname{Int} S$ i $f(P') > m$ za sve $P' \in K$ (vidi Lemu 2.9). Zbog kompaktnosti kruga K, prema Korolaru 5.11, postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $f(P') > m + \varepsilon$ za sve $P' \in K$. Zbog J-izmjerivosti skupova S i K, i razlika $S \setminus K$ je J-izmjeriv skup, pa zbog aditivnosti integrala obzirom na područje integracije, Teorem 18.8, vrijedi

$$
\begin{aligned}
m\,\pi(S) = \int_S f = \int_K f + \int_{S\setminus K} f &\geq (m+\varepsilon)\,\pi(K) + m\,\pi(S \setminus K) \\
&= m\,\pi(S) + \varepsilon\,\pi(K) > m\,\pi(S)
\end{aligned}
$$

jer je $\pi(K) > 0$.

Dakle, ako je $\operatorname{Int} S \neq \emptyset$ i $\int_S f = m\,\pi(S)$, onda za svaku točku $P \in \operatorname{Int} S$ vrijedi

$$
\int_S f = m\,\pi(S) = f(P)\,\pi(S)\,.
$$

Analogno se teorem dokazuje u slučaju kada je $\int_S f = M\,\pi(S)$. ■

§ 19 Fubinijev teorem i funkcije definirane integralom

Osnovna metoda za nalaženje Riemannovog integrala funkcije dvije varijable (dakle, 'dvostrukog integrala') je redukcija na dva uzastopna 'jednostruka' integrala realnih funkcija jedne varijable. O tome govori Fubinijev[1] teorem, a mi ćemo dokazati jednu njegovu jednostavnu varijantu (koju ćemo također zvati Fubinijev teorem).

Analogno pojmovima površine i mjere nula, za podskupove od $\mathbb{R}$ definiramo duljinu i (jednodimenzionalnu) mjeru nula. Točnije:

Definicija 19.1 Za omeđen skup $A \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da ima ***duljinu nula*** ako za svaki broj $\varepsilon > 0$ postoji konačno mnogo segmenata $I_j = [\alpha_j, \beta_j] \subseteq \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, k$, takvih da je $A \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{k} I_j$ i $\sum\limits_{j=1}^{k} \ell(I_j) < \varepsilon$. Pri tome je sa $\ell(I_j) := \beta_j - \alpha_j$ označena uobičajena duljina segmenta.

Za skup $A \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da ima (***jednodimenzionalnu***) ***mjeru nula*** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji niz segmenata I_j, $j \in \mathbb{N}$, tako da je $A \subseteq \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} I_j$ i $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) < \varepsilon$.

Očito svaki konačan skup ima duljinu nula, dakle i mjeru nula, a slično kao u §§ 16 i 17, ali jednostavnije, dokazuje se da skupovi mjere nula tvore σ-ideal skupova i da vrijedi Lebesgueova karakterizacija R-integrabilnosti omeđene funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, tj. f je R-integrabilna ako i samo ako je skup točaka diskontinuiteta od f skup (jednodimenzionalne) mjere nula.

Teorem 19.1 (Fubinijev teorem) *Neka je $I = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ pravokutnik, a $f : I \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija takva da je skup D točaka u kojima f nije neprekidna, skup (dvodimenzionalne) mjere nula. Ako za svaki $x \in [a, b]$ skup $D_x := \{y \in [c, d] : (x, y) \in D\}$ ima (jednodimenzionalnu) mjeru nula, onda:*

(*i*) *funkcija $y \mapsto f(x, y)$ je R-integrabilna na $[c, d]$ za svaki $x \in [a, b]$*

(*ii*) *funkcija $x \mapsto \displaystyle\int_c^d f(x, y)\, dy$ je R-integrabilna na $[a, b]$*

(*iii*) *vrijedi jednakost*

$$\int_I f = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)\, dy \Big)\, dx\ . \tag{1}$$

Analogne tvrdnje vrijede ako se zamijene uloge od x i y.

[1] Guido Fubini (1879–1943), talijanski matematičar

Dokaz: Za čvrst $x \in [a,b]$ je funkcija $y \mapsto f(x,y)$ neprekidna, osim eventualno u točkama nekog podskupa skupa D_x, pa je, prema komentaru neposredno ispred teorema, R-integrabilna na $[c,d]$. Stoga je dobro definirana funkcija $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ s

$$F(x) := \int_c^d f(x,y)\,dy\ . \tag{2}$$

Dokažimo da je F R-integrabilna na $[a,b]$.

Neka je $\rho = (\rho_x, \rho_y)$ proizvoljna razdioba pravokutnika I, pri čemu su $\rho_x = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b\}$ i $\rho_y = \{c = y_0 < y_1 < \ldots < y_l = d\}$ razdiobe segmenta $[a,b]$, odnosno $[c,d]$. Za proizvoljnu ***integralnu sumu***

$$\sigma(F, \rho_x; t_1, \ldots, t_k) := \sum_{i=1}^{k} F(t_i)(x_i - x_{i-1})\ ,\ t_i \in [x_{i-1}, x_i]\ ,\ i = 1, \ldots, k\ , \tag{3}$$

funkcije F za razdiobu ρ_x i odabrane točke $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, vrijedi

$$\begin{aligned}
\sigma(F, \rho_x; t_1, \ldots, t_k) &\overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{k} \Big(\int_c^d f(t_i, y)\,dy \Big)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{j=1}^{l} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(t_i, y)\,dy \Big)(x_i - x_{i-1})\ .
\end{aligned} \tag{4}$$

Kako za $(t_i, y) \in I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ vrijedi

$$m_{ij} \le f(t_i, y) \le M_{ij}\ ,$$

to iz (4) dobivamo

$$s(f, \rho) \le \sigma(F, \rho_x; t_1, \ldots, t_k) \le S(f, \rho) \tag{5}$$

za svaki izbor točaka $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, k$. Za donju, odnosno gornju Darbouxovu sumu funkcije F obzirom na razdiobu ρ_x vrijedi

$$\begin{aligned}
s(F, \rho_x) &= \inf\{\sigma(F, \rho_x; t_1, \ldots, t_k) : t_i \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1, \ldots, k\} \\
S(F, \rho_x) &= \sup\{\sigma(F, \rho_x; t_1, \ldots, t_k) : t_i \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1, \ldots, k\}
\end{aligned}$$

pa iz (5) dobivamo

$$s(f, \rho) \le s(F, \rho_x) \le S(F, \rho_x) \le S(f, \rho) \tag{6}$$

za svaku razdiobu $\rho = (\rho_x, \rho_y)$ pravokutnika I.

Kako je, prema Teoremu 17.4, funkcija f R-integrabilna na I, to za svaki $\varepsilon > 0$ postoji razdioba $\rho = (\rho_x, \rho_y)$ pravokutnika I takva da je

$$S(f,\rho) - s(f,\rho) < \varepsilon \ . \tag{7}$$

No tada, zbog (6), vrijedi $S(F,\rho_x) - s(F,\rho_x) < \varepsilon$, pa je funkcija F R-integrabilna na $[a,b]$, tj. vrijedi (ii).

Konačno, da dokažemo formulu (1), primijetimo da je za svaku razdiobu $\rho = (\rho_x, \rho_y)$ pravokutnika I

$$s(f,\rho) \le \int_I f \le S(f,\rho) \ ,$$

a zbog (6), za pripadnu razdiobu ρ_x segmenta $[a,b]$ vrijedi

$$s(f,\rho) \le s(F,\rho_x) \le \int_a^b F(x)\,dx \le S(F,\rho_x) \le S(f,\rho)$$

pa je

$$\Big| \int_I f - \int_a^b F(x)\,dx \Big| \le S(f,\rho) - s(f,\rho)$$

za svaku razdiobu ρ pravokutnika I.

Kako zbog R-integrabilnosti od f možemo za svaki $\varepsilon > 0$ odabrati razdiobu ρ tako da vrijedi (7), to je za sve $\varepsilon > 0$

$$\Big| \int_I f - \int_a^b F(x)\,dx \Big| < \varepsilon \ \ ,$$

pa je

$$\int_I f = \int_a^b F(x)\,dx$$

što je upravo formula (1). ■

Napomena 19.1 Za uzastopne integrale u formuli (1) uobičajena je i oznaka

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy := \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy \Big)\,dx \ .$$

Često se primjenjuju sljedeće posljedice Fubinijeva teorema:

Korolar 19.2 *Neka je* $f\colon [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ *omeđena funkcija takva da je skup* D *točaka u kojima* f *nije neprekidna, skup (dvodimenzionalne) mjere nula, i da su skupovi*

$$D_x := \{y : (x,y) \in D\} \subseteq [c,d]$$
$$D_y := \{x : (x,y) \in D\} \subseteq [a,b]$$

(jednodimenzionalne) mjere nula za svaki $x \in [a,b]$*, odnosno svaki* $y \in [c,d]$*. Tada za uzastopne integrale vrijedi jednakost*

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx \ ,$$

tj. redoslijed integracije može se promijeniti. ■

Specijalno, za neprekidne funkcije vrijedi

Korolar 19.3 *Ako je* $f\colon [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija, onda je*

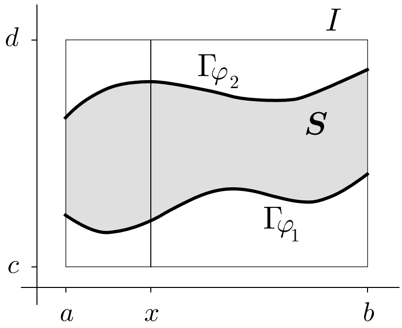
$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx \ .$$ ■

Koristeći Lemu 16.3, dobivamo

Korolar 19.4 *Neka su* $\varphi_1, \varphi_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *neprekidne realne funkcije takve da je* $\varphi_1 \leq \varphi_2$ *, i neka je* $S := \{(x,y) : x \in [a,b], \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$*. Tada je svaka neprekidna funkcija* $f\colon S \to \mathbb{R}$ *R-integrabilna i vrijedi*

$$\int_S f = \int_a^b \Big(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\Big)dx \ .$$

Dokaz: Zbog neprekidnosti funkcija φ_1, φ_2 na segmentu $[a,b]$, možemo odabrati $c,d \in \mathbb{R}$ takve da je $c \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq d$ za sve $x \in [a,b]$. Tada je



$S \subseteq I := [a,b] \times [c,d]$. Definirajmo funkciju $\tilde{f} \colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ s

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y) \ , & (x,y) \in S \\ 0 \ , & (x,y) \notin S \end{cases} .$$

Skup točaka u kojima $\tilde{f}$ nije neprekidna sadržan je u uniji $\Gamma_{\varphi_1} \cup \Gamma_{\varphi_2}$ grafova funkcija φ_1 i φ_2, što je, prema Lemi 16.3, skup mjere nula, i očito ga paralele s y-osi sijeku u najviše dvije točke, tj. u skupu (jednodimenzionalne) mjere nula. Primjenom Fubinijevog teorema, dobivamo

$$\begin{aligned} \int_S f &= \int_I \tilde{f} = \int_a^b \Big(\int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy \Big) dx \\ &= \int_a^b \Big(\int_c^{\varphi_1(x)} \tilde{f}(x,y)\,dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \tilde{f}(x,y)\,dy + \int_{\varphi_2(x)}^{d} \tilde{f}(x,y)\,dy \Big) dx \\ &= \int_a^b \Big(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \Big) dx \end{aligned}$$

jer za svaki $x \in [a,b]$ vrijedi

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} 0 \ , & y \in [c, \varphi_1(x)\rangle \cup \langle \varphi_2(x), d] \\ f(x,y) \ , & y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)] \end{cases} . \qquad \blacksquare$$

Neka je $f \colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ funkcija takva da su funkcije $y \mapsto f(x,y)$, $y \in [c,d]$ R-integrabilne na $[c,d]$ za sve $x \in [a,b]$. Tada je s

$$F(x) := \int_c^d f(x,y)\,dy$$

dobro definirana funkcija $F \colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Za nju kažemo da je ***funkcija definirana integralom*** ili da je ***integral ovisan o parametru***.

O integrabilnosti funkcije F govori Fubinijev teorem. Specijalno, Korolar 19.3 kaže da je funkcija definirana integralom neprekidne funkcije, integrabilna i integrali se mogu zamijeniti.

Promotrimo sada pitanja neprekidnosti odnosno diferencijabilnosti funkcija definiranih integralom.

Teorem 19.5 *Neka je funkcija* $f\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ *neprekidna. Tada je i funkcija* $F(x) := \int_c^d f(x,y)\,dy$ *neprekidna na* $[a,b]$.

Analogno vrijedi za funkciju $G(y) := \int_a^b f(x,y)\,dx$.

Dokaz: Zbog uniformne neprekidnosti funkcije f, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve točke $(x,y),(x',y') \in I$ za koje je $\|(x,y)-(x',y')\| < \delta$ vrijedi $|f(x,y)-f(x',y')| < \dfrac{\varepsilon}{d-c}$.

Specijalno za sve $y \in [c,d]$ i sve $x,x' \in [a,b]$ za koje je $|x-x'| < \delta$ vrijedi $|f(x,y)-f(x',y)| < \dfrac{\varepsilon}{d-c}$, pa je

$$\begin{aligned}|F(x)-F(x')| &= \Big|\int_c^d f(x,y)\,dy - \int_c^d f(x',y)\,dy\Big|\\ &\le \int_c^d |f(x,y)-f(x',y)|\,dy < \varepsilon\end{aligned}$$

tj. F je (uniformno) neprekidna na $[a,b]$. ■

Korolar 19.6 *Neka je funkcija* $f\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ *neprekidna. Tada za svaki* $x_0\in[a,b]$ *vrijedi*

$$\lim_{x\to x_0}\int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d f(x_0,y)\,dy = \int_c^d \lim_{x\to x_0} f(x,y)\,dy\,.$$

Kaže se da 'limes i integral komutiraju'.

Dokaz: Prema Teoremu 19.5, funkcija $F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ neprekidna je u točki $x_0 \in [a,b]$, pa je

$$\lim_{x\to x_0}\int_c^d f(x,y)\,dy = \lim_{x\to x_0} F(x) = F(x_0) = \int_c^d f(x_0,y)\,dy\,. \qquad ■$$

Da dokažemo diferencijabilnost funkcije definirane integralom, potrebna nam je sljedeća lema:

Lema 19.7 *Neka je* $\varphi\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ *neprekidna funkcija. Tada je funkcija* $t\mapsto \int_a^t \varphi(x)\,dx$ *derivabilna i derivacija je jednaka* $\frac{d}{dt}(\int_a^t \varphi(x)\,dx) = \varphi(t)$, $t\in[a,b]$. *(U točkama* $t=a$*, odnosno* $t=b$*, radi se o jednostranim derivacijama.)*

Dokaz: Za $t \in [a,b]$ je

$$\lim_{t' \to t} \frac{1}{t'-t}\Big(\int_a^{t'} \varphi(x)\,dx - \int_a^t \varphi(x)\,dx\Big) = \lim_{t' \to t} \frac{1}{t'-t} \int_t^{t'} \varphi(x)\,dx \ .$$

Prema teoremu srednje vrijednosti za integral neprekidne funkcije, postoji $\tau \in \langle t, t' \rangle$ takav da je $\int_t^{t'} \varphi(x)\,dx = \varphi(\tau)(t'-t)$, pa, opet zbog neprekidnosti funkcije φ, traženi limes postoji i jednak je

$$= \lim_{t' \to t} \frac{\varphi(\tau)(t'-t)}{t'-t} = \varphi(t) \ . \qquad \blacksquare$$

Teorem 19.8 *Neka je $f\colon I = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ R-integrabilna funkcija koja ima neprekidnu parcijalnu derivaciju $\partial_1 f$ na I. Tada je funkcija $F(x) := \int_c^d f(x,y)\,dy$ neprekidno diferencijabilna na $[a,b]$, tj. $F \in C^1([a,b])$, i derivacija je jednaka*

$$F'(x) = \int_c^d \partial_1 f(x,y)\,dy \quad , \quad x \in [a,b] \ .$$

Dokaz: Definirajmo funkciju $H\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ s $H(x) := \int_c^d \partial_1 f(x,y)\,dy$. Kako je $\partial_1 f$ neprekidna na I, dakle i na $[a,t] \times [c,d]$ za svaki $t \in [a,b]$, to, prema Korolaru 19.3, imamo

$$\begin{aligned}\int_a^t H(x)\,dx &= \int_a^t \Big(\int_c^d \partial_1 f(x,y)\,dy\Big)dx = \int_c^d \Big(\int_a^t \partial_1 f(x,y)\,dx\Big)dy \\ &= \int_c^d \big(f(t,y) - f(a,y)\big)dy = F(t) - F(a) \ ,\end{aligned}$$

pa je $F(t) = F(a) + \int_a^t H(x)\,dx$, $t \in [a,b]$. Prema Teoremu 19.5, funkcija H je neprekidna, pa je, prema Lemi 19.7, F derivabilna i

$$F'(t) = H(t) = \int_c^d \partial_1 f(t,y)\,dy \ . \qquad \blacksquare$$

Kombiniranjem Leme 19.7 i Teorema 19.8, dobivamo

Korolar 19.9 *Neka je $f\colon I = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ R-integrabilna funkcija koja ima neprekidnu parcijalnu derivaciju $\partial_1 f$ na I, te neka su funkcije $\varphi, \psi\colon [a,b] \to [c,d]$ diferencijabilne klase C^1. Tada je funkcija $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$F(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

diferencijabilna klase C^1 *na* $[a,b]$ *i njena je derivacija jednaka*

$$F'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \partial_1 f(x,y)\,dy + f(x,\psi(x))\cdot\psi'(x) - f(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\ . \tag{8}$$

Dokaz: Na funkciju F možemo gledati kao na kompoziciju

$$x \mapsto (x,\varphi(x),\psi(x)) \quad \text{i} \quad (x,u,v) \mapsto \int_u^v f(x,y)\,dy \tag{9}$$

pa primijenimo teorem o derivaciji kompozicije. Pri tome, pri nalaženju parcijalne derivacije druge funkcije u (9) po drugoj varijabli, koristimo Lemu 19.7 i činjenicu da je $\int_u^v f(x,y)\,dy = -\int_v^u f(x,y)\,dy$. ■

§ 20 Zamjena varijabli u dvostrukom integralu

Za funkciju jedne varijable, koristeći Newton[1]-Leibnitzovu[2] formulu, lako se dokazuje sljedeći važan teorem o zamjeni varijable (supstituciji):

Ako je $\varphi\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija klase C^1, a $f\colon \varphi([a,b])\to\mathbb{R}$ neprekidna, onda vrijedi

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

odnosno

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \int_a^b (f\circ\varphi)\cdot\varphi'\ .$$

Ukoliko je φ osim toga injekcija, onda se lako vidi da vrijedi

$$\int_{\varphi([a,b])} f = \int_{[a,b]} (f\circ\varphi)\cdot|\varphi'|\ . \tag{1}$$

Ovo je tvrdnja koju želimo generalizirati na slučaj funkcije dvije varijable.

[1]Sir Isaac Newton (1643–1727), engleski matematičar i fizičar
[2]Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716), njemački filozof i matematičar

Teorem 20.1 (O zamjeni varijabli u dvostrukom integralu) *Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kompaktan J-izmjeriv skup, $\Omega \supseteq K$ otvoren skup, a $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ injektivno diferencijabilno preslikavanje klase C^1 takvo da je diferencijal $D\varphi(P)$ regularan u svim točkama $P \in \Omega$. Tada za svaku R-integrabilnu funkciju $f\colon \varphi(K) \to \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\int_{\varphi(K)} f = \int_K (f \circ \varphi)\, |\det D\varphi|\ . \tag{2}$$

Preslikavanje φ zovemo ***zamjenom varijabli*** ili ***transformacijom područja integracije***.

Uočimo, prije dokaza, da je prema teoremu o inverznom preslikavanju, φ difeomorfizam $\Omega \to \varphi(\Omega)$, specijalno i homeomorfizam. Nadalje, bez smanjenja općenitosti, možemo u daljnjem dokazu pretpostaviti da su skupovi Ω i $\varphi(\Omega)$ omeđeni. U protivnom odaberemo omeđene otvorene okoline Ω' oko K i Σ oko $\varphi(K)$ — takve okoline postoje zbog kompaktnosti skupova K i $\varphi(K)$ — pa gledamo restrikciju transformacije φ na skup $\Omega' \cap \varphi^{\leftarrow}(\Sigma)$.

Dokažimo najprije sljedeću lemu koja je i inače korisna.

Lema 20.2 *Uz uvjete Teorema* 20.1 *i pretpostavku da su skupovi Ω i $\varphi(\Omega)$ omeđeni, ako je skup $S \subseteq \Omega$ J-izmjeriv, onda je i skup $\varphi(S)$ J-izmjeriv, tj. ima površinu. Specijalno je skup $\varphi(K)$ J-izmjeriv.*

Dokaz: Prema karakterizaciji J-izmjerivih skupova, Korolar 17.5, je ∂S skup mjere nula. Međutim, kako je $\varphi\colon \Omega \to \varphi(\Omega)$ difeomorfizam, to je $\partial(\varphi(S)) = \varphi(\partial S)$, što je, prema Teoremu 16.6, ponovo skup mjere nula. Stoga je, opet po Korolaru 17.5, skup $\varphi(S)$ J-izmjeriv. ∎

Dokaz Teorema 20.1 provest ćemo u nekoliko koraka redukcijom na jednostavnije specijalne slučajeve.

Tvrdnja 1: Pretpostavimo da postoji konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ skupa K čiji su članovi U J-izmjerivi podskupovi od Ω takvi da za transformaciju φ i sve R-integrabilne funkcije $g\colon \varphi(U) \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\int_{\varphi(U)} g = \int_U (g \circ \varphi)\, |\det D\varphi| \tag{3}$$

za sve $U \in \mathcal{U}$. Tada Teorem 20.1 vrijedi i za transformaciju φ i sve R-integrabilne funkcije f na $\varphi(K)$.

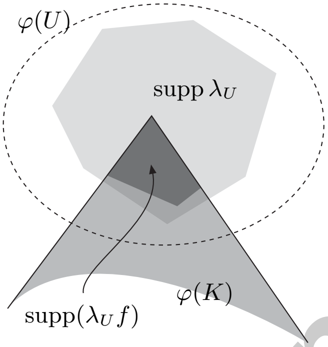
Dokaz: Prema teoremu o otvorenom preslikavanju, Teorem 12.2, su skupovi $\varphi(U)$, $U \in \mathcal{U}$, otvoreni i, prema Lemi 20.2, su J-izmjerivi. Neka je $\Lambda = \{\lambda_U\}$ particija jedinice podređena otvorenom pokrivaču $\{\varphi(U) : U \in \mathcal{U}\}$ skupa $\varphi(K)$.

Prema Teoremima 18.2 i 18.3(b), za proizvoljnu R-integrabilnu funkciju f na $\varphi(K)$ je funkcija $\lambda_U f$ R-integrabilna za svaku funkciju $\lambda_U \in \Lambda$, pa prema (3) vrijedi

$$\int_{\varphi(U)} \lambda_U f = \int_U ((\lambda_U f) \circ \varphi) \, |\det D\varphi| \, . \tag{4}$$

Kako izvan skupa $\varphi(U) \cap \varphi(K)$ vrijedi $\lambda_U f = \lambda_U \tilde{f} = 0$, to je, u skladu s Napomenom 18.2,

$$\int_{\varphi(U)} \lambda_U f = \int_{\varphi(U)\cap\varphi(K)} \lambda_U f = \int_{\varphi(K)} \lambda_U f \, .$$



Nadalje, zbog injektivnosti preslikavanja φ je $(\lambda_U f) \circ \varphi = 0$ izvan $U \cap K$, pa analognim zaključivanjem dobivamo

$$\int_U ((\lambda_U f) \circ \varphi) \, |\det D\varphi| = \int_K ((\lambda_U f) \circ \varphi) \, |\det D\varphi| \, .$$

Zbog toga (4) možemo zapisati u obliku

$$\int_{\varphi(K)} \lambda_U f = \int_K ((\lambda_U f) \circ \varphi) \, |\det D\varphi| \, .$$

Kako je $\sum\limits_{U\in\mathcal{U}} \lambda_U f = \big(\sum\limits_{U\in\mathcal{U}} \lambda_U\big) f = f$, i to je konačna suma, to je

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(K)} f &= \sum_{U\in\mathcal{U}} \int_{\varphi(K)} \lambda_U f = \sum_{U\in\mathcal{U}} \int_K ((\lambda_U f) \circ \varphi) \, |\det D\varphi| \\ &= \int_K \sum_{U\in\mathcal{U}} (\lambda_U \circ \varphi) \cdot (f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi| = \int_K (f \circ \varphi) \, |\det D\varphi| \, , \end{aligned}$$

jer je $\{\lambda_U \circ \varphi : U \in \mathcal{U}\}$ particija jedinice podređena pokrivaču $\mathcal{U}$ skupa K. $\square$

Tvrdnja 2: Ako za svaku točku $P \in K$ postoji pravokutnik $I \supseteq \mathring{I} \ni P$ takav da teorem vrijedi za transformaciju φ i svaku R-integrabilnu funkciju na $\varphi(I)$, onda teorem vrijedi i za transformaciju φ i svaku R-integrabilnu funkciju f na $\varphi(K)$.

Dokaz: Budući je K kompaktan, svaki se njegov otvoren pokrivač može reducirati na konačan potpokrivač, pa je, prema Tvrdnji 1, dovoljno oko svake točke skupa K naći okolinu takvu da teorem vrijedi za transformaciju φ i svaku R-integrabilnu funkciju na slici te okoline.

Neka je $P \in K$ proizvoljna točka a $I \supseteq \mathring{I} \ni P$ pravokutnik takav da teorem vrijedi za transformaciju φ i svaku R-integrabilnu funkciju na $\varphi(I)$. Neka je $f\colon \varphi(\mathring{I}) \to \mathbb{R}$ neka R-integrabilna funkcija, a $\overline{f}\colon \varphi(I) \to \mathbb{R}$ njeno proširenje nulom. Ako teorem vrijedi za funkciju $\overline{f}$ onda je

$$\int_{\varphi(\mathring{I})} f = \int_{\varphi(I)} \overline{f} = \int_I (\overline{f} \circ \varphi)|\det D\varphi| = \int_{\mathring{I}} (f \circ \varphi)|\det D\varphi|$$

jer su $\partial(\varphi(I))$ i $\partial(I)$ skupovi površine nula, pa teorem vrijedi i za transformaciju φ i R-integrabilnu funkciju $f\colon \varphi(\mathring{I}) \to \mathbb{R}$. □

Tvrdnja 3: Neka je $I \subseteq \Omega$ pravokutnik takav da za svaki pravokutnik $J \subseteq I$ teorem vrijedi za transformaciju φ i konstantnu funkciju $\mathbf{1}\colon \varphi(J) \to \mathbb{R}$. Tada teorem vrijedi i za transformaciju φ i svaku R-integrabilnu funkciju $f\colon \varphi(I) \to \mathbb{R}$.

Dokaz: Primijetimo najprije da, ako teorem vrijedi za konstantnu funkciju $\mathbf{1}$, onda, zbog linearnosti integrala, on vrijedi i za svaku konstantnu funkciju.

Neka je $\delta > 0$ i neka je $\rho = \{I_{ij}\}$ razdioba pravokutnika I takva da su za sve i, j dijametri skupova $\varphi(I_{ij})$ manji od δ. (Dovoljno je uzeti razdiobu ρ takvu da joj je očica manja od Lebesgueovog broja otvorenog pokrivača $\{\, \varphi^{-1}(K(Q, \frac{\delta}{2})) : Q \in \varphi(I) \,\}$ pravokutnika I.) Tada je $\sigma_\delta = \{\varphi(I_{ij})\}$ razdioba skupa $\varphi(I)$ čija je očica manja od δ. Neka je $f\colon \varphi(I) \to \mathbb{R}$ proizvoljna R-integrabilna funkcija na $\varphi(I)$. Označimo s $m_{ij} := \inf f(\varphi(I_{ij}))$, $M_{ij} := \sup f(\varphi(I_{ij}))$. Kako za svaki i, j teorem vrijedi za transformaciju φ i konstantnu funkciju $Q \mapsto m_{ij}$, $Q \in \varphi(I_{ij})$, to je

$$\begin{aligned} s(f, \sigma_\delta, \varphi(I)) &= \sum_{i,j} m_{ij}\, \pi(\varphi(I_{ij})) = \sum_{i,j} \int_{\varphi(I_{ij})} m_{ij} \\ &= \sum_{i,j} \int_{I_{ij}} m_{ij}\, |\det D\varphi| \le \sum_{i,j} \int_{I_{ij}} (f \circ \varphi)|\det D\varphi| \\ &= \int_I (f \circ \varphi)|\det D\varphi|\ . \end{aligned}$$

Stoga, prema Korolaru 18.12, vrijedi

$$\int_{\varphi(I)} f \leq \int_I (f \circ \varphi)|\det D\varphi| \; .$$

Analogno se, polazeći od gornjih suma $S(f, \sigma_\delta, \varphi(I))$, pokazuje obrnuta nejednakost, pa vrijedi

$$\int_{\varphi(I)} f = \int_I (f \circ \varphi)|\det D\varphi| \; . \qquad \square$$

Tvrdnja 4: Ako teorem vrijedi za transformacije $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ i $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{R}^2$, pri čemu je $\varphi(\Omega) \subseteq \Sigma$, i sve R-integrabilne realne funkcije na skupovima $\varphi(K)$ odnosno $\psi\big(\varphi(K)\big)$, onda on vrijedi i za kompoziciju $\psi \circ \varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ i sve R-integrabilne funkcije f na $\psi(\varphi(K))$.

Dokaz: Prema teoremu o diferencijalu kompozicije, za R-integrabilnu funkciju $f\colon \psi(\varphi(K)) \to \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned}
\int_{(\psi\circ\varphi)(K)} f = \int_{\psi(\varphi(K))} f &= \int_{\varphi(K)} (f \circ \psi)\,|\det D\psi| \\
&= \int_K \big((f \circ \psi) \circ \varphi\big)\big(|\det D\psi| \circ \varphi\big)|\det D\varphi| \\
&= \int_K f \circ (\psi \circ \varphi)\,|\det D(\psi \circ \varphi)| \; . \qquad \square
\end{aligned}$$

Napomena 20.1 Treću jednakost u prethodnom dokazu dobili smo primjenjujući pretpostavku da teorem vrijedi za transformaciju φ i *svaku* R-integrabilnu funkciju definiranu na skupu $\varphi(K)$. Da se uvjerimo da je funkcija $(f \circ \psi)\,|\det D\psi|$ zaista R-integrabilna na $\varphi(K)$, dovoljno je, zbog neprekidnosti, dakle i R-integrabilnosti, funkcije $|\det D\psi|$ i Teorema 18.3(b), dokazati R-integrabilnost funkcije $(f\circ\psi)$ na skupu $\varphi(K)$. Općenito, kompozicija R-integrabilne i neprekidne funkcije nije nužno R-integrabilna. Međutim, u našoj situaciji možemo zaključivati ovako: Neka je $D \subseteq \psi\big(\varphi(K)\big)$ skup točaka diskontinuiteta funkcije f, koji je, zbog R-integrabilnosti od f, mjere nula. Kako je ψ difeomorfizam, dakle i homeomorfizam, na nekoj okolini skupa $\varphi(K)$, to kompozicija $f\circ\psi$ nije neprekidna u točki $Q \in \varphi(K)$ ako i samo ako funkcija f nije neprekidna u točki $\psi(Q) \in \psi\big(\varphi(K)\big)$. Stoga je skup točaka diskontinuiteta funkcije $f \circ \psi$ jednak skupu $\psi^{-1}(D)$. Kako je ψ^{-1} diferencijabilna funkcija klase C^1, to je, prema Teoremu 16.6, i $\psi^{-1}(D)$ skup mjere nula, pa je, prema Lebesgueovoj karakterizaciji, Teorem 18.1, kompozicija $f \circ \psi$ R-integrabila na skupu $\varphi(K)$.

TVRDNJA 5: Teorem vrijedi za svaki linearni operator $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i sve R-integrabilne funkcije f na $\varphi(K)$.

Dokaz: Prema Tvrdnjama 2 i 3, dovoljno je pokazati da za svaki pravokutnik $I \subseteq \Omega$, teorem vrijedi za linearni operator φ i konstantnu funkciju $\mathbf{1}$ na $\varphi(I)$, tj. da je

$$\pi(\varphi(I)) = \int_{\varphi(I)} \mathbf{1} = \int_I |\det D\varphi| = |\det \varphi| \int_I \mathbf{1} = |\det \varphi|\, \pi(I)\ ,$$

jer je za linearan operator, $D\varphi(P) = \varphi$, za sve $P \in I$.

Kako je φ linearan operator, dovoljno je to dokazati za pravokutnik kome je jedan vrh u ishodištu. Neka je dakle $I = [0,a] \times [0,b]$, $a, b > 0$, tj. I je razapet vektorima ae_1 i be_2, gdje su e_1 i e_2 vektori standardne baze u $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Neka je u toj bazi operatoru φ pridružena matrica $\begin{bmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$. Tada je paralelogram $\varphi(I)$ razapet vektorima $\varphi(ae_1) = \alpha ae_1 + \gamma ae_2$ i $\varphi(be_2) = \beta be_1 + \delta be_2$, pa njegova površina iznosi $|\det\begin{bmatrix}\alpha a & \gamma a \\ \beta b & \delta b\end{bmatrix}| = ab\,|\det\varphi|\,.$ □

TVRDNJA 6: Neka je $P_0 \in K$ proizvoljna, ali fiksirana točka. Teorem je dovoljno dokazati uz dodatnu pretpostavku da je operator $D\varphi(P_0)$ identiteta E.

Dokaz: Označimo li s $A := D\varphi(P_0)$, tada je

$$D(A^{-1} \circ \varphi)(P_0) = A^{-1} \circ D\varphi(P_0) = E\ .$$

Kako prema Tvrdnji 5, teorem vrijedi za linearni operator A, to, ako vrijedi i za preslikavanje $A^{-1} \circ \varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$, onda, prema Tvrdnji 4, vrijedi i za transformaciju $\varphi = A \circ (A^{-1} \circ \varphi)$. □

Dokaz Teorema 20.1:

Prema Tvrdnjama 2 i 3, dovoljno je oko svake točke $P_0 = (x_0, y_0) \in K$ naći okolinu takvu da za svaki pravokutnik u toj okolini teorem vrijedi za transformaciju φ i konstantnu funkciju $\mathbf{1}$ na slici tog pravokutnika. Pri tome možemo, prema Tvrdnji 6, pretpostaviti da je $D\varphi(P_0) = E$ identiteta.

Preslikavanje $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ rastavit ćemo na kompoziciju dvaju preslikavanja ϑ i ψ koja će mijenjati samo po jednu koordinatu, pa ćemo na njih moći primijeniti (1), tj. teorem o supstituciji za integral funkcije jedne varijable.

Definirajmo $\vartheta\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ s

$$\vartheta(x,y) := \big(\varphi_1(x,y), y\big)\ . \tag{5}$$

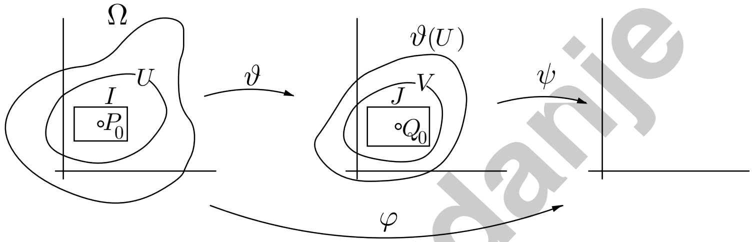
Kako je $D\varphi(P_0) = E$, zaključujemo da je

$$D\vartheta(P_0) = E \;, \tag{6}$$

pa, prema teoremu o inverznom preslikavanju, postoji okolina $U \subseteq \Omega$ točke P_0 na kojoj je ϑ difeomorfizam i $D\vartheta(P)$ je regularan za sve $P \in U$, tj. ϑ zadovoljava pretpostavke Teorema 20.1 na skupu U.

Definirajmo preslikavanje $\psi\colon \vartheta(U) \to \mathbb{R}^2$ s

$$\psi(u, v) := (u, \varphi_2(\vartheta^{-1}(u, v))) \;. \tag{7}$$



Tada je

$$\begin{aligned}\psi(\vartheta(x, y)) &= \psi(\varphi_1(x, y), y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(\vartheta^{-1}(\varphi_1(x, y), y)))\\ &\overset{(5)}{=} (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)) = \varphi(x, y)\end{aligned}$$

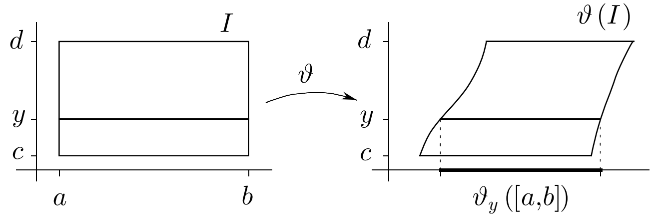
pa je zaista $\varphi = \psi \circ \vartheta$.

Pokažimo da i preslikavanje ψ zadovoljava pretpostavke Teorema 20.1 na nekoj okolini točke $\vartheta(P_0) =: Q_0$.

Iz definicije (7) vidimo da je ψ diferencijabilno preslikavanje. Za njegove parcijalne derivacije nalazimo $\partial_1\psi_1(Q_0) = 1$, $\partial_2\psi_1(Q_0) = 0$, a kako je $\psi_2 = \varphi_2\vartheta^{-1}$ i $D(\vartheta^{-1})(Q_0) = (D\vartheta(P_0))^{-1} = E^{-1} = E$, to vrijedi $D\psi_2(Q_0) = D\varphi_2(P_0) \circ D(\vartheta^{-1})(Q_0) = D\varphi_2(P_0)$, pa je $\partial_1\psi_2(Q_0) = 0$ i $\partial_2\psi_2(Q_0) = 1$, zbog $D\varphi(P_0) = E$. Stoga je $D\psi(Q_0) = E$, pa postoji otvorena okolina $V \subseteq \vartheta(U)$ oko Q_0 na kojoj je ψ difeomorfizam i $D\psi(Q)$ je regularan za $Q \in V$.

Neka je $I = [a, b] \times [c, d] \subseteq U$ proizvoljan pravokutnik. Za $y \in [c, d]$ označimo s $\vartheta_y\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ funkciju definiranu s

$$\vartheta_y(x) := \vartheta_1(x, y) \;.$$



Kako je preslikavanje ϑ injektivno na I, to se iz definicije od ϑ_y lako vidi da je ϑ_y injektivna funkcija. Za njenu derivaciju nalazimo

$$(\vartheta_y)'(x) = \partial_1\vartheta_1(x,y) = \begin{vmatrix} \partial_1\vartheta_1(x,y) & \partial_2\vartheta_1(x,y) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \det D\vartheta(x,y)\ . \qquad (8)$$

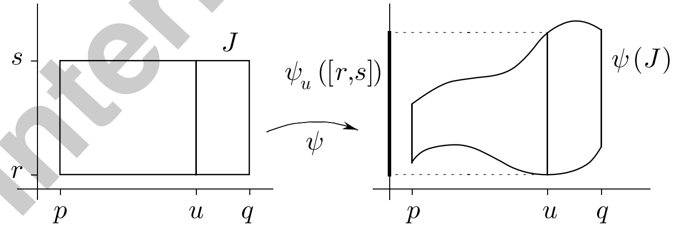
Sada, prema Fubinijevom teoremu i formuli (1), imamo

$$\begin{aligned} \int_{\vartheta(I)} 1 \;&=\; \int_c^d \Big(\int_{\vartheta_y([a,b])} 1\, du \Big)\, dv = \int_c^d \Big(\int_{[a,b]} |(\vartheta_y)'(x)|\, dx \Big)\, dy \\ &\overset{(8)}{=} \int_c^d \Big(\int_a^b |\det D\vartheta(x,y)|\, dx \Big)\, dy = \int_I |\det D\vartheta|\ . \end{aligned}$$

Dakle, za svaki pravokutnik $I \subseteq U$, teorem vrijedi za transformaciju ϑ i konstantnu funkciju $\mathbf{1}\colon \vartheta(I) \to \mathbb{R}$.

Slično postupamo i s funkcijom ψ. Neka je $J = [p,q] \times [r,s] \subseteq V$ proizvoljan pravokutnik, i neka je za $u \in [p,q]$, $\psi_u\colon [r,s] \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s

$$\psi_u(v) := \psi_2(u,v)\ .$$



Kao i ranije, zaključujemo da je funkcija ψ_u injektivna i vrijedi

$$(\psi_u)'(v) = \partial_2\psi_2(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \partial_1\psi_2(u,v) & \partial_2\psi_2(u,v) \end{vmatrix} = \det D\psi(u,v)\ . \qquad (9)$$

Stoga, prema Fubinijevom teoremu i formuli (1), vrijedi

$$\begin{aligned}\int_{\psi(J)} 1 &= \int_p^q \Big(\int_{\psi_u([r,s])} 1\, dz \Big)\, dw = \int_p^q \Big(\int_{[r,s]} |(\psi_u)'(v)|\, dv \Big)\, du \\ &\overset{(9)}{=} \int_p^q \Big(\int_r^s |\det D\psi(u,v)|\, dv \Big)\, du = \int_J |\det D\psi| \,,\end{aligned}$$

čime je pokazano da i za svaki pravokutnik $J \subseteq V$ teorem vrijedi za transformaciju ψ i konstantnu funkciju $\mathbf{1}\colon \psi(J) \to \mathbb{R}$.

Da završimo dokaz Teorema 20.1, zaključujemo ovako: Neka je $J \subseteq V$ neki pravokutnik oko točke Q_0, i neka je $I \subseteq \vartheta^{-1}(\operatorname{Int} J) \subseteq U$ neki pravokutnik oko točke P_0. Prema upravo dokazanom i Tvrdnji 3, teorem vrijedi za transformaciju ϑ i svaku R-integrabilnu funkciju na $\vartheta(I)$, i vrijedi za transformaciju ψ i svaku R-integrabilnu funkciju na $\psi(J)$. Stoga, prema Tvrdnji 4, teorem vrijedi i za kompoziciju $\varphi = \psi \circ \vartheta$ i svaku R-integrabilnu funkciju na $\varphi(I)$, čime je, prema Tvrdnji 2, teorem u potpunosti dokazan. ■

Napomena 20.2 Uvjet regularnosti diferencijala $D\varphi(P)$ za sve $P \in \Omega$ može se izostaviti. Naime, poznati Sardov[1] teorem, kojeg mi nećemo dokazivati, pokazuje da je uz ostale uvjete Teorema 20.1, slika skupa točaka u kojima $D\varphi(P)$ nije regularan, skup površine nula, stoga on ne utječe na jednakost (2).

§ 21 Višestruki integrali

Integral funkcije više varijabli definira se sasvim analogno kao u slučaju dvije varijable, pa ćemo ovdje samo ukratko navesti osnovne definicije, oznake i teoreme.

Promatraju se omeđene realne funkcije $f\colon I \to \mathbb{R}$ definirane na nekom n-***pravokutniku*** $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$. ***Razdioba*** $\rho = (\rho_{x_1}, \ldots, \rho_{x_n})$ n-pravokutnika I je uređena n-torka razdiobi

$$\rho_{x_i} = \{a_i = x_i^0 < x_i^1 < \cdots < x_i^{k_i} = b_i\}$$

segmenata $[a_i, b_i]$. Za multiindeks $\boldsymbol{j} := (j_1, \ldots, j_n)$ pripadni n-pravokutnik označavamo s $I_{\boldsymbol{j}} = [\, x_1^{j_1-1}, x_1^{j_1}\,] \times \cdots \times [\, x_n^{j_n-1}, x_n^{j_n}\,]$. Definiraju se brojevi

$$m_{\boldsymbol{j}} := \inf f(I_{\boldsymbol{j}}) \quad \text{i} \quad M_{\boldsymbol{j}} := \sup f(I_{\boldsymbol{j}}),$$

[1] Arthur Sard (1909–1980), američki matematičar

te ***donje*** i ***gornje Darbouxove sume***

$$s(f,\rho) := \sum_{\boldsymbol{j}} m_{\boldsymbol{j}} v(I_{\boldsymbol{j}}) \text{ i } S(f,\rho) := \sum_{\boldsymbol{j}} M_{\boldsymbol{j}} v(I_{\boldsymbol{j}})$$

funkcije f obzirom na razdiobu ρ, gdje je $v(I_{\boldsymbol{j}}) := (x_1^{j_1} - x_1^{j_1 - 1}) \cdots (x_n^{j_n} - x_n^{j_n - 1})$ ***volumen*** n-pravokutnika $I_{\boldsymbol{j}}$. ***Donji*** i ***gornji Riemannov integral*** funkcije f definira se kao

$$\underline{\int} f := \sup\{s(f,\rho) : \rho \in \rho(I)\}\,, \quad \overline{\int} f := \inf\{S(f,\rho) : \rho \in \rho(I)\}\,.$$

Za funkciju f kaže se da je R-***integrabilna*** ako je $\underline{\int} f = \overline{\int} f$, i ta se zajednička vrijednost označava s $\int_I f$ i zove ***Riemannov integral*** funkcije f ***na*** n***-pravokutniku*** I.

Za integral $\int_I f$ koriste se i oznake $\int_I f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$ i $\iint \!\ldots\! \int_I f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$, kao i oznake $\int_I f\, dv$, $\int_I f(x_1, \ldots, x_n)\, dv$, i $\iint \!\ldots\! \int_I f(x_1, \ldots, x_n)\, dv$, a govori se i o ***višestrukom*** ili n***-strukom integralu***.

Dokazuje se ***Lebesgueova karakterizacija R-integrabilnosti***: omeđena funkcija $f \colon I \to \mathbb{R}$ je R-integrabilna ako i samo ako je skup D točaka diskontinuiteta od f ***skup*** (Lebesgueove) ***mjere nula***, tj. takav skup da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji niz n-pravokutnika I_i, $i \in \mathbb{N}$, da vrijedi $D \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ i $\sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) < \varepsilon$.

Za omeđen skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kaže se da ***ima volumen***, ili da je ***J-izmjeriv*** ako je njegova karakteristična funkcija $\chi_{_S} \colon I \to \mathbb{R}$ R-integrabilna za neki (a onda i za svaki) n-pravokutnik I koji sadrži S. U tom slučaju se broj $\int_I \chi_{_S} =: v(S)$ zove ***volumen*** ili ***Jordanova mjera*** skupa S. Kao posljedica Lebesgueove karakterizacije R-integrabilnosti, skup S je J-izmjeriv ako i samo ako je njegov rub ∂S skup mjere nula. Kako je za omeđen skup S, ∂S omeđen i zatvoren, dakle kompaktan, ∂S je skup mjere nula ako i samo ako ima volumen nula. Pokazuje se da familija J-izmjerivih skupova čini prsten skupova.

Za omeđenu funkciju $f \colon S \to \mathbb{R}$ kažemo da je R-***integrabilna*** na J-izmjerivom skupu S, ako je produkt $f\chi_{_S} \colon I \to \mathbb{R}$ R-integrabilna funkcija za neki

n-pravokutnik $I \supseteq S$, i definiramo $\displaystyle\int_S f := \int_I f\chi_{_S}$. Pritom, pod navedenim produktom, zapravo, podrazumijevamo funkciju $\tilde{f}\colon I \to \mathbb{R}$ koja nulom proširuje f na čitav I. Sve neprekidne (dovoljno je da su neprekidne skoro svuda) funkcije na J-izmjerivom skupu su R-integrabilne.

Pokazuje se da je Riemannov integral $\displaystyle\int_S\colon R(S) \to \mathbb{R}$ monoton linearan funkcional na algebri $R(S)$ svih R-integrabilnih funkcija na J-izmjerivom skupu S. Nadalje, ako je $S = \bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i$ rastav skupa S na konačno mnogo J-izmjerivih skupova $S_1, \dots, S_k$, tako da su za $i \neq j$ presjeci $S_i \cap S_j$ skupovi volumena nula, onda je funkcija $f\colon S \to \mathbb{R}$ R-integrabilna na S ako i samo ako je R-integrabilna na svim skupovima S_i, $i = 1, \dots, k$, i u tom slučaju vrijedi $\displaystyle\int_S f = \sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} f.$

Kao i u slučaju dvostrukog integrala, vrijedi ***Teorem srednje vrijednosti***: Ako je $f\colon S \to \mathbb{R}$ neprekidna omeđena funkcija na povezanom J-izmjerivom skupu S, onda postoji točka $P_0 \in S$ takva da je $\int_S f = f(P_0)\, v(S)$.

Fubinijev teorem o svođenju višestrukog integrala na uzastopne jednostruke integrale, samo je naizgled složeniji nego u slučaju funkcija dviju varijabli. On pokazuje da ako je $f\colon I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \to \mathbb{R}$ funkcija koja je neprekidna osim eventualno na skupu D koji ima n-dimenzionalnu mjeru nula i presjek sa svakom hiperravninom $\mathbb{R}^{i-1} \times \{x_i\} \times \mathbb{R}^{n-i}$, $x_i \in [a_i, b_i]$, ima $(n-1)$-dimenzionalnu mjeru nula, onda je, uz oznaku

$$J_i := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \ldots \times [a_n, b_n],$$

funkcija

$$x_i \mapsto \int_{J_i} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n$$

R-integrabilna na $[a_i, b_i]$ i vrijedi

$$\int_I f = \int_{a_i}^{b_i} \Big(\int_{J_i} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n \Big)\, dx_i \ .$$

Ako je, naprimjer, funkcija f neprekidna, onda se odavde, indukcijom, dobije

$$\int_I f = \int_{a_{\sigma(1)}}^{b_{\sigma(1)}} \Big(\int_{a_{\sigma(2)}}^{b_{\sigma(2)}} \Big(\ldots \int_{a_{\sigma(n)}}^{b_{\sigma(n)}} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_{\sigma(n)} \ldots \Big)\, dx_{\sigma(2)} \Big)\, dx_{\sigma(1)}$$

sa svaku permutaciju σ skupa $\{1, 2, \dots, n\}$.

Teorem o zamjeni varijabli u višestrukom integralu isti je kao za funkcije dvije varijable: ako je $\varphi\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ injektivno diferencijabilno preslikavanje klase C^1 takvo da je diferencijal $D\varphi(P)$ regularan za sve $P \in \Omega$, onda za svaki kompaktan J-izmjeriv skup $K \subseteq \Omega$ i svaku R-integrabilnu funkciju $f\colon \varphi(K) \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\int_{\varphi(K)} f = \int_K (f \circ \varphi)\, |\det D\varphi| \ .$$

Dokaz ovog teorema se provodi na isti način kao dokaz Teorema 20.1, jedino sada, preslikavanja ϑ i ψ, definirana formulama (5) i (7), mijenjaju $n-1$ varijabli, pa je potrebno primijeniti indukciju, u kojoj se koristi istinitost teorema u dimenziji $n-1$. Također je, u Tvrdnji 5, iz linearne algebre potrebno znati da je za paralelepiped $L \subseteq \mathbb{R}^n$ i linearan operator $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, volumen slike jednak $v\big(A(L)\big) = |\det A|\, v(L)$.

Zadaci

1. Pokažite da funkcija φ na $\mathbb{R}$ dana formulom $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t) dt$ zadovoljava tzv. ***Besselovu***[1] ***diferencijalnu jednadžbu***
$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0 \ .$$

2. Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1 te neka je $F(x) = \displaystyle\int_0^x (x+y) f(y)\, dy$, $x > 0$. Dokažite da postoji i izračunajte $F''(x)$ za $x > 0$.

Pitanje neprekidnosti i diferencijabilnosti funkcija definiranih integralom možemo razmatrati i u slučaju kad je taj integral nepravi. Ovdje ćemo generalizirati rezultate analogne Teoremu 19.5 i Teoremu 19.8 za funkcije oblika $F(y) = \displaystyle\int_a^\infty f(x,y)\, dx$. Neka je zadana funkcija $f\colon [a, \infty\rangle \to \mathbb{R}$. ***Nepravi integral*** $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\, dx$ definira se kao $\displaystyle\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx$ pod uvjetom da je f integrabilna na segmentu $[a, b]$, za sve $b > a$, te da ovaj limes postoji. U ovom

[1] Friedrich Wilhelm Bessel (1784–846), njemački astronom

slučaju još kažemo da ***nepravi integral*** $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ***konvergira***. Pokazuje se da je to ekvivalentno sljedećem uvjetu: f je integrabilna na $[a,b]$, $\forall b>a$ i

$$(\forall \varepsilon>0)\ (\exists a_0>a) \text{ tako da je } \left|\int_b^c f(x)\,dx\right|<\varepsilon,\ \forall\ c>b>a_0.$$

Pretpostavimo sada da imamo funkciju $f\colon [a,\infty\rangle\times S\to\mathbb{R}$ pri čemu je S proizvoljan skup. Ovdje možemo promatrati konvergenciju integrala $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ za svaki $y\in S$. U ovoj situaciji ima smisla sljedeća

Definicija Kažemo da ***nepravi integral*** $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ ***konvergira uniformno*** na S ukoliko taj integral konvergira $\forall y\in S$ te vrijedi

$$\lim_{b\to\infty}\Big(\sup_{y\in S}\Big|\int_b^\infty f(x,y)\,dx\Big|\Big)=0.$$

Tvrdnje naredna dva zadatka predstavljaju važne kriterije za utvrđivanje uniformne konvergencije nepravih integrala.

3. Dokažite sljedeći teorem: Pretpostavimo da $\int_a^b f(x,y)\,dx$ postoji $\forall b>a$ i $\forall y\in S$. Tada nepravi integral $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ konvergira uniformno na S ako i samo ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon>0)\ (\exists a_0>a) \text{ tako da je } \sup_{y\in S}\Big|\int_b^c f(x,y)\,dx\Big|<\varepsilon,\ \forall\ c>b\geq a_0.$$

4. Dokažite ***Weierstrassov M-test***: Pretpostavimo da $\int_a^b f(x,y)\,dx$ postoji $\forall b>a$. Ako postoji funkcija M na $[a,\infty\rangle$ takva da je $|f(x,y)|\leq M(x)$, $\forall x\in[a,\infty\rangle$, $\forall y\in S$, i da nepravi integral $\int_a^\infty M(x)\,dx$ konvergira, onda $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ konvergira (apsolutno i) uniformno na S.

5. Dokažite da integral $\int_0^\infty e^{-\frac{x}{y}}\,dx$ konvergira uniformno na $\langle 0,t]$, $t>0$, ali ne konvergira uniformno na $\langle 0,\infty\rangle$.

6. Dokažite da integral $\displaystyle\int_3^\infty \frac{\cos x}{x+\sin y}\,dx$ konvergira uniformno na $\mathbb{R}$.

Sada možemo izreći i dokazati željene teoreme o deriviranju pod znakom nepravog integrala. Promatrat ćemo neprekidnu funkciju $f\colon [a,\infty\rangle \times [c,d] \to \mathbb{R}$.

7. Neka je $f\colon [a,\infty\rangle \times [c,d] \to \mathbb{R}$ neprekidna realna funkcija takva da integral $\displaystyle\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ konvergira uniformno na $[c,d]$. Tada je funkcija $F(y) := \displaystyle\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ neprekidna na $[c,d]$. (Uputa: uočite da niz funkcija $F_n(y) = \displaystyle\int_a^{a+n} f(x,y)\,dx$ uniformno konvergira k F.)

8. Neka je funkcija $f\colon [a,\infty\rangle \times [c,d]$ neprekidna, te neka vrijedi:

   (a) postoji $y \in [c,d]$ takav da nepravi integral $\displaystyle\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ konvergira,

   (b) $\partial_2 f(x,y)$ postoji i neprekidna je na $[a,\infty\rangle \times [c,d]$,

   (c) $\displaystyle\int_a^\infty \partial_2 f(x,y)\,dx$ konvergira uniformno na $[c,d]$.

   Tada nepravi integral $\displaystyle\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ postoji i konvergira uniformno na $[c,d]$, a funkcija $F(y) := \displaystyle\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ je derivabilna na $[c,d]$ te vrijedi $F'(y) = \displaystyle\int_a^\infty \partial_2 f(x,y)\,dx$, $\forall y \in [c,d]$.

9. Neka je $F(y) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\frac{e^{xy}+e^{-xy}}{2}\,dx$, $y \in [-c,c]$. Izračunajte $F'(y)$ i na temelju toga odredite F eksplicitno. (Uputa: $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; vidite zadatak 26.)

10. Neka je $0 < c < d$. Izračunajte derivaciju funkcije F zadane na $[c,d]$ s $F(y) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-xy}\tfrac{\sin x}{x}dx$. Možete li funkciju F odrediti eksplicitno?

11. Izračunajte $\displaystyle\int_0^a \Big(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-y^2}dy\Big)dx$ zamijenivši prethodno poredak integracije.

12. Izračunajte $\int_1^2 \Big(\int_0^{\ln x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}\, dy\Big) dx$ zamijenivši prethodno poredak integracije.

U narednim zadacima koristit ćemo Teorem 20.1 o zamjeni varijabli (i njegov analogon za integrale u $\mathbb{R}^3$). U tu svrhu uvest ćemo neke standardne zamjene varijabli.

(A) **Polarne koordinate u ravnini** dane su formulom $(x,y) = \Phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $r \geq 0$, $\varphi \in [0,2\pi]$. Funkcija Φ pravokutnik $[0,a] \times [0,2\pi]$ u $r\varphi$-ravnini preslikava na krug $\overline{K(0,a)}$ u xy-ravnini (i dijelove toga pravokutnika $[0,a] \times [\varphi_1, \varphi_2]$ $(0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi)$ na odgovarajuće kružne isječke.

(B) **Eliptične koordinate u ravnini** definirane su formulom

$$(x,y) = \Phi(r,\varphi) = (ar\cos\varphi, br\sin\varphi),\ r \in [0,1],\ \varphi \in [0,2\pi]\,.$$

Ova zamjena varijabli pravokutnik $[0,1] \times [0,2\pi]$ preslikava na elipsu s poluosima a i b. Uočimo da za $a = b$ dobivamo polarne koordinate.

(C) **Cilindrične koordinate u prostoru** definirane su pomoću formule

$$(x,y,z) = \Phi(r,\varphi,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,.$$

Ovdje je smisao da u xy-ravnini prijeđemo na polarne koordinate, dok aplikatu z ostavljamo nepromijenjenu. Analogno se definiraju i eliptičke cilindrične koordinate.

(D) **Sferne koordinate u prostoru** definirane su formulom

$$(x,y,z) = \Phi(r,\varphi,\psi) = (r\cos\psi\cos\varphi, r\cos\psi\sin\varphi, r\sin\psi),$$

gdje je $r \geq 0$, $\varphi \in [0,2\pi]$, $\psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Sferne koordinate predstavljaju trodimenzionalnu generalizaciju polarnih koordinata. Geometrijsko značenje novih varijabli je sljedeće: Za zadanu točku $P = (x,y,z)$ r predstavlja njezinu udaljenost od ishodišta, φ je kut koji ortogonalna projekcija radijvektora točke P na xy-ravninu zatvara s pozitivnim dijelom x-osi, a ψ je kut koji radijvektor točke P zatvara sa z-osi (računajući taj kut pozitivnim (negativnim) ako je $z > 0$ $(z < 0)$).

13. Za sve gore navedene zamjene varijabli izračunajte Jacobijan funkcije φ u proizvoljnoj točki njezine domene.

14. Koristeći polarne koordinate izračunajte površinu kruga radijusa a.

15. Koristeći polarne koordinate izračunajte $\int_D \ln(x^2+y^2)dx\,dy$ pri čemu je $D=\{(x,y) : x,y \geq 0,\ a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2\},\ a,b>0$.

16. Izračunajte $\int_D \sqrt{x^2+y^2}dx\,dy$ prelaskom na polarne koordinate ako je $D=[0,1]\times[0,1]$.

17. Izračunajte $\int_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dx\,dy$ ako je $D=\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.

18. Izračunajte površinu skupa D omeđenog krivuljama $x^2=y$, $x^2=2y$, $y^2=x$, $y^2=2x$. (Uputa: uvedite nove varijable pogodne za opis skupa D).

19. Izračunajte $\int_D (x^2+y^2)dx\,dy$ ako je D dio ravnine omeđen krivuljama $x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=4$, $xy=1$, $xy=3$.

Sljedeći zadaci odnose se na integraciju u $\mathbb{R}^3$. Pritom ćemo prešutno koristiti definicije i rezultate analogne onima u dvije dimenzije dokazanim u ovom poglavlju. Posebno, volumen omeđenog skupa $S \subset \mathbb{R}^3$ definira se analogno površini podskupova od $\mathbb{R}^2$ (vidite Definiciju 16.1).

20. Koristeći sferne koordinate izračunajte volumen kugle radijusa a.

21. Izračunajte $\int_0^2 \Big(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \Big(\int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz\Big)dy\Big)dx$. (Uputa: prijeđite na cilindrične koordinate.)

22. Izračunajte volumen tijela koje se nalazi izvan stošca $z^2=x^2+y^2$, a unutar sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$.

23. Izračunajte volumen tijela koje se nalazi izvan paraboloida $3z=x^2+y^2$, a unutar sfere $x^2+y^2+z^2=4$.

U narednim zadacima bavit ćemo se nepravim integralima u $\mathbb{R}^2$. Pritom ćemo istodobno provesti diskusiju za oba tipična slučaja nepravog integrala $\int_A f$: (i) A nije omeđen, (ii) f ima prekid na A.

Definicija *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Za rastući niz J-izmjerivih skupova $C_n \subseteq A$ kažemo da* **iscrpljuje** *skup A ako vrijedi*

$$(\forall r > 0) \quad \lim_n \pi((A \cap K(0,r)) \setminus C_n) = 0. \tag{1}$$

Naprimjer, ako je $A = \mathbb{R}^2$, za niz koji će iscrpljivati A možemo uzeti kugle $C_n = K(0,n)$ ili kvadrate $C_n = [-n,n] \times [-n,n]$. Ako je A J-izmjeriv skup i $P \in \overline{A}$ za niz J-izmjerivih skupova koji iscrpljuje A možemo odabrati $C_n = A \setminus K(P, \frac{1}{n})$.

Može se pokazati (ovdje to nećemo dokazivati) da uvjet (1) iz gornje definicije osigurava da je za svaki $r > 0$ skup $A \cap K(0,r)$ J-izmjeriv.

Uvedimo još sljedeću oznaku: za zadani skup A i funkciju $f\colon A \to \mathbb{R}$ neka je $R_A(f)$ familija svih J-izmjerivih podskupova $C \subseteq A$ takvih da je funkcija f omeđena i R-integrabilna na C.

Definicija *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^2$ i $f\colon A \to \mathbb{R}$. Pretpostavimo da postoji rastući niz J-izmjerivih skupova $C_n \in R_A(f)$ koji iscrpljuje A i konstanta K za koju vrijedi*

$$\int_C |f| \leq K, \ \forall C \in R_A(f). \tag{2}$$

Nepravi integral funkcije f na A definira se kao

$$\int_A f := \lim_n \int_{C_n} f. \tag{3}$$

U ovom slučaju još kažemo da nepravi integral $\int_a f$ konvergira. Ukoliko ne postoji niz $C_n \in R_A(f)$ koji iscrpljuje A ili pak ne postoji konstanta K takva da vrijedi relacija (2) *kažemo da ovaj nepravi integral divergira.*

U Zadatku 24 pokazat ćemo (uz pretpostavke o egzistenciji niza $C_n \in R_A(f)$ koji iscrpljuje A i konstante K) da limes iz gornje definicije zaista postoji te da je neovisan o izboru takvog niza.

Napomenimo još da na ovaj način nepravi integral funkcije f na A možemo promatrati i u slučaju kad je skup A J-izmjeriv, a funkcija f R-integrabilna na A. No tada nije teško pokazati da gore definirani nepravi integral od f na A postoji i da je jednak Riemannovom integralu $\int_A f$.

24. Dokažite da, uz uvjete iz definicije nepravog integrala, limes u jednakosti (2) postoji, te da je neovisan o izboru niza $C_n \in R_A(f)$ koji iscrpljuje A.

25. Izračunajte $\int_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$ ako je D prvi kvadrant u xy-ravnini.

26. Koristeći prethodni zadatak dokažite da je $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

27. Ispitajte konvergenciju integrala $\int_D \frac{1}{x-y}\,dx\,dy$ gdje je $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$.

Rješenja zadataka

POGLAVLJE 1

1. $\|P+Q\|^2 = (P+Q|P+Q) = \|P\|^2 + 2(P|Q) + \|Q\|^2$,
   $\|P-Q\|^2 = (P-Q|P-Q) = \|P\|^2 - 2(P|Q) + \|Q\|^2$.
   Preostaje zbrojiti navedene relacije. Primijetite da isti dokaz ujedno pokazuje da svaka norma izvedena iz skalarnog produkta zadovoljava relaciju paralelograma.

2. Neka je $P, Q \in \mathbb{R}^n$; koristeći relaciju trokuta dobivamo $\|P\| = \|P-Q+Q\| \le \|P-Q\| + \|Q\| \Rightarrow \|P\| - \|Q\| \le \|P-Q\|$ i analogno $\|Q\| - \|P\| \le \|P-Q\|$. Slijedi $|\|P\| - \|Q\|| \le \|P-Q\|$, a to pokazuje da je uvjet iz definicije neprekidnosti ispunjen uzmemo li za proizvoljni $\varepsilon > 0,\ \ \delta = \varepsilon$. Kako izbor broja δ ne ovisi o točki norma je i uniformno neprekidna na $\mathbb{R}^n$.

3. Za $x = 0$ imamo $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = -1$; za $y = kx,\ k \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-k^2)x^2}{(1+k^2)x^2} = \dfrac{1-k^2}{1+k^2}$. Ovo pokazuje, jer dobiveni rezultat ovisi o izboru broja k, da $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ne može postojati.

4. Za $x = 0$ očito je $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0$; za $y = kx,\ k \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{kx^3}{x^4 + k^2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{k}{x + k^2/x} = 0$. Stavimo li, međutim, $y = x^2$ dobi-

vamo $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{2x^4} = \dfrac{1}{2}$. Ovo pokazuje da $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ne postoji i zato f ima prekid u $(0,0)$.

5. Ne.

6. Oba uzastopna limesa su očigledno 0 pa zbog $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{x^4} = 1$ ne može postojati $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

7. Očito $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ ne postoje; s druge strane je $0 \leq |f(x,y)| = |(x+y)||\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}| \leq |x| + |y|$ iz čega slijedi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

8. Za $\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0$ tako da $\|(x,y)\| < \delta \Rightarrow |g(x,y)| < \varepsilon$. Kako je zbog $2|xy| < x^2 + y^2$ to je $|\frac{xy}{x^2+y^2}| < \frac{1}{2}$ pa imamo $\|(x,y)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y)| = |g(x,y)|\frac{|xy|}{x^2+y^2} < \frac{1}{2}\delta < \delta$, zato je f neprekidna u $(0,0)$.

9. Kako je $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^2} = 0$, jedina mogućnost za definirati f u točki $(0,0)$ tako da f (eventualno) bude neprekidna u $(0,0)$ je 0. Sada imamo $0 \leq |f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| = |\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}| = |x\dfrac{x^2}{x^2+y^2} - y\dfrac{y^2}{x^2+y^2}| \leq |x| + |y|$, što pokazuje da je f zaista neprekidna u $(0,0)$ stavimo li $f(0,0) = 0$. U ostalim točkama neprekidnost je očita.

   Drugi način: Koristeći polarne koordinate imamo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$

   $\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^3(\cos^3\varphi - \sin^3\varphi)}{r^2} = 0.$

10. Treba dokazati da je f i homogena funkcija. Fiksirajmo $x \in \mathbb{R}^n$. Iz $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ dobivamo najprije $f(0) = 0$ stavimo li $x = y = 0$. Jednakost $f(nx) = nf(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ dokazujemo indukcijom:

    Baza indukcije je trivijalna, a iz pretpostavke da tvrdnja vrijedi za $n \in \mathbb{N}$ imamo $f((n+1)x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$. Odavde sada slijedi i relacija $f(zx) = zf(x)$ za svaki negativni cijeli broj z (jer iz aditivnosti funkcije f i činjenice $f(0) = 0$, imamo $f(-y) = -f(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$). Neka je $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $nf(rx) = f(mx) = mf(x) \Rightarrow f(rx) = rf(x)$. Preostaje dokazati $f(tx) = tf(x)$ za proizvoljan iracionalan broj t. Stavimo $t = \lim\limits_{k} r_k$; $r_k \in \mathbb{Q}$. Odavde je $tx =$

$\lim_k r_k x$ i zbog neprekidnosti funkcije f slijedi $f(tx) = \lim_k f(r_k x)$. Prema prethodnom je $f(r_k x) = r_k f(x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$; dakle $f(tx) = \lim_k r_k f(x) = tx$.

11. Neka je $(x_k, f(x_k))$ niz točaka u $\Gamma(f)$ i neka je $(x_0, y_0) = \lim_k (x_k, f(x_k))$. Posebno, $x_0 = \lim_k x_k$ a zbog neprekidnosti funkcije f je $f(x_0) = \lim_k f(x_k)$. Zbog jedinstvenosti limesa je $y_0 = f(x_0)$, tj. $(x_0, y_0) \in \Gamma(f)$; dakle skup $\Gamma(f)$ je zatvoren.

    Neka su $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \in \Gamma(f)$, $x_1 < x_2$. Preslikavanje $\varphi\colon [0,1] \to \Gamma(f)$, $\varphi(t) = (x_1 + t(x_2 - x_1), f(x_1 + t(x_2 - x_1)))$ predstavlja put u $\Gamma(f)$ koji spaja zadane točke i zato je skup $\Gamma(f)$ povezan. Općenito, međutim, to ne možemo postići poligonalnom linijom (to je moguće jedino u slučaju kad je f po dijelovima linearna funkcija.)

12. Dokažimo jedinu netrivijalnu tvrdnju: $K \subseteq \mathbb{R}$ je povezan $\Rightarrow$ K je konveksan.
    Uzmimo $x_1, x_2 \in K$, $x_1 < x_2$ i pretpostavimo da postoji $t \in \langle 0, 1\rangle$ takav da $x = x_1 + t(x_2 - x_1) \notin K$. No tada su skupovi $V_1 = K \cap \langle -\infty, x\rangle$, $V_2 = K \cap \langle x, +\infty\rangle$ neprazni, disjunktni i otvoreni u K te vrijedi $K = V_1 \cup V_2$. To je kontradikcija s povezanošću skupa K.

13. Na temelju prethodnog zadatka pokazuje se da je svaki povezan skup $K \subseteq \mathbb{R}$ jednog od sljedećih oblika:

    $$\emptyset, \{a\}, \langle a, b\rangle, \langle a, b], [a, b\rangle, [a, b], \langle -\infty, a\rangle, \langle -\infty, a], \langle a, +\infty\rangle, [a, +\infty\rangle, \mathbb{R}.$$

14. Pretpostavimo da je $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neprekidna injekcija. Tada je i skup $f(\mathbb{R}^2)$ povezan (dokažite!). Neka je t_0 unutrašnja točka skupa $f(\mathbb{R}^2)$ i $P_0 \in \mathbb{R}^2$ odabrana tako da vrijedi $f(P_0) = t_0$. Skup $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_0\}$ je još uvijek povezan, morao bi zato i $f(\mathbb{R}^2 \setminus \{P_0\}) = f(\mathbb{R}^2) \setminus \{t_0\}$ biti povezan, no to je nemoguće (usporedite s prethodnim zadatkom).

15. Ograničenost je očigledna. Dokažimo zatvorenost: neka je (P_k) niz u S i $P_0 = \lim_k P_k$. Zbog neprekidnosti norme sada je $\|P_0\| = \lim_k \|P_k\| = 1 \Rightarrow P_0 \in S$.

16. Pretpostavimo da skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ima navedeno svojstvo. Kako $\|\ \|$ kao neprekidna funkcija dostiže svoj maksimum na K to je K očito ograničen. Uzmimo sada niz (P_k) u K i pretpostavimo $P_0 = \lim_k P_k$. Funkcija $f(P) =$

$\|P-P_0\|$ je neprekidna, a zbog $\|P_k-P_0\| \to 0$ vrijedi $\min\limits_{P\in K} f(P)=0$. Postoji dakle $Q_0 \in K$ sa svojstvom $f(Q_0)=0$. To znači $\|Q_0-P_0\|=0$, tj. $Q_0=P_0$ i konačno, $P_0 \in K$.

17. Da! Dokažite i analognu tvrdnju s minimumom!

18. Pretpostavimo suprotno: $P_0 \neq \lim\limits_k P_k$. To znači: $(\exists \varepsilon > 0)$ $(\forall k_0 \in \mathbb{N})$ $(\exists k > k_0)$ tako da je $\|P_k-P_0\| \geq \varepsilon$. Ovo omogućuje induktivnu konstrukciju podniza P_{k_r} koji se čitav nalazi u $K \setminus K(P_0,\varepsilon)$. Zbog kompaktnosti skupa K ovaj podniz ima bar jedno gomilište Q_0, a iz konstrukcije vidimo da je $Q_0 \neq P_0$. No Q_0 je i gomilište polaznog niza. Kontradikcija.

19. Lako se provjerava da zadana familija otvorenih skupova u $\mathbb{N}^\infty$ zadovoljava aksiome topološkog prostora, također je očito da je prostor $\mathbb{N}^\infty$ kompaktan (tj. ima svojstvo iz Teorema 5.7).

    Uzmimo sada neprekidnu funkciju $f\colon \mathbb{N}^\infty \to \mathbb{R}$ i promotrimo neprekidnost u točki ∞ (u točkama skupa $\mathbb{N}$ neprekidnost je ionako trivijalna): $\forall\varepsilon > 0$ postoji otvoren skup $V \subset \mathbb{N}^\infty$ takav da je $\infty \in V$ i $n \in V \Rightarrow |f(n)-f(\infty)| < \varepsilon$. Kako je $\infty \in V$ po definiciji je skup $\mathbb{N}^\infty \setminus V$ konačan; neka je $n_0 = \max(\mathbb{N}^\infty \setminus V)$. No tada $n > n_0 \Rightarrow n \in V$ i zato je $|f(n)-f(\infty)| < \varepsilon$ što upravo znači da niz $f(n)$ konvergira k točki $f(\infty)$.

21. Prema prethodnom zadatku funkcija $d(P,K)$ je neprekidna pa dostiže svoj minimum na kompaktnom skupu K.

22. Pretpostavimo da vrijedi $d(A,B)=0$. Zbog kompaktnosti skupa A $\exists a_0 \in A$ tako da vrijedi $0=d(A,B)=d(a_0,B)=\inf\{\|a_0-b\| : b \in B\}$. Odavde vidimo da $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists b_k \in B$ tako da vrijedi $\|a_0-b_k\| < \frac{1}{k} \Rightarrow a_0 = \lim\limits_k b_k$ a zbog zatvorenosti skupa B tada je $a_0 \in B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$. Kontradikcija.

    Uočimo npr. skupove $A=\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ i $B=\{(x,e^x) : x \in \mathbb{R}\}$. To su disjunktni zatvoreni skupovi, ali je ipak $d(A,B)=0$. Provjerite!

23. Zadani niz konvergira po točkama k funkciji $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ definiranoj s $f(t) = \begin{cases} 0 & za \quad t<1 \\ 1 & za \quad t=1 \end{cases}$. Kako je uniformni limes niza neprekidnih funkcija također neprekidna funkcija (Teorem 4.16 i Napomena 4.3) vidimo da naša konvergencija ne može biti uniformna.

26. Neka vrijedi $m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|,\ \forall x \in X$, neka su d, d' inducirane metrike na X. Uzmimo kuglu $K_{d'}(x_0, r)$; tvrdimo da je tada $K_d(x_0, \frac{r}{M}) \subseteq K_{d'}(x_0, r)$. Naime, za $x \in K_d(x_0, \frac{r}{M})$ imamo $\|x - x_0\|' \leq M\|x - x_0\| < M\frac{r}{M} = r \Rightarrow x \in K_{d'}(x_0, r)$. Obratna tvrdnja slijedi zbog simetrije (jer vrijedi $\|x\| \leq \frac{1}{m}\|x\|',\ \forall x \in X$). Time je prva tvrdnja dokazana, a preostale dvije su njezine neposredne posljedice.

27. $\|P\|_\infty \leq \|P\|_2 \leq \sqrt{n}\|P\|_\infty,\ \|P\|_\infty \leq \|P\|_1 \leq n\|P\|_\infty,\ \|P\|_2 \leq \|P\|_1 \leq \sqrt{n}\|P\|_2,\ \ \forall P \in \mathbb{R}^n$. Provjerite!

28. Zbog zadatka 25 dovoljno je dokazati da je proizvoljna norma $\|\ \ \|$ na $\mathbb{R}^n$ ekvivalentna euklidskoj normi $\|\ \ \|_2$. Neka je $\{e_1, ..., e_n\}$ kanonska baza u $\mathbb{R}^n,\ M = \max\limits_{1\leq i\leq n} \|e_i\|,\ P = (x_1, ..., x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbb{R}^n$. Sada je

$$\|P\| = \|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\ \|e_i\| \leq M\ \|P\|_1 \leq M\sqrt{n}\ \|P\|_2. \qquad (*)$$

Za dokaz druge nejednakosti uzmimo jediničnu sferu $S = \{P \in \mathbb{R}^n : \|P\|_2 = 1\}$. Tvrdimo da $\exists m > 0$ tako da vrijedi $\|P\| \geq m,\ \forall P \in S$. Pretpostavimo suprotno; tada $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists P_k \in S$ sa svojstvom $\|P_k\| < \frac{1}{k}$. Zbog kompaktnosti skupa S (zadatak 15) niz P_k ima konvergentan podniz P_{k_r} u euklidskoj normi; neka je P_0 njegov limes. Dakle, $\|P_{k_r} - P_0\|_2 \to 0$, a zbog zatvorenosti sfere vrijedi $\|P_0\|_2 = 1$. S druge strane, relacija $(*)$ pokazuje da je $\|\ \ \| : (\mathbb{R}^n, d_2) \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija pa slijedi $\|P_0\| = \lim\limits_r \|P_{k_r}\| = 0 \Rightarrow P_0 = 0$, a to proturječi s $\|P_0\|_2 = 1$. Time je dokazano da vrijedi $\|P\| \geq m,\ \forall P \in S$. Konačno, za $Q \in \mathbb{R}^n,\ Q \neq 0$, imamo $\frac{Q}{\|Q\|_2} \in S \Rightarrow \|\frac{Q}{\|Q\|_2}\| \geq m \Rightarrow \|Q\| \geq m\|Q\|_2$.

29. Neka je $\dim X = n$, neka je $T\colon \mathbb{R}^n \to X$ bilo koji izomorfizam vektorskih prostora. Ako je $\|\ \ \|$ proizvoljna norma na X onda je formulom $\|P\|_T := \|T(P)\|$ definirana norma na $\mathbb{R}^n$. Tvrdnja sada slijedi iz prethodnog zadatka.

30. Daljnje su mogućnosti npr. $\|A\|_1 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} |\alpha_{ij}|$ i $\|A\|_2 = \big(\sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}^2\big)^{\frac{1}{2}}$.

31. Implikacija $(a) \Rightarrow (b)$ je trivijalna. Dokažimo sada $(b) \Rightarrow (c)$: Za $\varepsilon = 1\ \exists\delta > 0$ tako da $\|x\| \leq \delta \Rightarrow \|Ax\| \leq 1$. Ako je $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, onda je $\|\delta\frac{x}{\|x\|}\| \leq \delta$ i zato je $\|A(\delta\frac{x}{\|x\|})\| \leq 1 \Rightarrow \|Ax\| \leq \frac{1}{\delta}\|x\|$.

Implikacija $(c) \Rightarrow (a)$ dokazana je u Korolaru 2.22

32. $(a) \Rightarrow (b)$: Operator A^{-1} je ograničen pa postoji $M > 0$ takav da vrijedi $\|A^{-1}(Ax)\| \leq M\|Ax\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$; odavde slijedi tvrdnja (b) uzmemo li $\delta = \frac{1}{M}$.
$(b) \Rightarrow (a)$: Direktno iz (b) vidi se da A ima trivijalnu jezgru i zato je regularan.

33. Za $x \in \mathbb{R}^n$, $\|A_k x - A_0 x\| \leq \|A_k - A_0\| \, \|x\|$; to dokazuje implikaciju $(a) \Rightarrow (b)$. Pretpostavimo (b), fiksirajmo $x, y \in \mathbb{R}^n$; tada koristeći Cauchyevu nejednakost imamo $|(A_k x|y) - (Ax|y)| = |(A_k x - Ax|y)| \leq \|A_k x - Ax\| \, \|y\|$ a ovo dokazuje tvrdnju (c).
$(c) \Rightarrow (a)$: Neka su $A_0 = (\alpha_{ij}^0)$, $A_k = (\alpha_{ij}^k)$, matrični zapisi zadanih operatora u kanonskim bazama $\{e_1, ..., e_n\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{f_1, ..., f_m\} \subset \mathbb{R}^m$. Uočimo da vrijedi $\alpha_{ij}^k = (A_k e_j | f_i)$ $\forall i, j$, $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sada pretpostavka (c) direktno daje tvrdnju $\|A_k - A_0\|_\infty \to 0$ (uočite da smo slobodni u izboru norme na prostoru $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$; to nam omogućuju tvrdnje zadataka 26 i 29).

POGLAVLJE 2

§ 8

1. $\partial_1 f(0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0 = \partial_2 f(0,0)$; s druge strane f očito nije ograničena niti u jednoj okolini točke $(0,0)$, pogotovo nije ni neprekidna, niti diferencijabilna u $(0,0)$.

2. I ovdje je $\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$, ali f ima prekid u $(0,0)$ zbog $\lim\limits_{x \to 0} f(x^2, x) = \dfrac{1}{2} \neq 0$.

3. $\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$, a za $V = (a,b)$, $a, b \neq 0$ imamo $\partial_V f(0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(tV) - f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1}{t} \cdot \dfrac{t^3 ab^2}{t^2(a^2 + b^2)} = \dfrac{ab^2}{a^2 + b^2}$. Funkcija f je očito i neprekidna u $(0,0)$, ali ipak nije diferencijabilna u $(0,0)$ jer nije ispunjen nuždan uvjet diferencijabilnosti $\partial_V f(0,0) = Df(0,0)(V)$, $\forall V \in \mathbb{R}^2$ (naime nul-funkcional je jedini kandidat za diferencijal od f u $(0,0)$, a on gornju formulu ne zadovoljava).

4. Funkcije $p_1(x,y) = x$ i $p_2(x,y) = y$ su linearni funkcionali, zato su diferencijabilne na $\mathbb{R}^2$. Zato je i f diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$ jer je nastala zbrajanjem, množenjem i komponiranjem diferencijabilnih funkcija. $\partial_1 f(x_0,y_0) = 2x_0y_0 + y_0e^{x_0y_0}$, $\partial_2 f(x_0,y_0) = x_0^2 + x_0e^{x_0y_0}$, $\forall (x_0, y_{)} \in \mathbb{R}^2$.

5. Svugdje osim u $(0,0)$.

6. Da. Zbog $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0$ moramo staviti $f(0,0,0) = 0$; time smo f neprekidno proširili na cijeli $\mathbb{R}^3$. Zbog $\partial_i f(0,0,0) = 0,\ i = 1,2,3$ jedini kandidat za diferencijal od f u $(0,0,0)$ je nul-funkcional n. Za $H = (x,y,z)$ sada je $\lim\limits_{H\to(0,0,0)} \frac{f(H)-f(0,0,0)-n(H)}{\|H\|} =$

$$= \lim_{H\to(0,0,0)} \frac{x^2y^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$$

i zato je $Df(0,0,0) = n$.

7. Očito je $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(y_0,x_0+t)-f(y_0,x_0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}$.

8. Lako se vidi da je diferencijal od f u $(0,0)$ nul-funkcional. Međutim, f nije diferencijabilna niti u jednoj drugoj točki koja leži na koordinatnim osima jer ne postoji $\partial_1 f(0,b)$ niti $\partial_2 f(a,0)$ za $a,b \neq 0$.

9. Kako su sve norme na $\mathbb{R}^2$ ekvivalentne to postoji broj $m > 0$ takav da je $|f(x,y)| \leq (|x|+|y|)^2 = \|(x,y)\|_1^2 \leq m\|(x,y)\|^2$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Sada je jasno da je f diferencijabilna u $(0,0)$; $Df(0,0) = n$ (nul- funkcional).

10. f je diferencijabilna samo u $(0,0)$; u svim ostalim točkama čak ima prekid.

11. Treba pokazati: $\lim\limits_{H\to 0} \dfrac{(A(P_0+H) \mid P_0+H) - (AP_0 \mid P_0) - 2(AP_0 \mid H)}{\|H\|} = 0$, za sve $P_0 \in \mathbb{R}^n$. Uočimo da je funkcija $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g(P) = AP$ linearan operator; zato postoji broj $m > 0$ takav da je $\|AP\| \leq m\|P\|$, $\forall P \in \mathbb{R}^n$. Osim toga, zbog simetričnosti matrice A vrijedi $(AU \mid V) = (U \mid AV)$, $\forall U, V \in \mathbb{R}^n$. Sada je: $\frac{1}{\|H\|}\big|(A(P_0+H) \mid P_0+H) - (AP_0 \mid P_0) - 2(AP_0 \mid H)\big| = \frac{1}{\|H\|}\big|(AH \mid P_0) + (AH \mid H) - (AP_0 \mid H)\big| = \frac{|(AH|H)|}{\|H\|} \leq \frac{1}{\|H\|}\|AH\|\|H\| \leq m\|H\| \to 0$.

12. To je prethodni zadatak s jediničnom matricom umjesto matrice A.

13. Očito je $g = \sin \circ q \circ f$ pri čemu je q funkcija iz prethodnog zadatka. Zato je g kao kompozicija diferencijabilnih funkcija i sama diferencijabilna. Prema Teoremu o diferencijalu kompozicije, dobivamo $Dg(P_0)(P) = 2\,(Df(P_0)(P) \mid f(P_0)) \cos(f(P_0) \mid f(P_0))$.

14. Neka je $h\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $h(V) = (V \mid T)$. Očigledno je h linearni funkcional te vrijedi $g = h \circ f$. Preostaje ponovo primijeniti Teorem o kompoziciji diferencijabilnih funkcija.

15. Propozicija 8.2 sugerira da bi diferencijal funkcije $f \cdot g$ u točki P_0 mogao biti linearni funkcional $l(P) = g(P_0)Df(P_0)(P)$. Zaista,
$|r(H)| = |f(P_0 + H)g(P_0 + H) - f(P_0)g(P_0) - g(P_0)Df(P_0)(H)| =$
(prešutno ćemo koristiti činjenicu $f(P_0) = 0$)
$= |g(P_0+H)(f(P_0+H) - Df(P_0)(H)) + (g(P_0+H) - g(P_0))Df(P_0)(H)|$
$\le |f(P_0 + H) - f(P_0) - Df(P_0)(H)|\,|g(P_0 + H)| + |Df(P_0)(H)|\,|g(P_0 + H) - g(P_0)|$. Sada je jasno da je $\lim\limits_{H\to 0} \dfrac{r(H)}{\|H\|} = 0$ (ovdje smo iskoristili definiciju diferencijala, ograničenost operatora $Df(P_0)$, te činjenicu da zbog neprekidnosti funkcije g vrijedi $g(P_0) = \lim\limits_{H\to 0} g(P_0 + H)$).

16. Analogno prethodnom računu, pokazuje se da vrijedi
$$Dh(P_0)(P) = (Df(P_0)(P) \mid g(P_0)).$$

17. Funkcija $g(P) = \|f(P)\|^2$ je diferencijabilna na $\mathbb{R}^n$, kako je i ona konstanta, vrijedi $Dg(P_0)(P) = 0, \forall P_0, P$. S druge strane, prema zadatku 12, imamo $Dg(P_0)(P) = 2(f(P_0)|Df(P_0)(P)), \forall P_0, P$.

18. Neka je $\rho > 0$. Definiramo li preslikavanje $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ formulom $p(t) = (\rho\cos t, \rho\sin t)$ dovoljno je pokazati da je $f \circ p$ konstanta, odnosno da je $(f \circ p)'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Sada je (usporedite sa zadatkom 27)
$$\begin{aligned}(f \circ p)'(t) &= (\nabla f(p(t)) \mid p'(t)) = \text{prema uvjetu zadatka} = \\ &= \lambda\,(p(t) \mid p'(t)) = \lambda\rho^2(\cos t(-\sin t) + \sin t\cos t) = 0\,.\end{aligned}$$

19. Kao u prethodnom zadatku za $\rho > 0$ definira se funkcija $s\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ formulom $s(\varphi, \psi) = (\rho\cos\psi\cos\varphi, \rho\cos\psi\sin\varphi, \rho\sin\psi)$. Sad je dovoljno pokazati da je $D(f \circ s)(\varphi, \psi) = 0$, $\forall(\varphi, \psi)$ a to izlazi direktno iz pretpostavke na funkciju f.

20. Stavimo $p(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Sada je $(f \circ p)(r, \varphi) = (\frac{\cos\varphi}{r^{n-1}}, \frac{\sin\varphi}{r^{n-1}})$. Zato je (uvedemo li za Jacobijan funkcije oznaku J) $J(f \circ p)(r, \varphi) =$

$\det\begin{bmatrix} \frac{(1-n)\cos\varphi}{r^n} & \frac{-\sin\varphi}{r^{n-1}} \\ \frac{(1-n)\sin\varphi}{r^n} & \frac{\cos\varphi}{r^{n-1}} \end{bmatrix} = \frac{1-n}{r^{2n-1}}$. Preostaje primijeniti Binet[1]-Cauchyev teorem: $Jf(x,y) = \dfrac{1-n}{(x^2+y^2)^n}$.

21. Stavimo $Df(0) = A$ i definirajmo funkciju $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(P) = f(P) - f(0)$. Sada je i g parna funkcija te vrijedi $g(0) = 0$ i $Dg(0) = A$. Neka je $\varepsilon > 0$. Po definiciji diferencijala $\exists\delta > 0$ tako da $0 < \|H\| \leq \delta \Rightarrow |g(H) - AH| < \varepsilon\|H\|$. Osim toga, $0 < \|H\| \leq \delta \Rightarrow |g(-H) - A(-H)| = |g(H) + AH| < \varepsilon\|H\|$ (jer je i $\|-H\| < \delta$). Uvažimo li obje ove relacije imamo: $0 < \|H\| \leq \delta \Rightarrow 2|AH| = |2AH| = |g(H) + AH - (g(H) - AH)| < 2\varepsilon\|H\|$. To znači: $0 < \|H\| \leq \delta \Rightarrow |AH| < \varepsilon\|H\|$. Uzmimo sada proizvoljan vektor $H \neq 0$. Zbog $\|\delta\frac{H}{\|H\|}\| \leq \delta$ vrijedi $|A\delta\frac{H}{\|H\|}| < \varepsilon\|\delta\frac{H}{\|H\|}\|$, odnosno $|AH| < \varepsilon\|H\|$. Zato, po definiciji norme operatora $\|A\| < \varepsilon$, a zbog proizvoljnosti broja ε, slijedi $\|A\| = 0$. A je dakle nul-funkcional.

22. Očito je $f(0) = 0$. Za $V = (x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ imamo $\partial V f(0) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(tV)}{t} = f(V)$. Posebno je $\partial_i f(0) = f(e_i)$. Konačno, kako je f diferencijabilna u 0, vrijedi $\partial_V f(0) = \sum\limits_{i=1}^{n} \partial_i f(0) x_i$, odnosno $f(V) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$.

23. Neka je $t \neq 0$ i $P \in \mathbb{R}^n$. Sada je $\partial_i f(tP) = \lim\limits_{s\to 0}\frac{f(tP+se_i)-f(tP)}{s} = \lim\limits_{s\to 0}\frac{f(t(P+(s/t)e_i))-f(tP)}{s} = \lim\limits_{s\to 0} t^p\frac{f(P+(s/t)e_i)-f(P)}{s} =$
$= t^{p-1}\lim\limits_{s/t\to 0}\frac{f(P+(s/t)e_i)-f(P)}{s/t} = t^{p-1}\partial_i f(P)$.

24. Zbog otvorenosti skupa Ω postoji interval $I \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $1 \in I$ i $tP_0 \in \Omega$, $\forall t \in I$ (Provjerite!). Definirajmo preslikavanja $h(t) = tP_0$ i $g = f\circ h$, $g(t) = f(tP_0) = t^p f(P_0)$. Sada je $g'(t) = pt^{p-1}f(P_0)$, posebno je $Dg(1)(s) = g'(1)(s) = psf(P_0)$. S druge strane po Teoremu o diferencijalu kompozicije vrijedi (uočite da je h linearna funkcija)
$Dg(1)(s) = Df(h(1))(Dh(1)(s)) = Df(P_0)(h(s)) = Df(P_0)(sP_0) = sDf(P_0)(P_0)$. Uspoređivanjem za $s = 1$ slijedi $pf(P_0) = Df(P_0)(P_0)$.

25. Ponovo odaberimo interval $I \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $1 \in I$ i $tP_0 \in I, \forall t \in I$. Sad se definira funkcija $g(t) = \frac{f(tP_0)}{t^p}$. Slično kao u prethodnom zadatku

[1] Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856), francuski matematičar i astronom

pokaže se da je $g'(t) = 0$, $\forall t \in I$; zato je g konstanta, $g(t) = g(1)$, $\forall t$, to jest $f(tP_0) = t^p f(P_0)$.

26. Neka je $A = Df(P_0)$ i $B = Dg(P_0)$. Definirajmo linearan operator $(A, B)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ formulom $(A, B)(P) = (AP, BP)$. Sad se pokazuje da je $D(f, g)(P_0) = (A, B)$.

    Za dokaz obratne tvrdnje dovoljno je uzeti linearne operatore $p_1 : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^m$, $p_1(P, Q) = P$ i $p_2\colon \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^k$, $p_2(P, Q) = Q$ i uočiti da vrijedi $p_1(f, g) = f$, $p_2(f, g) = g$.

27. Tvrdnja slijedi iz prethodnog zadatka i činjenice da je funkcija jedne varijable diferencijabilna ako i samo ako je derivabilna. Jacobijeva matrica od f u x_0 upravo je derivacija funkcije f: $(f_1'(x_0), f_2'(x_0))$. Analogna tvrdnja vrijedi i za funkcije $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

28. Po definiciji derivacije u smjeru, promjena funkcije iz točke P_0 u smjeru vektora V dana je s $\partial_V f(P_0) = (\nabla f(P_0) \mid V)$. Kako je $|(\nabla f(P_0) \mid V)| \leq \|\nabla f(P_0)\| \, \|V\|$, a jednakost se postiže ako i samo ako su vektori kolinearni, slijedi da funkcija najbrže raste u smjeru vektora $\nabla f(P_0)$, a najbrže pada u suprotnom smjeru.

29. U smjeru pozitivnog dijela x-osi.

§ 9

1. Dovoljno je funkciju promatrati u gornjoj poluravnini i to samo u točkama parabole $y = x^2$. Za $y > x^2$ imamo $\partial_1 f(x, y) = -2x, \partial_2 f(x, y) = 1$. Ako je $0 < y < x^2$ vrijedi $\partial_1 f(x, y) = -\frac{2y^2}{x^3}, \partial_2 f(x, y) = \frac{2y}{x^2} - 1$. U točkama parabole moramo parcijalne derivacije računati po definiciji (imajući u vidu različito djelovanje funkcije iznad, odnosno ispod parabole). Dobiva se $\partial_1 f(x, x^2) = -2x, \partial_2 f(x, x^2) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Odavde je očito da Df ima prekid u $(0, 0)$.

2. Kako je $\partial_1 f(0, 0) = 0$ i $\partial_1 f(x, y) = \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}$ za $(x, y) \neq (0, 0)$, te $\partial_2 f(0, 0) = -1$ i $\partial_2 f(x, y) = \frac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)2}$ za $(x, y) \neq (0, 0)$ vidimo da je $\partial_2\partial_1 f(0, 0) = 0$ dok $\partial_1\partial_2 f(0, 0)$ ne postoji.

3. Ne. Da bismo funkciju neprekidno proširili na čitav $\mathbb{R}^2$, moramo staviti $f(0,0) = 0$. No sada računom izlazi $\partial_2\partial_1 f(0,0) = -1$ i $\partial_1\partial_2 f(0,0) = 1$ pa zbog Schwarzovog teorema ovako proširena funkcija f nije klase C^2.

4. Kako su prema pretpostavci $\partial_j\partial_i f$ neprekidne funkcije $\forall i, j$ to je $\forall i$, $\partial_i f$ diferencijabilna funkcija na $\mathbb{R}^n$. Jer je f homogena stupnja 2, prema zadatku 2.23, slijedi da je $\partial_i f$ homogena (stupnja 1) funkcija $\forall i$. Sad je, prema zadatku 2.22, $\partial_i f$ linearan funkcional $\forall i$. Stavimo $\partial_i f(P) = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n, \forall P \in \mathbb{R}^n$. Zato je $Df(P)(H) = \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(P) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_j h_i$.

   Definirajmo sad funkciju : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ formulom $g(P) = (AP \mid P)$ pri čemu je A matrica s elementima $\frac{1}{2}a_{ij}$. Zbog Schwarzovog teorema A je simetrična i zato je, prema zadatku 2.11, $Dg(P)(H) = 2(AP \mid H) = Df(P)(H)$, $\forall P, H \in \mathbb{R}^n$. Odavde slijedi da je $f - g$ konstanta. No, $g(0) = 0$ po definiciji, a $f(0) = 0$ zbog homogenosti, i zato je $f = g$.

6. $3x + 3y + 2z - 8 = 0$.

7. $y - z + 1 = 0$.

8. Treba naći točke u kojima su vektori $\nabla f(x, y, z)$ i $(1, 4, 6)$ kolinearni. Rješenje: $(1, 2, 2)$ i $(-1, -2, -2)$.

9. Jednadžba tangencijalne ravnine u proizvoljnoj točki je

$$\Big(\varphi\big(\frac{y_0}{x_0}\big) - \frac{y_0}{x_0}\varphi'\big(\frac{y_0}{x_0}\big)\Big)x + \varphi'\big(\frac{y_0}{x_0}\big)y - z = 0$$

   i zato je njezina udaljenost od ishodišta 0.

10. Iz uvjeta zadatka dobivamo sljedeći sistem jednadžbi:

$$\begin{array}{ccccccc} x^2 & + & (y-\alpha)^2 & + & z^2 & = & 3 \\ (x-1)^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & 1 \\ x(x-1) & + & y(y-\alpha) & + & z^2 & = & 0. \end{array}$$

   Rješenje: $\alpha^2 = 3$.

§ 11

1. $f(0,0) = 0$, $\partial_2 f(0,0) = 1$. Primjenom Teorema o implicitnoj funkciji dobivamo funkciju φ definiranu u okolini 0 sa svojstvima $\varphi(0) = 0$, $f(x, \varphi(x)) = 0$, $\varphi'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$. Očito, $\varphi(x) = \arcsin(-x)$.

2. Za $|x| < 3$ dobivamo y_1, y_2 sa svojstvom $f(x_0, y_i) = 0$, $i = 1, 2$, $y_1 < 0$, $y_2 > 0$. Pritom je $\partial_2(x_0, y_i) = \frac{y_i}{2} \neq 0$. Preostaje primijeniti Teorem o implicitnoj funkciji.

3. Fiksirajmo proizvoljan x_0 i definirajmo funkciju $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulom $g(y) = f(x_0, y)$. Kako je g strogo rastuća funkcija ($g'(y) = 3y^2 + 3x_0^2 + 3 > 0$), te vrijedi $\lim\limits_{y\to-\infty} g(y) = -\infty$, $\lim\limits_{y\to\infty} g(y) = \infty$ vidimo da postoji jedinstven y_0 sa svojstvom $g(y_0) = 0$, tj. $f(x_0, y_0) = 0$. Zato sad možemo definirati funkciju $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulom $\varphi(x_0) = y_0$. Pritom je $f(x, \varphi(x)) = 0, \forall x$. Diferencijabilnost funkcije φ slijedi iz Teorema o implicitnoj funkciji.

4. Kao i u prethodnom zadatku vidimo da za svaki $x_0 > 0$ postoji jedinstvena točka $y_0 > 0$ sa svojstvom $f(x_0, y_0) = 0$, time smo dobili funkciju $\varphi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sa svojstvom $f(x, \varphi(x)) = 0, \forall x > 0$. Primjenom Teorema o implicitnoj funkciji dobivamo $\varphi'(x) = -\frac{\varphi(x)(x\varphi(x)-1)}{x(x\varphi(x)+1)}$. Odavde slijedi da je jedina kritična točka $x_0 = \sqrt{e}$. Lako se vidi da je $\varphi''(x_0) < 0$ pa φ u x_0 ima lokalni maksimum.

5. Definirajmo funkciju $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ formulom $f(x, y, z) = x + y + z - e^{-(x+y+z)}$, fiksirajmo točku (x_0, y_0) i stavimo $x_0 + y_0 = a$. Sad je lagano vidjeti da postoji i jedinstvena je točka z_0 sa svojstvom $e^{-z_0} = e^a(z_0 + a)$. To pokazuje da postoji funkcija $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takva da je $f(x, y, g(x, y)) = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Teorem o implicitnoj funkciji primjenjiv je u svakoj točki $(x, y, g(x, y))$. Posebno, slijedi $Dg(x, y) = [-1, -1]$, $\forall (x, y)$. Odavde je $g(x, y) = -x - y + c$ pri čemu je $c \in \mathbb{R}$ konstanta za koju vrijedi $c = e^{-c}$.

6. Fiksirajmo $x_0 \neq 0$; bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $x_0 > 0$. Prema Teoremu srednje vrijednosti, $\forall y$ postoji $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ sa svojstvom $f(x_0 + y) - f(y) = x_0 f'(y + \alpha x_0)$. Sada je zbog pretpostavke na f', $\lim\limits_{y\to-\infty} \big(f(x_0 + y) - f(y)\big) = -\infty$ i $\lim\limits_{y\to\infty} \big(f(x_0 + y) - f(y)\big) = \infty$. Konačno, uvedemo li funkciju $g(y) = f(x_0 + y) - f(y)$ vidimo da je g strogo rastuća

i kako g raste od $-\infty$ do ∞ slijedi da postoji jedinstvena točka y_0 sa svojstvom $g(y_0) = f(x_0 + y_0) - f(y_0) = f(x_0)$. Preostaje primijeniti Teorem o implicitnoj funkciji.

7. Interpretiramo li problem u terminima linearne algebre vidimo da za svaki x treba naći y sa svojstvom $A_2 y = -A_1 x$. Ovaj sistem linearnih jednadžbi je Cramerov jer je matrica A_2 prema pretpostavci regularna. Zato za svaki x imamo jedinstveno rješenje i ono je dano s $y = -A_2^{-1}(A_1 x)$. Posebno, $-A_2^{-1} A_1$ je linearan operator i stoga je sam svoj diferencijal u svakoj točki.

8. Definirajmo funkciju $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ formulom

$$f(x,y,z) = (x^4 + (x+z)y^3 - 3, x^4 + (2x+3z)y^3 - 6).$$

U proizvoljnoj točki (x,y,z) Jacobijan parcijalnog diferencijala po varijablama y,z iznosi

$$\det D_2 f(x,y,z) = \begin{vmatrix} 3(x+z)y^2 & y^3 \\ 3(2x+3z)y^2 & 3y^3 \end{vmatrix} = 3xy^5.$$

Preostaje uočiti da točke oblika $(0,y,z)$ i $(x,0,z)$ ne mogu biti rješenja zadanog sistema jednadžbi, te u svakoj točki koja predstavlja rješenje ovog sistema primijeniti Teorem o implicitnoj funkciji.

9. Rješenje možemo tražiti npr. u obliku $(x,0,0,v)$. Tada mora biti $v - \sin(\cos v) = 0$, a lako se vidi da je to moguće postići. Jacobijan parcijalnog diferencijala po varijablama u,v ovdje će biti $-e^{u_0} \cos v_0$ što ne može biti 0 u nul-točki (x_0, y_0, u_0, v_0).

§ 12

1. Za $x \neq 0$ je $f'(x) = 1 + 4x \sin \frac{1}{x} + 2 \cos \frac{1}{x}$, dok je $f'(0) = 1$. Odavde je jasno da f' ima prekid u 0. S druge strane, za f ne vrijedi tvrdnja Teorema o inverznoj funkciji u točki 0 jer f nije injekcija niti u jednoj okolini nule.

2. Jacobijan funkcije f u proizvoljnoj točki (x,y) iznosi $\sin(y-x)$. Zato je f lokalni difeomorfizam u svim točkama koje nisu oblika $(x, x+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Jacobijan ove funkcije u svakoj točki iznosi 1, zato je ona lokalni difeomorfizam u svakoj točki. Međutim, f nije globalni difeomorfizam jer nije niti injekcija.

4. Jacobijan funkcije f u točki (x, y, z) iznosi $2xyz$ i zato je f lokalni difeomorfizam u svim točkama izvan koordinatnih ravnina. Primjenom Binet-Cauchyevog teorema slijedi $Jf^{-1}(f(x, y, z)) = \frac{1}{2xyz}$.

§ 14

1. Kritične točke su $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ i $(0, 0)$. Kako je

   $$Hf(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = Hf(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}, \; Hf(0, 0) = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix},$$

   vidimo da f u prve dvije točke ima lokalni minimum, dok za točku $(0, 0)$ još nemamo odluku. Međutim, $f(0, 0) = 0, f(x, x) = x^4 > 0$ za $x \neq 0$, $f(x, -x) = 2x^2(x^2 - 4) < 0$ za $|x| < 2$ što pokazuje da je $(0, 0)$ sedlasta točka za f.

2. Jedina kritična točka je $(0, 0, 0)$ i to je lokalni minimum za f.

3. Kritične točke su $(-4, -2)$ i $(0, 0)$. $Hf(-4, -2) = \begin{bmatrix} -6e^{-2} & 8e^{-2} \\ 8e^{-2} & -12e^{-2} \end{bmatrix}$; Zato je $(-4, -2)$ točka lokalnog maksimuma za f. S druge strane imamo $Hf(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ što pokazuje da je pripadna kvadratna forma indefinitna, dakle $(0, 0)$ je sedlasta točka za f.

4. Za $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ restrikcija funkcije f na pravac $y = kx$ je $f_k(x) = 3x^4 - 4kx^3 + k^2x^2$. Kako je $f_k'(0) = 0, f_k''(0) = 2k^2 > 0$ slijedi da je 0 lokalni minimum za f_k. To je također istina (očito) i za pravac $x = 0$. Međutim, zbog $f(0, 0) = 0$, $f(x, y) > 0$ za $y > 3x^2$ i $f(x, y) < 0$ za $x^2 < y < 3x^2$ jasno je da $(0, 0)$ nije točka lokalnog minimuma za f.

5. Definirajmo funkciju $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ formulom $f(P) = (AP \mid P)$. Kako je f neprekidna funkcija, a jedinična sfera $S = \{P \in \mathbb{R}^n : \|P\|^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktan skup, mora f na S dostizati minimum i maksimum. Ako je P_0 točka ekstrema za f na S, onda je $\nabla f(P_0) = \lambda g(P_0)$ pri čemu

je $g(P) = \|P\|^2$, a λ neki skalar. To znači (vidite zadatak 2.11) da je $2AP_0 = 2\lambda P_0$, dakle, P_0 je svojstveni vektor matrice A za svojstvenu vrijednost λ.

6. Jasno je iz geometrijskih razloga da ovdje postoji (globalni) minimum dok maksimuma nema. Označimo s $n = (A, B, C)$ vektor normale zadane ravnine. Jedina kritična točka ovdje je $(\frac{-AD}{\|n\|^2}, \frac{-BD}{\|n\|^2}, \frac{-CD}{\|n\|^2})$ i zato je upravo to traženi minimum. Minimalna udaljenost je $\frac{|D|}{\|n\|}$.

7. Lagrangeova funkcija ovdje je $L(x, y, z, \lambda) = ax + by + cz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. Uz oznaku $V = (a, b, c)$ jedine kritične točke ovdje su $V_1 = -\frac{V}{\|V\|}$ i $V_2 = \frac{V}{\|V\|}$. Kako je naša funkcija neprekidna, a skup S definiran uvjetom (jedinična sfera) kompaktan, f na S mora imati čak globalni minimum i maksimum i te se točke moraju pojaviti kao rješenja Lagrangeovog sistema jednadžbi. Zato (uspoređivanjem) slijedi $f(V_1) \leq f(P) \leq f(V_2)$, $\forall P \in S$. To pokazuje da je $|f(P)| = |(P|V)| \leq |f(V_2)| = \|V\|$, $\forall P \in S$. Konačno, za $T \in \mathbb{R}^3$, $T \neq 0$ imamo $P = \frac{T}{\|T\|} \in S$ pa je $|(\frac{T}{\|T\|} \mid V) \leq \|V\| \Rightarrow |(T \mid V)| \leq \|T\|\|V\|$.

8. Dovoljno je promatrati samo prvi kvadrant. Jasno je da naš problem nema maksimuma. Ako se točka T na elipsi približava jednoj od koordinatnih osi jedna kateta promatranog trokuta teži u $+\infty$ dok je druga odozdo ograničena.

   Uvjetna jednadžba tangente na elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ u točki (x, y) glasi $\frac{xu}{a^2} + \frac{yv}{b^2} = 1$, sjecišta s koordinatnim osima su $(0, \frac{b^2}{y})$ i $(\frac{a^2}{x}, 0)$ i tražena površina iznosi $\frac{1}{2}a^2b^2\frac{1}{xy}$. Zanemarimo li pozitivnu konstantu, trebamo promatrati funkciju $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ na skupu $S = \{(x, y) : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, x, y > 0\}$. Praktičnije je, međutim, promatrati funkciju $\tilde{f}(x, y) = xy$ na skupu $\tilde{S} = \{(x, y) : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, x, y \geq 0\}$. Funkcija $\tilde{f}$ dostiže minimum i maksimum na $\tilde{S}$ jer je ovaj skup kompaktan, posebno, maksimum upravo u točki gdje je minimum za f (a minimum od $\tilde{f}$ je 0 i dostiže se u točkama $(1, 0)$ i $(0, 2)$). Jedina preostala kritična točka je $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}})$ i zato je to traženo rješenje u prvom kvadrantu.

9. Zadani skup je kompaktan, a funkcija neprekidna, pa postoji i minimum i maksimum. Pritom je minimum 0 i dostiže se u svakoj točki čija

bar jedna koordinata je 0. Jedino preostalo rješenje Lagrangeovog sistema je $(\frac{c}{n}, \dots, \frac{c}{n})$ i zato je to maksimum. Vrijedi dakle $x_1 \cdots x_n \le \frac{c^n}{n^n}$, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in S$, tj. $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \le \frac{c}{n} = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$.

10. Slično kao u zadatku 8. vidimo da ovdje neće biti maksimuma. Jedini 'kritični pravac' ovdje je $\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} = 1$, a pripadna površina iznosi $2ab$. Sad prethodni zadatak pokazuje da je ovo minimum. Naime, svaki drugi pravac s traženim svojstvom ima jednadžbu $\frac{x}{c} + \frac{y}{d} = 1$, pri čemu je $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = 1$, a pripadna površina je $\frac{cd}{2}$. Konačno, $\sqrt{\frac{a}{c}\frac{b}{d}} \le \frac{1}{2}(\frac{a}{c} + \frac{b}{d}) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2ab \le \frac{cd}{2}$.

11. Minimuma nema, a maksimum (globalni) dobivamo za trokut s katetama $a = b = \frac{12}{2+\sqrt{2}}$.

12. Skup S definiran uvjetima je kompaktan pa će f na S imati i minimum i maksimum. Gradijenti uvjetnih funkcija su linearno nezavisni u svakoj točki iz S. Primjenom Teorema B dobivamo dvije kritične točke: $(0, -\sqrt{2}, 1)$ i $(0, \sqrt{2}, 1)$. U prvoj od njih se dostiže minimum, a u drugoj maksimum.

13. Riječ je o kvadratu udaljenosti od z-osi točaka skupa $S = \{(x, y, z) : z = 0, z^2 - (y-1)^3 = 0\}$ i lako se vidi da se minimum dostiže u točki $(0, 1, 0)$. Ovdje međutim ne možemo primijeniti Teorem B, jer za funkciju $g(x, y, z) = z^2 + (y-1)^3$ vrijedi $\nabla g(x, y, z) = (0, 3(y-1)^2, 2z)$, pa su gradijenti uvjetnih funkcija linearno zavisni u svakoj točki skupa S.

14. Promatrat ćemo kvadrat udaljenosti od y-osi. Lagrangeova funkcija je
$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + z^2 - \lambda(2x^2 + y^2 - 4) - \mu(x + y + z).$$
Kritične točke su $(1, -\sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}), (-1, \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}), (1, \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2})$ i $(-1, -\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$. Zbog neprekidnosti funkcije i kompaktnosti skupa zadanog uvjetima, moramo dobiti i minimum i maksimum i oni se moraju naći među gornjim točkama. Uspoređivanjem slijedi da u prve dvije točke imamo minimum, a u preostale dvije maksimum.

15. Kad bi za neki kompaktan skup K minimum (koji mora postojati zbog neprekidnosti funkcije) bio u nutrini skupa K to bi, posebno, bio lokalni minimum funkcije f. Međutim, lako se vidi da f nema lokalnih minimuma.

16. Funkcija f poprima i minimum i maksimum na $\overline{K}$ jer je ovaj skup kompaktan. Ako su obje točke na sferi S onda je, zbog konstantnosti funkcije na S f konstanta na čitavom skupu $\overline{K}$, posebno na K i tada je

$\nabla f(P) = 0$, $\forall P \in K$. Ako je bar jedna od točaka ekstrema u K, onda je to i lokalni ekstrem za f i tvrdnja slijedi iz Teorema o nužnim uvjetima lokalnih ekstrema.

17. Skup je kompaktan, a funkcija neprekidna, pa f dostiže minimum i maksimum na S. Ovisno o tome jesu li točke u kojima se dostižu ekstremi na sferi ili u unutrašnjosti kugle dobit ćemo ih ili na temelju Teorema o nužnim uvjetima lokalnih ekstrema ili iz Teorema A. Treba dakle istražiti lokalne ekstreme u unutrašnjosti kugle i uvjetne ekstrema za f uz uvjet $x^2+y^2+z^2 = 9$, a nakon toga dovoljno je usporediti funkcijske vrijednosti u dobivenim kritičnim točkama. U nutrini se dobiju točke $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ i $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, a na sferi $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, $(-1, 2, 2)$, $(1, -2, -2)$, $(\frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ i još 8 točaka dobivenih permutacijama njihovih koordinata. Minimum je u $(1, -2, -2)$ i odgovarajućim permutacijama, maksimum u $(-1, 2, 2)$ i njezinim permutacijama.

18. U unutrašnjosti kugle dobije se samo jedna kritična točka $P_1 = (x_1, \ldots, x_n)$, pri čemu je $x_i = \dfrac{a_i}{\sqrt{1+\|T\|^2}}$ i $T = (a_1, \ldots, a_n)$. Na sferi dobivamo točke $P_2 = -\frac{T}{\|T\|}$ i $P_3 = \frac{T}{\|T\|}$. Minimum je P_2, a maksimum u P_1.

19. Umjesto Lagrangeove funkcije $L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x + y - s)$ promatrat ćemo funkciju $\tilde{f}(x) = x(s-x)$. Kako je $\tilde{f}'(x) = s - 2x$, $\tilde{f}''(x) = -2$ vidimo da je rješenje kvadrat.

20. Eliminacijom varijable z iz uvjeta $xyz = V$, umjesto funkcije $f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$ dobivamo novu funkciju $g(x,y) = xy + \frac{2V}{x} + \frac{2V}{y}$, $x, y > 0$. Jedina kritična točka je $x_0 = y_0 = \sqrt[3]{2V}$. Kako je $Hg(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ slijedi da je u (x_0, y_0) lokalni minimum za g. Da je to i globalni minimum možemo vidjeti ovako: Ako je $x \leq \frac{1}{3}x_0$ onda za svaki y vrijedi $g(x,y) > \frac{2V}{x} \geq \frac{6V}{x_0} = \frac{6V}{\sqrt[3]{2V}} = g(x_0, y_0)$. Zbog simetrije ovo je točno i za $y \leq \frac{1}{3}x_0$ uz proizvoljan x. S druge strane, ako je $x \geq 9x_0$ i $y \geq \frac{1}{3}x_0$ (ili obratno) imamo $g(x,y) > xy \geq 3x_0^2 = g(x_0, y_0)$. Ove ocjene sad pokazuju da je minimum funkcije g na zatvorenom kvadratu $K = \{(x,y) : \frac{1}{3}x_0 \leq x, y \leq 9x_0\}$ (a on postoji zbog kompaktnosti skupa K) ujedno i globalni minimum za g. Kako su gornjim ocjenama obuhvaćeni i rubovi kvadrata, minimum je u njegovoj unutrašnjosti i to upravo u točki (x_0, y_0), jer je ona jedini lokalni ekstrem za g.

21. Ako stranice trokuta označimo s x, y, z, kvadrat površine, po Heronovoj formuli, iznosi $f(x,y,z) = s(s-x)(s-y)(s-z)$. Iz uvjeta $x+y+z = 2s$, eliminacijom nepoznanice z dobivamo funkciju $g(x,y) = s(s-x)(s-y)(x+y-s)$. Jedina kritična točka je $x_0 = y_0 = \frac{2s}{3}$. Kako je $Hg(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}s^2 & -\frac{1}{3}s^2 \\ -\frac{1}{3}s^2 & -\frac{2}{3}s^2 \end{bmatrix}$, to je minimum.

22. Uvedimo funkciju $h\colon I \to \mathbb{R}^2, h(x) = (x, \varphi(x))$. Sada je

$$\tilde{f}'(x) = \big(\nabla f(h(x))|h'(x)\big) = \partial_1 f(h(x)) + \partial_2 f(h(x))\varphi'(x).$$

Posebno je $\tilde{f}'(x_0) = \partial_1 f(x_0,y_0) - \dfrac{\partial_1 g(x_0,y_0)}{\partial_2 g(x_0,y_0)}\partial_2 f(x_0,y_0)$. Nadalje, zbog $\nabla f(x_0,y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0,y_0)$, možemo pisati $\lambda_0 = \dfrac{\partial_2 f(x_0,y_0)}{\partial_2 g(x_0,y_0)}$, a i $\lambda_0 = \dfrac{\partial_1 f(x_0,y_0)}{\partial_1 g(x_0,y_0)}$ (jer ako je $\partial_1 g(x_0,y_0) = 0$ onda je i $\partial_1 f(x_0,y_0) = \lambda_0 \partial_1 g(x_0,y_0) = 0$). Sada je $\tilde{f}'(x_0) = \partial_1 f(x_0,y_0) - \lambda_0 \partial_1 g(x_0,y_0) = 0$. Kako su sve funkcije klase C^2 možemo izračunati i drugu derivaciju.

$$\begin{aligned} \tilde{f}''(x) = \partial_1\partial_1 f(x,\varphi(x)) + \partial_2\partial_1 f(x,\varphi(x))\varphi'(x) + \varphi''(x)\partial_2 f(x,\varphi(x)) +\\ +\varphi'(x)(\partial_1\partial_2 f(x,\varphi(x)) + \varphi'(x)\partial_2\partial_2 f(x,\varphi(x))). \end{aligned}$$

Preostaje uvrstiti točku x_0 i srediti dobiveni izraz.

23. Lagrangeova funkcija je $L(x,y,\lambda) = 4xy - \lambda(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1)$. Jedina kritična točka je $x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y_0 = \frac{b}{\sqrt{2}}$, $\lambda_0 = 2ab$. Primjenom prethodnog zadatka dobivamo $\tilde{f}(x_0) < 0$ i zato je u (x_0,y_0) maksimum.

24. Definirajmo $\tilde{f}$ s $\tilde{f}(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n) = f(0,\ldots,0,x_{m+1},\ldots,x_n)$. Očito, $\tilde{f}$ ima ekstreme u 'istim' točkama gdje i f. Kritična točka ovdje je $V = (C,T)$, $T = (0,\ldots,0,a_{m+1},\ldots,a_n)$. Pritom iz Lagrangeovog sistema jednadžbi imamo $C = (-\partial_1 f(T),\ldots,-\partial_m f(T)) \in \mathbb{R}^m$. Osim toga, vrijedi $\partial_i\partial_j L(V) = \partial_i\partial_j \tilde{f}(\tilde{a})$ gdje je $\tilde{a} = (a_{m+1},\ldots,a_n)$. Zbog toga matrica $HL(V)$ ima oblik

$$HL(V) = \begin{bmatrix} 0_m & I_m & 0_{m,n-m} \\ I_m & B & C \\ 0_{n-m,m} & C^t & H\tilde{f}(\tilde{a}) \end{bmatrix}$$

(ovdje su $0_j, I_j, 0_{j,k}$ nul, odnosno, jedinične matrice odgovarajućih redova, a t označava operator transponiranja). Ako označimo s $\Delta_1,\ldots,\Delta_{n+m}$

niz glavnih minora u $HL(V)$, a s $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-m}$ niz glavnih minora u $H\tilde{f}(\tilde{a})$, iz gornje matrice lako vidimo da vrijedi $\Delta_{2m} = (-1)^m$ i $\Delta_{2m+p} = (-1)^m \Gamma_p$, $\forall p = 1, \dots, n-m$. Kako je $\gamma_{2m+p} = (-1)^m \Delta_{2m+p} = \Gamma_p$, $p = 1, \dots, n-m$, preostaje primijeniti Teorem o dovoljnim uvjetima bezuvjetnih ekstrema.

25. Ako stavimo $g = (g_1, \dots, g_m)$ imamo $D\varphi(V) = \begin{bmatrix} I_m & 0_{m,n} \\ 0_{m,m} & Dg(T) \\ 0_{n-m,2m} & I_{n-m} \end{bmatrix}$.
Matrica je trokutasta i regularna je jer je lijevi gornji $m \times m$ dio u $Dg(T)$ upravo $\frac{\partial(g_1,\dots,g_m)}{\partial(x_1,\dots,x_m)} \neq 0$ po pretpostavci. Posebno, zbog $\det D\varphi(V) = \frac{\partial(g_1,\dots,g_m)}{\partial(x_1,\dots,x_m)}$ u točki V možemo primijeniti Teorem o inverznoj funkciji. Neka je, lokalno, $\varphi^{-1}(\lambda, z) = (\lambda, \psi(z))$ i $\tilde{L} = L \circ \varphi^{-1} = f(\psi(z)) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j z_j$.
Budući je V kritična točka za L, točka $W = \varphi(V)$ je kritična za $\tilde{L}$. Osim toga, f ima ili nema lokalni uvjetni ekstrem u T ako i samo ako $f \circ \varphi^{-1}$ ima ili nema lokalni uvjetni ekstrem u $\varphi(T)$. Sad tvrdnja slijedi iz prethodnog zadatka.

26. Lagrangeova funkcija je $L(\lambda, x, y, z) = \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + xyz$, jedina kritična točka je $\lambda = 0, x = 1, y = z = 0$. Sada je

$$HL(0,1,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prema Teoremu C ovdje trebamo gledati brojeve $\gamma_{2\cdot 1+1} = \gamma_3$ i $\gamma_{2\cdot 1+2} = \gamma_4$. Kako je niz $\gamma_3 = 0, \gamma_4 = -4$ netrivijalan i sedlastog tipa, naša kritična točka nije ekstrem.

27. Lagrangeova funkcija je $L(\lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda_1(x_1^2 + x_3^2 - 2) + \lambda_2(x_2 + x_4 - 4) + (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2$. Dobiju se dva rješenja:
$V_1 = (\lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -2, 1, 2, 1, 2))$ i $(-3, -6, -1, 2, -1, 2)$. O karakteru ovih točaka odlučuju brojevi $\gamma_5 = \Delta_5$ i $\gamma_6 = \Delta_6$. Za točku V_1 imamo $\gamma_5 = 32, \gamma_6 = 64$, dok je za V_2, $\gamma_5 = -32, \gamma_6 = -192$, pa je V_1 minimum, dok je V_2 sedlasta točka (što je uostalom jasno iz geometrijskih razloga).

28. Kritične točke su $(2s, s, 0, s, 0)$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Za svaku od tih točaka niz $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ koji, na temelju Teorema C, treba odlučiti o njihovom karakteru iznosi $\gamma_3 = 2, \gamma_4 = 0, \gamma_5 = 0$. Kako je ovaj niz pozitivno semidefinitan, Teorem C ne daje odluku. Međutim, ugradimo li uvjet $x = z$ u funkciju f, dobivamo $\tilde{f}(y, t) = y_2 - t^2$. Kako je $\tilde{f}(0, 0) = 0$, a u svakoj okolini točke $(0, 0)$ funkcija $\tilde{f}$ poprima i pozitivne i negativne vrijednosti, vidimo da niti jedna od dobivenih kritičnih nije lokalni uvjetni ekstrem za f.

POGLAVLJE 3

2. Prema Korolaru 19.9 imamo $F'(x) = \int_0^x f(y)dy + 2f(x)$. Odavde vidimo da funkcija F ima i drugu derivaciju. Primjenom iste formule dobivamo $F''(x) = 3f(x) + 2xf'(x)$.

3. Nužnost uvjeta iz teorema je očigledna. Dokažimo dovoljnost: Iz uvjeta teorema najprije slijedi da za svaki $y \in S$ integral $\int_a^\infty f(x, y)dx$ konvergira. Nadalje, za $y \in S$, budući je $\left|\int_b^c f(x, y)dx\right| < \varepsilon$ čim je $c > b > a_0$, imamo $\left|\int_b^\infty f(x, y)dx\right| \leq \varepsilon$. No kako to vrijedi za svaki $y \in S$ to je i $\sup\limits_{y \in S}\left|\int_b^\infty f(x, y)dx\right| \leq \varepsilon$, $\forall\, b \geq a_0$.

4. Tvrdnja slijedi direktno iz prethodnog zadatka.

7. Uniformna konvergencija integrala direktno povlači da i niz funkcija F_n uniformno konvergira k funkciji F. Kako su prema Teoremu 19.5 funkcije F_n neprekidne, neprekidna je i F.

8. Pretpostavimo da $\int_a^\infty f(x, y_0)dx$ konvergira. Osim toga znamo da $\forall b > a$ i $\forall y \in [c, d]$ postoji integral $\int_a^b f(x, y)dx$. Zbog pretpostavke (b), $\forall \varepsilon > 0$

postoji a_0 takav da, čim je $a_0 < b < g$ vrijedi $\left|\int_b^g \partial_2 f(x,t)dx\right| < \varepsilon$, $\forall t \in [c,d]$ i istodobno $\left|\int_b^g f(x,y_0)dx\right| < \varepsilon$. Sad primjenom Fubinijevog teorema slijedi $\left|\int_b^g (f(x,y) - f(x,y_0))dx\right| \leq (d-c)\varepsilon$ čim je $a_0 < b < g$. Odavde je $\left|\int_b^g f(x,y)\right| < (1+d-c)\varepsilon$, $\forall y \in [c,d]$. Time je pokazano da $\int_a^\infty f(x,y)dx$ postoji i konvergira uniformno na $[c,d]$. Definirajmo sada funkciju $G(y) = \int_a^\infty \partial_2 f(x,y)dx$. Prema prethodnom zadatku G je neprekidna. Preostaje uočiti da vrijedi $\int_c^y dt \int_a^\infty \partial_2 f(x,t)dx = \int_a^\infty dx \int_c^y \partial_2 f(x,t)dt$ (provjerite!). Odavde je $\int_c^y G(t)dt = F(y) - F(c)$ i, konačno, jer je funkcija G neprekidna, $F'(y) = G(y)$.

9. Da bismo mogli primijeniti prethodni teorem preostaje samo provjeriti uniformnu konvergenciju integrala $\int_0^\infty \frac{x}{2}e^{-x^2}(e^{xy} - e^{-xy})dx$ na segmentu $[-c,c]$. Primijenit ćemo Weierstrassov M-test; u tu svrhu uočimo da za $x \geq 2c$ imamo $|e^{xy} - e^{-xy}| \leq 2e^{\frac{x^2}{2}}$. Ovo pokazuje da za funkciju $M(x)$ na intervalu $[2c, \infty\rangle$ možemo odabrati $xe^{-\frac{x^2}{2}}$ (segment $[0,2c]$ je kompaktan, pa na njemu za $M(x)$ možemo odabrati odgovarajuću konstantu). Preostaje primijeniti prethodni teorem: $F'(y) = \frac{1}{2}yF(y)$. Posebno, sad vidimo da je $F(y) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{\frac{x^2}{4}}$.

10. Na temelju Zadatka 8, ovdje dobivamo $F'(y) = -\frac{1}{1+x^2}$, odavde je $F(y) = C - \operatorname{arctg} x$, i uvažimo li da je $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ konačno imamo $C = \frac{\pi}{2}$.

11. $\displaystyle\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-y^2}dy = \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-y^2}dx = \frac{2}{3}a^3.$

12. $\displaystyle\int_1^2 dx \int_0^{\ln x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}dy = \int_0^{\ln 2} dy \int_{e^y}^2 (x-1)\sqrt{1+e^{2y}} =$
$= -\frac{1}{6}(5^{3/2} - 2^{3/2}).$

13. Za navedene zamjene varijabli Jacobijan redom iznosi: (A) r, (B) abr, (C) r, (D) $r^2 \cos\psi$.

14. $P = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr = r^2\pi$.

15. $\int_D \ln(x^2+y^2)dxdy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_a^b r\ln(r^2)dr = \frac{\pi}{2}(b^2\ln b^2 - a^2\ln a^2 - b^2 + a^2)$.

16. $\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{1/\cos\varphi} r^2 dr + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{1/\sin\varphi} r^2 dr$.

17. Uvođenjem eliptičnih koordinata dobivamo $\int_0^{2\pi} abd\varphi \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr$ $= \frac{2ab\pi}{3}$.

18. Uvedimo nove varijable u, v formulom $(x, y) = T(u, v)$, gdje je $T^{-1}(x, y) = (x^2/y, y^2/x)$. Jacobijan funkcije T u svakoj točki (u, v) iznosi $\frac{1}{3}$ i zato je $P = \frac{1}{3}\int_1^2 du \int_1^2 dv = \frac{1}{3}$.

19. Stavimo $T^{-1}(x, y) = (u, v) = (x^2 - y^2, xy)$. Kako Jacobijan funkcije T^{-1} u točki (x, y) iznosi $2(x^2 + y^2)$, uz pomoć Teorema o inverznoj funkciji nalazimo da je traženi integral jednak $\frac{1}{2}\int_1^4 du \int_1^3 dv = 3$.

20. $V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos\psi d\psi = \frac{4}{3}a^3\pi$.

21. Uz uvođenje cilindričnih koordinata, imamo

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} dr \int_0^a r^2 z dz = \frac{8}{9}a^2.$$

22. $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^3\pi$.

23. $V = \frac{19}{6}\pi$.

24. Tvrdnju ćemo dokazati samo za slučaj $f \geq 0$ (u općem slučaju f se na uobičajeni način napiše u obliku $f = f^+ - f^-$). Ako je $f \geq 0$, niz na desnoj strani relacije (3) je monotono rastući, zbog relacije (2) on je i ograničen.

Neka mu je $L \in \mathbb{R}$ limes. Označimo još $S = \sup\{\int_C f : f \in R_A(f)\}$. Očito je $L \leq S$. Dobijemo li i obratnu nejednakost, dokaz će biti gotov. Uzmimo zato proizvoljan skup $C \in R_A(f)$. Kako je C J-izmjeriv možemo naći $r > 0$ takav da je $C \subseteq A \cap K(0,r)$. Sada je, prema relaciji (1), $\lim\limits_n \pi(C \setminus C_n) = 0$. Dalje, $C \subseteq (C \setminus C_n) \cup C_n$. Ako je α gornja ograda za f na C (po definiciji familije $R_A(f)$, funkcija f je omeđena na $C \in R_A(f)$), pa imamo $\int_C f \leq \int_{C_n} f + \alpha\pi(C \setminus C_n)$. Sada za $n \to \infty$ desna strana ove nejednakosti teži u L i zato je $S \leq L$.

25. Za niz J-izmjerivih skupova (C_n) koji će iscpljivati skup D, odaberimo četvrtine krugova s centrom u 0 radijusa n. Sada je $\int_{C_n} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^n e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-n^2})$. Odavde vidimo da zadani integral konvergira i iznosi $\frac{\pi}{4}$.

26. Označimo li traženi integral s I, po definiciji je $I = \lim\limits_n \int_0^n e^{-x^2}dx$. Sada je $I^2 = \int_0^n e^{-x^2}dx \int_0^n e^{-y^2}dy = \int_{D_n} e^{-x^2-y^2}dx\,dy$, pri čemu smo sa D_n označili skupove $[0,n] \times [0,n]$. No sad možemo primijeniti prethodni zadatak, jer je i ovaj niz skupova rastući, J-izmjeriv i iscrpljuje prvi kvadrant u $\mathbb{R}^2$. Slijedi $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

27. Integral divergira! Da bismo to vidjeli, odaberimo skupove $D_\alpha = \{(x,y) : 2\alpha \leq x \leq 1 - 2\alpha, \alpha \leq y \leq x - \alpha\}$, $\forall \alpha \in \langle 0, 1/5\rangle$. Očito je svaki od ovih skupova sadržan u D, J-izmjeriv, a funkcija $\frac{1}{x-y}$ na svakom od njih je integrabilna te vrijedi $\int_{D_\alpha} |\frac{1}{x-y}|dx\,dy = (1-3\alpha)\ln(1-3\alpha) + 4\alpha - 1 + (3\alpha - 1)\ln\alpha$. Dok prva tri člana za $\alpha \to 0$ konvergiraju, četvrti teži prema $+\infty$. Odavde vidimo da konstanta K iz definicije konvergencije nepravog integrala ovdje ne postoji.

Literatura

[1] J. C. Burkill, H. Burkill, *A Second Course in Mathematical Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1970.

[2] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.

[3] S. Kurepa, *Matematička analiza* 1, Tehnička knjiga, Zagreb, 1975.

[4] S. Kurepa, *Matematička analiza* 2, Tehnička knjiga, Zagreb, 1977.

[5] S. Kurepa, *Matematička analiza* 3, Tehnička knjiga, Zagreb, 1979.

[6] S. Mardešić, *Matematička analiza*, 1. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1974.

[7] S. Mardešić, *Matematička analiza*, 2. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1977.

[8] M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1965.

[9] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1964.

[10] W. Walter, *Analysis II*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1990.

[11] В. А. Зорич, *Математический анализ*, 1, МЦНМО, Москва, (3. izdanje) 2001.

[12] В. А. Зорич, *Математический анализ*, 2, МЦНМО, Москва, (2. izdanje) 1998.

Indeks