Kompleksna analiza

Šime Ungar

4. ožujka 2009.

O numeraciji i oznakama

Teorija kompleksnih funkcija jedne kompleksne varijable prirodno se nastavlja na teoriju vektorskih funkcija više realnih varijabli, i kao takvu, niz godina sam osnove teorije kompleksnih funcija predavao u okviru kolegija *Matematička analiza 4*. Stoga i numeracijom poglavlja, odjeljaka, teorema, lema, itd. nastavljamo numeraciju iz moje knjige *Matematička analiza u* $\mathbb{R}^n$ (Golden Marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 2005), koja obuhvaća sadržaj nekadašnjeg kolegija *Matematička analiza 3* i prvog dijela *Matematičke analize 4*. Većina materijala prvih triju poglavlja nalazi se i u mojoj ranijoj knjizi *Matematička analiza 3*, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 1992 i 1994.

Zbog potpunosti, u dodatku navodimo iskaze svih teorema iz prva četiri poglavlja kojima se koristimo i na koje se pozivamo.

Kažimo nešto o oznakama. Matematičari su tijekom stoljećâ razvili vrlo sofisticirane oznake. Mnoge su postale standardne i koriste ih svi, ali neke, iz različitih razloga — nisu. U principu, svejedno je kakve oznake rabimo, ali budući same sebi nisu svrha, znatno olakšava čitanje i razumijevanje ako su jednostavne i, još važnije, konzistentne. To znači da se za istovrsne ili slične matematičke objekte koriste slične oznake — ili mala ili velika slova, grčka slova, slova iz istog dijela abecede, isti font, i slično. To naravno nije uvijek moguće, ali mi ćemo nastojati biti što dosljedniji. Tako će $U, V, W, \ldots$ uvijek biti otvoreni skupovi, Ω će uvijek biti otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ ili $\mathbb{C}$ koji je domena promatrane funkcije. Velika pisana slova kao $\mathcal{K}, \mathcal{U}, \ldots$ označivat će familije skupova, $\mathbf{K}, \mathbf{C}, \ldots$ neke specijalne skupove (Kochova krivulja, Cantorov skup,...). Skalarni produkt vektora x i y označivat ćemo s $(x \mid y)$, uređen par s (x, y), a otvoren interval s $\langle x, y\rangle$ (ovdje su naravno x i y realni brojevi). Od oznaka koje nisu u literaturi standardne koristit ćemo naprimjer $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ u značenju ‚$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ gdje je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$'. Ova oznaka, matematički govoreći, nije sasvim korektna, jer tu nema nikakve funkcije $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (dakle funkcije koja bi bila definirana na *cijelom* $\mathbb{C}$), ali je dovoljno sugestivna da opravdava njezino korištenje. Bolja oznaka za preslikavanje f koje je definirano samo na podskupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je $f\colon \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$. Ovu ćemo oznaku također rabiti. U vezi označivanja funkcija (preslikavanja) i *čitanja* označenog, napomenimo i sljedeće: $f\colon X \to Y$ se čita ‚preslikavanje (funkcija) f sa X *u* Y', a ne ‚*na* Y'. Kada se kaže *na*, to znači da je f surjekcija, pa ukoliko nemamo *zaista* posla sa surjektivnim preslikavanjem, treba kazati *u*. Spomenimo također, da oznaka $f\colon X \to Y$ znači da je funkcija f definirana u *svim* točkama skupa X.

Koristit ćemo se još jednom oznakom koja je sasvim nestandardna. Ako je $f\colon X \to Y$ preslikavanje i $y \in Y$ točka, s $f^{\leftarrow}(y)$ označivat ćemo skup točaka $x \in X$ koje f preslikava u y. Dakle, $f^{\leftarrow}(y) := \{\, x \in X : f(x) = y \,\}$ je *original* ili *praslika* točke y. To je podskup od X. Uobičajena oznaka za to je $f^{-1}(y)$, ali, jer se radi o udžbeniku, pisat ćemo $f^{\leftarrow}(y)$ da naglasimo da se ne radi o vrijednosti *inverzne funkcije* f^{-1} u točki y, koja u danoj situaciji najčešće i ne postoji, a što studenti često zaborave. Ako inverzna funkcija $f^{-1}\colon X \to Y$ u nekoj situaciji zaista postoji, onda je naravno $f^{\leftarrow}(y) = \{f^{-1}(y)\}$, što se najčešće, iako ne sasvim korektno, piše $f^{\leftarrow}(y) = f^{-1}(y)$ (kao što se gotovo uvijek isto tako nekorektno piše $f(A) = 1$ kada je $f(x) = 1$ za sve $x \in A$, umjesto, kako bi trebalo, $f(A) = \{1\}$). Posve analogno, označivat ćemo s $f^{\leftarrow}(B)$ original skupa $B \subseteq Y$. Dakle, $f^{\leftarrow}(B) := \{\, x \in X : f(x) \in B \,\} \subseteq X$. Ako postoji inverzna funkcija $f^{-1}\colon Y \to X$, onda je, naravno, $f^{\leftarrow}(B) = f^{-1}(B)$, i ova oznaka *je* korektna.

Zagreb, 24. veljače 2008.

Šime Ungar

Indeks

Sadržaj

Literatura

[1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Company, Aucland, 1979.

[2] J. C. Burkill, H. Burkill. *A Second Course in Mathematical Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1970.

[3] S. Kurepa, H. Kraljević. *Matematička analiza* 4. *Kompleksne funkcije*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1979.

[4] S. Mardešić. *Matematička analiza*, 1. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1974.

[5] M. Rao, H. Stetkær. *Complex Analysis: An Invitation*, World Scientific, 1991.

[6] Š. Ungar. *Matematička analiza u* $\mathbb{R}^n$, Golden Marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 2005.

Teorem 27.5 (Greenov teorem) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, $F, G\colon \Omega \to \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije klase C^1, i neka je $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ pozitivno orijentiran jednostavno zatvoren po dijelovima gladak put u Ω, takav da je i unutrašnje područje B određeno konturom $\gamma^{\clubsuit} = \gamma([a,b])$ sadržano u Ω. Tada je*

$$\int_B \partial_x G - \partial_y F = \int_\gamma F\,dx + G\,dy\,.$$

Definicija 29.1 Za skup $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da ***dopušta parametrizaciju*** ili da je ***parametrizabilan*** ako postoji neprekidna surjekcija $\gamma\colon [a,b] \twoheadrightarrow \Gamma$ takva da je ***singularni skup***

$$S(\gamma) := \{t \in [a,b] : \gamma^{\leftarrow}(\gamma(t)) \neq \{t\}\}$$

konačan. Par (Γ, γ) nazivamo ***parametriziranim skupom***.

Definicija 29.2 Za dvije parametrizacije $\gamma\colon [a,b] \twoheadrightarrow \Gamma$, $\eta\colon [c,d] \twoheadrightarrow \Gamma$ kažemo da su ***usporedive*** ako postoji monotona (bilo rastuća bilo padajuća) bijekcija $\varphi\colon [a,b] \to [c,d]$ takva da je $\gamma = \eta \circ \varphi$.

Definicija 29.3 ***Krivulja*** u $\mathbb{R}^n$ je uređen par $(\Gamma, \mathcal{G})$ koji se sastoji od parametrizabilnog skupa $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ i neke klase $\mathcal{G}$ usporedivih parametrizacija. Svaku parametrizaciju $\gamma \in \mathcal{G}$ zvat ćemo parametrizacijom krivulje $(\Gamma, \mathcal{G})$.

Očito je $\Gamma = \gamma^{\clubsuit}$ za svaku parametrizaciju $\gamma \in \mathcal{G}$:

Definicija 29.8 Za krivulju $(\Gamma, \mathcal{G})$ u $\mathbb{R}^n$ kažemo da je ***po dijelovima glatka*** ako postoji parametrizacija γ te krivulje koja je po dijelovima glatka funkcija i koja je regularna, tj. $\gamma'(t) \neq 0$ za sve t (uključujući jednostrane derivacije u točkama u kojima γ nije glatka), tj. γ je regularan po dijelovima gladak put.

Teorem 30.1 *Neka je $(\Gamma, \mathcal{G})$ po dijelovima glatka krivulja u $\mathbb{R}^n$, a $\gamma\colon [a,b] \to \Gamma$ i $\eta\colon [c,d] \to \Gamma$ dvije njezine po dijelovima glatke parametrizacije, i neka je parametrizacija η regularna, tj. $\eta'(u) \neq 0$ za sve $u \in [c,d]$. Tada je i monotona bijekcija $\varphi\colon [a,b] \to [c,d]$ za koju je $\gamma = \eta \circ \varphi$, po dijelovima glatka funkcija.*

Pritom, ako γ i η određuju istu orijentaciju na Γ, onda je φ strogo rastuća funkcija i $\varphi'(t) \geq 0$ za sve $t \in [a,b]$, a ako γ i η određuju suprotne orijentacije, onda je φ strogo padajuća funkcija i $\varphi'(t) \leq 0$ za sve $t \in [a,b]$.

Popis oznaka

$\mathbb{R}$ skup realnih brojeva

$\mathbb{R}^*$ skup realnih brojeva različitih od 0

$\mathbb{R}_+$ skup nenegativnih realnih brojeva

$\mathbb{R}_+^*$ skup strogo pozitivnih realnih brojeva

$\mathbb{N}$ skup prirodnih brojeva

$\mathbb{Q}$ skup racionalnih brojeva

$\mathbb{C}$ skup kompleksnih brojeva

$\mathbb{C}^*$ skup kompleksnih brojeva različitih od 0

$\mathbb{Z}$ skup cijelih brojeva

$\mathbb{R}^n$ n-dimenzionalan euklidski prostor

Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ ili $\mathbb{C}$, najčešće domena promatrane diferencijabilne odnosno derivabilne funkcije

$f\colon S \subseteq X \to Y$ preslikavanje $f\colon S \to Y$, gdje je $S \subseteq X$. Najčešće se koristi kao $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Ova oznaka nije sasvim korektna. Bolja je oznaka:

$f\colon X \supseteq S \to Y$ preslikavanje $f\colon S \to Y$, gdje je $S \subseteq X$. Najčešće se koristi kao $f\colon \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$

$K(P_0,r), \overline{K}(P_0,r)$ otvorena, odnosno zatvorena, kugla (krug, ukoliko se radi o ravnini) oko točke P_0 radijusa $r > 0$

$K(z,r), \overline{K}(z,r)$ otvoren, odnosno zatvoren, krug u $\mathbb{C}$ oko z radijusa $r > 0$

$\operatorname{Int} S$ interior skupa S; najveći otvoren skup koji je sadržan u S

$B(X,Y)$ prostor omeđenih funkcija sa X u Y

$C(X,Y)$ prostor neprekidnih funkcija sa X u Y

$BC(X,Y)$ prostor omeđenih neprekidnih funkcija sa X u Y

$\hookrightarrow$ inkluzija

$\twoheadrightarrow$ surjektivno preslikavanje, preslikavanje *na*

$\rightarrowtail$ injektivno preslikavanje, 1–1 preslikavanje

$\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow$ bijektivno preslikavanje, preslikavanje 1–1 i *na*

$f \equiv 0,\ g \equiv 1$ konstantna preslikavanja $f(x) = 0$, $g(x) = 1$ za sve $x \in X$

$[a,b]$ zatvoren *segment* realnih brojeva, $[a,b] = \{t \in \mathbb{R} : a \le t \le b\}$

$\langle a,b\rangle$ otvoren *interval* realnih brojeva, $\langle a,b\rangle = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$

$(x \mid y)$ skalarni produkt vektora x i y

$f^{\leftarrow}(y) := \{\, x \in X : f(x) = y \,\} \subseteq X$ pri čemu je $f\colon X \to Y$ preslikavanje skup originala točke y. Uobičajena je oznaka $f^{-1}(y)$. Ovu oznaku ćemo koristiti kada želimo naglasiti da se *ne radi o inverznom preslikavanju*, koje možda u danoj situaciji i ne postoji.

$f^{\leftarrow}(B) := \{\, x \in X : f(x) \in B \,\} \subseteq X$ original skupa B. Uobičajena je oznaka $f^{-1}(B)$.

$|z|$ modul kompleksnog broja z, str. 1

$\mathfrak{i} = \sqrt{-1}$ imaginarna jedinica, str. 2

$\overline{z}$ konjugirano kompleksan broj, $\overline{x + \mathfrak{i}\,y} = x - \mathfrak{i}\,y$, str. 2

$\arg z$ argument kompleksnog broja z; kut između pozitivnog smjera realne osi i radijvektora točke z, str. 2

(ii) $\int_\gamma \omega = 0$ *za sve PDG zatvorene puteve γ u Ω.*

(iii) *Postoji glatka realna funkcija $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ takva da je $F_i = \partial_i f$, $i = 1,\dots,n$. U tom je slučaju $\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ za svaki PDG put $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$.*

Definicija 25.2 Za zatvoren po dijelovima gladak put γ u $\mathbb{R}^{2^*} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, broj

$$\nu(\gamma, O) := \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$$

naziva se ***indeks***, ili ***namotajni broj***, ***puta*** γ ***s obzirom na točku*** $O = (0,0)$, ishodište. Diferencijalnu 1-formu $\frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$ nazivamo ***kutnom formom*** i označavamo ω_ϑ.

Translacijom ishodišta možemo definirati indeks zatvorenog puta γ s obzirom na bilo koju točku $P_0 = (x_0, y_0)$ koja ne leži na slici $\gamma^\clubsuit$ toga puta, kao

$$\nu(\gamma, P_0) := \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \omega_{\vartheta, P_0}\,,$$

gdje je $\omega_{\vartheta,P_0}(x,y) := \dfrac{-(y-y_0)\,dx + (x-x_0)\,dy}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$. Kao i kad se radi o ishodištu, indeks je jednak broju obilazaka, u pozitivnom smjeru, zatvorenog puta γ oko točke P_0.

Teorem 26.3 (o integralu zatvorene forme po homotopnim putevima) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, ω zatvorena diferencijalna 1-forma na Ω a γ i η u Ω glatko homotopni putevi od točke P do točke Q. Tada $\int_\gamma \omega = \int_\eta \omega$.*

Teorem 26.4 *Neka su γ i η zatvoreni putevi u otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, a ω zatvorena diferencijalna 1-forma na Ω. Ako su γ i η glatko homotopni kao zatvoreni putevi u Ω, onda je $\int_\gamma \omega = \int_\eta \omega$.*

Korolar 26.5 *Neka je ω zatvorena diferencijalna 1-forma na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Tada je $\int_\gamma \omega = 0$ za svaki po dijelovima gladak zatvoren put γ koji je nulhomotopan u Ω.*

Teorem 27.1 (Greenov teorem za pravokutnik — sirova verzija) *Neka je $I := [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ pravokutnik, a $F, G\colon I \to \mathbb{R}$ neka su diferencijabilne funkcije klase C^1 (dakle, definirane su i neprekidno diferencijabilne na nekoj okolini pravokutnika I). Tada je*

$$\int_I \partial_x G - \partial_y F = \int_a^b F(x,c)\,dx + \int_c^d G(b,y)\,dy - \int_a^b F(x,d)\,dx - \int_c^d G(a,y)\,dy\,.$$

(*i*) *funkcija* $y \mapsto f(x,y)$ *je R-integrabilna na* $[c,d]$ *za svaki* $x \in [a,b]$;

(*ii*) *funkcija* $x \mapsto \int_c^d f(x,y)\,dy$ *je R-integrabilna na* $[a,b]$;

(*iii*) *vrijedi jednakost*

$$\int_I f = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy \Big)\,dx\,.$$

Analogne tvrdnje vrijede ako x i y zamijene uloge.

Korolar 19.6 *Neka je funkcija* $f\colon [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ *neprekidna. Tada za svaki* $x_0 \in [a,b]$ *vrijedi*

$$\lim_{x\to x_0} \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d f(x_0,y)\,dy = \int_c^d \lim_{x\to x_0} f(x,y)\,dy\,.$$

Kaže se da „limes i integral komutiraju".

Teorem 19.8 *Neka je* $f\colon I = [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ *R-integrabilna funkcija koja ima neprekidnu parcijalnu derivaciju* $\partial_1 f$ *na* I. *Tada je funkcija* $F(x) := \int_c^d f(x,y)\,dy$ *neprekidno diferencijabilna na* $[a,b]$, *tj.* $F \in C^1([a,b])$, *i derivacija je jednaka*

$$F'(x) = \int_c^d \partial_1 f(x,y)\,dy\,, \quad x \in [a,b]\,.$$

Teorem 20.1 (o zamjeni varijabli u dvostrukom integralu) *Neka je* $K \subseteq \mathbb{R}^2$ *kompaktan J-izmjeriv skup,* $\Omega \supseteq K$ *otvoren skup, a* $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ *injektivno diferencijabilno preslikavanje klase* C^1 *takvo da je diferencijal* $D\varphi(P)$ *regularan u svim točkama* $P \in \Omega$. *Tada za svaku R-integrabilnu funkciju* $f\colon \varphi(K) \to \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$\int_{\varphi(K)} f = \int_K (f\circ\varphi)\,|\det D\varphi|\,.$$

4 Integrali duž puteva i krivulja

Teorem 25.2 *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *otvoren skup, a* $\omega = F_1\,dx_1 + F_2\,dx_2 + \cdots + F_n\,dx_n$ *diferencijalna 1-forma na* Ω. *Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(*i*) *Integral 1-forme* ω *ne ovisi o putu, tj.* $\int_\gamma \omega = \int_\eta \omega$ *za svaka dva PDG puta* γ *i* η *u* Ω *koji imaju zajedničke početke i zajedničke krajeve.*

$f'(z_0)$ derivacija funkcije f u točki z_0, str. 3

$D(\Omega)$ skup svih funkcija derivabilnih na Ω, str. 3

$\mathbb{C}_\pi := \mathbb{C}\setminus\{(x,0) : x \le 0\}$ komplement negativnog dijela realne osi u kompleksnoj ravnini, str. 7

$\mathbb{C}_\vartheta$ komplement polupravca iz ishodišta koji s pozitivnim dijelom realne osi zatvara kut ϑ, str. 10

$\int_\gamma f\,dz$ integral kompleksne funkcije f duž puta γ, str. 10

$H(\Omega)$ skup svih funkcija holomorfnih na Ω, str. 31

$\sum x_n$ red, str. 42

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ suma reda $\sum x_n$, tj. limes $\lim_n \sum_{k=1}^{n} x_k$, str. 42

$\limsup \rho_n$ limes superior niza ρ_n, str. 49

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n$ dvostrani red; red čiji su članovi indeksirani cijelim brojevima, str. 61

$K^*(z_0,R) := K(z_0,R)\setminus\{z_0\}$ probušen krug, str. 64

$\mathrm{res}(f,z_0)$ reziduum funkcije f u točki z_0, str. 77

$r(z_0,f)$ red nultočke ili pola funkcije f, str. 80

$N_\Gamma(f)\,, P_\Gamma(f)$ broj nultočaka odnosno polova meromorfne funkcije f koji se nalaze u unutrašnjem području konture Γ, i to računajući njihov red, str. 81

$S(\gamma)$ singularan skup preslikavanja γ, str. 100

$(\Gamma, \mathcal{G})$ krivulja, str. 100

Teorem 9.6 (Schwarzov teorem) *Neka je $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija klase C^2 na Ω. Tada je*

$$\partial_i \partial_j f(P) = \partial_j \partial_i f(P)$$

za sve $i, j = 1, \ldots, n$ i $P \in \Omega$.

Teorem 12.1 (o inverznom preslikavanju) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ preslikavanje klase C^1 na Ω i neka je u točki $P_0 \in \Omega$ diferencijal $Df(P_0)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ regularan operator. Tada postoje okoline $U \subseteq \mathbb{R}^n$ oko P_0 i $V \subseteq \mathbb{R}^n$ oko $Q_0 := f(P_0)$ takve da je $f|_U\colon U \to V$ bijekcija. Inverzno preslikavanje $g := (f|_U)^{-1}\colon V \to U$ je diferencijabilno klase C^1 i vrijedi*

$$Dg(f(P)) = Df(P)^{-1}\,, \ \ P \in U\,.$$

Teorem 12.2 *Neka je $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ preslikavanje klase C^1 takvo da je diferencijal $Df(P)$ regularan za sve $P \in \Omega$. Tada je za svaki otvoreni skup $W \subseteq \Omega$, slika $f(W)$ otvoren skup, tj. f je* ***otvoreno preslikavanje****. Specijalno je skup $f(\Omega)$ otvoren.*

Teorem 13.1 (Taylorov teorem srednje vrijednosti) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ diferencijabilno preslikavanje klase C^{k+1} i $[P_0, P] \subseteq \Omega$. Tada postoji $\vartheta_P \in \langle 0, 1\rangle \subseteq \mathbb{R}$ takav da je*

$$\begin{aligned} f(P) = f(P_0) &+ \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} D^j f(P_0)(P - P_0) + \\ &+ \frac{1}{(k+1)!} D^{k+1} f\big(P_0 + \vartheta_P (P - P_0)\big)(P - P_0)\,. \end{aligned}$$

3 Riemannov integral

Teorem 16.6 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ preslikavanje klase C^1. Ako je $A \subseteq \Omega$ skup mjere nula, onda je i $\varphi(A)$ skup mjere nula.*

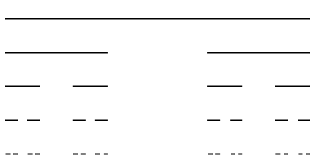
Teorem 19.1 (Fubinijev teorem) *Neka je $I = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ pravokutnik, a $f\colon I \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija takva da je skup D točaka u kojima f nije neprekidna, skup (dvodimenzionalne) mjere nula. Ako za svaki $x \in [a, b]$ skup $D_x := \{y \in [c, d] : (x, y) \in D\}$ ima (jednodimenzionalnu) mjeru nula, onda:*

Teorem 4.16 *Neka su X, Y metrički prostori, a $BC(X,Y)$ skup svih omeđenih neprekidnih preslikavanja s X u Y. $BC(X,Y)$ je zatvoren potprostor od $B(X,Y)$, tj. limes (s obzirom na metriku ρ u prostoru $B(X,Y)$) niza neprekidnih omeđenih preslikavanja je neprekidno omeđeno preslikavanje.*

Korolar 4.17 *Prostor $BC(X,Y)$ svih omeđenih neprekidnih preslikavanja metričkog prostora X u potpun metrički prostor (Y,d) je potpun metrički prostor.*

Teorem 4.19 *Neka su X i Y metrički prostori, $A \subseteq X$ gust podskup, i neka je $f\colon A \to Y$ uniformno neprekidno preslikavanje. Ako je prostor Y potpun, onda se f može proširiti, i to na jedinstven način, na čitav X, tj. postoji jedno jedino neprekidno preslikavanje $\hat{f}\colon X \to Y$ takvo da je $\hat{f}|_A = f$. Preslikavanje $\hat{f}$ čak je uniformno neprekidno.*

Primjer 5.1 (Cantorov trijadski skup) *Neka je $E_1 = \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$ srednja trećina segmenta $I = [0,1]$, $E_2 = \langle \frac{1}{9}, \frac{2}{9} \rangle \cup \langle \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \rangle$ unija srednjih trećinâ komponenata skupa $I \setminus E_1$, $E_3 = \langle \frac{1}{27}, \frac{2}{27} \rangle \cup \langle \frac{7}{27}, \frac{8}{27} \rangle \cup \langle \frac{19}{27}, \frac{20}{27} \rangle \cup \langle \frac{25}{27}, \frac{26}{27} \rangle$ unija srednjih trećinâ komponenata skupa $I \setminus (E_1 \cup E_2)$, itd. Skup $\mathbf{C} := I \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ je Cantorov trijadski skup.*



Prvih pet koraka u konstrukciji Cantorova skupa

Teorem 5.5 *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Tada postoji rastući niz kompaktnih skupova $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots \subseteq K_i \subseteq K_{i+1} \subseteq \ldots \subseteq U$ takvih da je $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$.*

Korolar 5.10 *Neka je K kompaktan skup u metričkom prostoru X, a U otvoren skup takav da je $K \subseteq U$ i $U \neq X$. Tada je $d(K, X \setminus U) > 0$.*

Teorem 5.12 *Neka je $f\colon K \to L$ neprekidna bijekcija metričkih prostora. Ako je K kompaktan, onda je i inverzno preslikavanje $g = f^{-1}\colon L \to K$ neprekidno, tj. f je homeomorfizam s K na L.*

2 Diferencijal i derivacije

Teorem 9.1 *Neka je $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikavanje za koje postoje parcijalne derivacije na Ω. Ako su sve derivacije $\partial_i f_j$ neprekidne u $P_0 \in \Omega$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, tada je f diferencijabilno u P_0.*

5

Kompleksne funkcije

U ovom ćemo poglavlju započeti proučavanje kompleksnih funkcija jedne kompleksne varijable. Skup kompleksnih brojeva označavat ćemo s $\mathbb{C}$. Njegovi su elementi uređeni parovi realnih brojeva, $\mathbb{C} := \{\, z = (x,y) : x, y \in \mathbb{R} \,\}$, dakle, kao skup, $\mathbb{C}$ je isto što i $\mathbb{R}^2$. Prva komponenta x kompleksnog broja $z = (x,y)$ naziva se njegov *realni dio*, i označava se $\Re(z)$ ili $\operatorname{Re} z$, a druga komponenta, tj. realan broj y, naziva se *imaginarni dio*, i označava se $\Im(z)$ ili $\operatorname{Im} z$.

I kao abelova grupa, $\mathbb{C}$ se podudara s $\mathbb{R}^2$ — zbrajanje je definirano *po koordinatama*, kao i u $\mathbb{R}^2$. *Modul* $|z|$ kompleksnog broja $z = (x,y)$, definira se kao $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$, pa je to isto što i (euklidska) norma u $\mathbb{R}^2$. To omogućuje definiciju *udaljenosti, metrike*, pa $\mathbb{C}$ dobiva i strukturu metričkog prostora. I kao metrički prostor, $\mathbb{C}$ se podudara s $\mathbb{R}^2$. Otvoreni, zatvoreni, kompaktni,… skupovi su, dakle, isti kao u $\mathbb{R}^2$ — o njima nemamo stoga ništa novoga reći. Kako neprekidnost funkcija ovisi samo o topološkoj strukturi, niti o tome nemamo ništa novoga reći: funkcija $f\colon \mathbb{C} \supseteq S \to \mathbb{C}$ neprekidna je u točki $z_0 \in S \subseteq \mathbb{C}$, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $z \in S$ za koje je $|z - z_0| < \delta$, vrijedi $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Isto tako je i konvergencija nizova u $\mathbb{C}$ ista kao i konvergencija u $\mathbb{R}^2$, a isto vrijedi i za Cauchyjevo svojstvo, pa je $\mathbb{C}$, između ostalog, potpun metrički prostor.

Novost nastupa uvođenjem *množenja kompleksnih brojeva* $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, formulom

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2\,,\, x_1 y_2 + x_2 y_1)\,.$$

Ovako definirano množenje je asocijativno, komutativno, ima neutralni element — kompleksan broj $(1,0)$, distributivno je prema zbrajanju, i svaki kompleksan broj $z=(x,y)\in\mathbb{C}^*:=\mathbb{C}\setminus\{(0,0)\}$ ima inverz

$$\frac{1}{z}:=z^{-1}=\Big(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\Big)\ .$$

Tako $\mathbb{C}$ postaje polje.

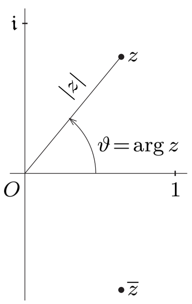
Kompleksni brojevi oblika $(x,0)$ ponašaju se kao realni brojevi, tj. vrijedi $(x_1,0)+(x_2,0)=(x_1+x_2,0)$ i $(x_1,0)\cdot(x_2,0)=(x_1\cdot x_2,0)$. Stoga realne brojeve identificiramo s kompleksnim brojevima kojima je imaginarni dio jednak nuli, $x\equiv(x,0)$. Tako $\mathbb{R}$ postaje podskupom od $\mathbb{C}$, a kako su algebarske i topološke strukture usklađene, to je, algebarski gledano, $\mathbb{R}$ potpolje od $\mathbb{C}$, a topološki gledano, $\mathbb{R}$ je (metrički) potprostor od $\mathbb{C}$. Ovako smješten skup $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$, tj. skup brojeva oblika $x\equiv(x,0)$, $x\in\mathbb{R}$, naziva se *realna os*.

Kompleksan broj $(1,0)$, koji je, uz identifikaciju $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$, zapravo realan broj 1, ima ulogu jedinice za množenje. S druge strane, vrijedi $(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)\equiv-1$, pa se broj $(0,1)$ naziva *korijen od* -1, ili *imaginarnom jedinicom*, i standardno se označava s $\mathfrak{i}=\sqrt{-1}$. Tako dolazimo i do uobičajene oznake za kompleksne brojeve, $z=x+\mathfrak{i}\,y$, jer je

$$(x,y)=(x,0)\cdot(1,0)+(y,0)\cdot(0,1)\equiv x\cdot 1+y\cdot\mathfrak{i}\ .$$

Skup brojeva oblika $\mathfrak{i}\,y\equiv(0,y)$, $y\in\mathbb{R}$, naziva se *imaginarna os*.

I za funkciju $f\colon\mathbb{C}\supseteq S\to\mathbb{C}$ često pišemo $f=u+\mathfrak{i}\,v$, tj. $f(z)=(u(z),v(z))$, gdje su $u,v\colon S\to\mathbb{R}$ realne funkcije, jedne kompleksne, odnosno dvije realne, varijable. Kako se topološke strukture prostora $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}^2$ podudaraju, to je funkcija f neprekidna ako, i samo ako su obje funkcije u i v neprekidne.



Zrcaljenje kompleksne ravnine s obzirom na realnu os, naziva se *konjugiranje* kompleksnih brojeva. To je funkcija $z\mapsto\overline{z}$ definirana kao $\overline{z}:=(x,-y)$, tj. $\overline{x+\mathfrak{i}\,y}:=x-\mathfrak{i}\,y$. Konjugiranje je neprekidna funkcija, i često se koristi. Vrijedi, naprimjer, $|z|=\sqrt{z\,\overline{z}}$ i $\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Kompleksni broj, kao točka u ravnini, može se reprezentirati i *polarnim koordinatama*, $z=|z|(\cos\vartheta+\mathfrak{i}\sin\vartheta)$, pri čemu je ϑ kut između pozitivnog smjera realne osi i radijvektora točke z. Kut ϑ naziva se *argument* kompleksnog broja, i označava s $\arg z$.

Uz oznaku $e^{\mathfrak{i}\,\vartheta}:=\cos\vartheta+\mathfrak{i}\sin\vartheta$, može se pisati $z=|z|(\cos\vartheta+\mathfrak{i}\sin\vartheta)=|z|\,e^{\mathfrak{i}\,\vartheta}$. Lako je pokazati da se ovakav zapis kompleksnog broja u mnogočemu ponaša

Korišteni teoremi i neke definicije iz Matematičke analize u $\mathbb{R}^n$

U ovom dodatku navodimo one teoreme iz *Matematičke analize u* $\mathbb{R}^n$ koje smo rabili i na koje smo se na raznim mjestima pozivali, i to s numeracijom iz [6], kako smo i citirali.

1 Neprekidnost i limes

Teorem 2.2 (Lema o uniji preslikavanja) *Neka je $X=A\cup B$ gdje su A i B zatvoreni podskupovi od X te neka su $f\colon A\to Y$ i $g\colon B\to Y$ neprekidna preslikavanja takva da je $f|_{A\cap B}=g|_{A\cap B}$. Tada je i preslikavanje $h\colon X\to Y$ definirano s*

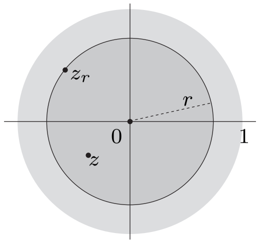
$$h(P)=\begin{cases} f(P)\ , & P\in A\\ g(P)\ , & P\in B\end{cases}$$

neprekidno. Ista tvrdnja vrijedi i kada su A i B otvoreni podskupovi od X.

Korolar 2.12 (jedinstvenost neprekidnog proširenja na zatvorenje) *Neka su X i Y metrički prostori, a $f,g\colon X\to Y$ dva neprekidna preslikavanja, te neka je $f\big|_A=g\big|_A$ za neki podskup $A\subseteq X$. Tada je i $f\big|_{\overline{A}}=g\big|_{\overline{A}}$.*

Teorem 4.13 (Cantorov teorem o presjeku) *Neka je (X,d) potpun metrički prostor, $F_1\supseteq F_2\supseteq F_3\supseteq\dots$ silazni niz nepraznih zatvorenih podskupova od X takvih da je $\lim\limits_k \operatorname{diam}F_k=0$. Tada je presjek $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}}F_k$ neprazan i sastoji se od točno jedne točke.*

Neka je $z \in K(0,1)$ proizvoljna točka. Za svaki r takav da je $|z| < r < 1$, modul funkcije $g|_{\overline{K}(0,r)}$ poprima maksimum na rubu toga kruga, korolar 42.7, tj. postoji točka z_r, $|z_r| = r$, takva da je $|g(z')| \leq |g(z_r)|$ za sve $z' \in K(0,r)$, specijalno za $z' = z$. Zbog toga je



$$|g(z)| \leq |g(z_r)| = \frac{|f(z_r)|}{|z_r|} < \frac{1}{r} .$$

Kako to vrijedi za svaki r, $|z| < r < 1$, zaključujemo da je $|g(z)| \leq 1$. Točka z je bila proizvoljna, pa je $|g(z)| \leq 1$ za sve $z \in K(0,1)$.

Ako postoji $z_0 \in K(0,1)$ takav da je $|g(z_0)| = 1$, onda je, prema teoremu o maksimumu modula, korolar 42.6, funkcija g konstantna, i to jednaka konstanti modula 1, pa postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $g(z) = e^{\mathrm{i}\,\alpha}$, dakle i $f(z) = z\, e^{\mathrm{i}\,\alpha}$, za sve $z \in K(0,1)$. U protivnom je $|g(z)| < 1$ za sve $z \in K(0,1)$, pa je $|f(z)| < |z|$ za sve $z \in K^*(0,1)$. ■

Schwarzova lema formulira se često i ovako:

Korolar 42.9 (Schwarzova lema) *Neka je $f\colon K(0,1) \to K(0,1)$ holomorfna funkcija takva da je $f(0) = 0$. Tada je ili $|f'(0)| < 1$, ili postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $f(z) = z\, e^{\mathrm{i}\,\alpha}$, za sve $z \in K(0,1)$.*

Dokaz: Za funkciju g, kao u dokazu prethodnog korolara, je ili $|g(0)| < 1$, ili $|g(0)| = 1$. U prvom slučaju je $|f'(0)| = |g(0)| < 1$, a u drugom se, na isti način kao u dokazu prethodnog korolara, pokazuje da je f rotacija. ■

Nekad je korisna i oslabljena verzija Schwarzove leme:

Korolar 42.10 *Ako je $f\colon K(0,1) \to K(0,1)$ holomorfna funkcija takva da je $f(0) = 0$, onda je $|f(z)| \leq |z|$, za sve $z \in K(0,1)$.* ■

kao uobičajena eksponencijalna funkcija. Naprimjer, vrijedi $e^{\mathrm{i}\,\vartheta} e^{\mathrm{i}\,\varphi} = e^{\mathrm{i}\,(\vartheta+\varphi)}$, pa za množenje dobivamo $z_1\, z_2 = |z_1||z_2| e^{\mathrm{i}\,(\vartheta_1+\vartheta_2)}$.

Prema svemu dosad rečenom, izgleda kao da će se analiza kompleksnih funkcija jedne kompleksne varijable svesti na analizu funkcija dviju realnih varijabli, točnije na analizu funkcija iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$. To je, međutim, daleko od istine. Velike razlike nastaju uvođenjem derivacije kompleksne funkcije.

§ 31 Derivacija kompleksne funkcije

Derivaciju kompleksne funkcije definiramo na isti način kao i derivaciju realne funkcije jedne realne varijable.

Definicija 31.1 Za funkciju $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, gdje je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, kažemo da je ***derivabilna u točki*** $z_0 \in \Omega$, ako postoji limes $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$. U tom slučaju taj limes označavamo $f'(z_0)$ i zovemo ***derivacija*** funkcije f u točki z_0.

Za funkciju $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ kažemo da je ***derivabilna***, ako je derivabilna u svim točkama skupa Ω.

Skup svih funkcija derivabilnih na Ω, označavat ćemo s $D(\Omega)$.

Kao i u slučaju realne funkcije realne varijable, direktno se iz definicije lako pokazuje da se derivabilnost čuva sumom, produktom, kompozicijom,…, da vrijede uobičajene formule za derivacije, i da je svaka derivabilna funkcija neprekidna.

Primjer 31.1 Potencija, $f(z) := z^n$, derivabilna je na cijeloj kompleksnoj ravnini, i njezina derivacija je, kao i u slučaju realne funkcije realne varijable, jednaka $f'(z) = n\, z^{n-1}$. To se lako dokaže, bilo neposredno iz definicije, bilo indukcijom korištenjem formule za derivaciju produkta.

Funkcija $f(z) := \frac{1}{2}(z+\overline{z})$ *nije* derivabilna, iako je, do na faktor $\frac{1}{2}$, suma dviju ‚lijepih' funkcija — identitete i konjugiranja. Zaista, kada bi f bila derivabilna, postojao bi u $z_0 = (x_0, y_0)$ limes kvocijenta $\left|\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| = \left|\dfrac{x - x_0}{z - z_0}\right| = |\cos\vartheta|$, gdje je $\vartheta = \arg(z - z_0)$. Međutim, limes ovog izraza ne postoji, jer $|\cos\vartheta|$ oscilira između 0 i 1.

To znači da konjugiranje $z \mapsto \overline{z}$ *nije* derivabilna funkcija, iako su joj i realni i imaginarni dio, s aspekta realnih funkcija, diferencijabilne funkcije, čak analitička, tj. klase C^ω.

Sljedeći teorem daje nužne i dovoljne uvjete koje moraju zadovoljavati realne funkcije u i v, da bi kompleksna funkcija $f = u + \mathrm{i}\, v$ bila derivabilna.

Teorem 31.1 (Cauchy-Riemannov teorem) *Kompleksna funkcija $f = u + \mathrm{i}\, v\colon \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna je u točki $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ ako, i samo ako su funkcije u i v, kao realne funkcije dviju realnih varijabli, diferencijabilne u točki (x_0, y_0), i zadovoljavaju ove* ***Cauchy-Riemannove uvjete****:*

$$\begin{aligned} \partial_x u(x_0, y_0) &= \partial_y v(x_0, y_0) \\ \partial_y u(x_0, y_0) &= -\partial_x v(x_0, y_0)\,. \end{aligned} \tag{CR}$$

Dokaz: Neka je funkcija f derivabilna u $z_0 = (x_0, y_0)$ i neka je $f'(z_0) = a + \mathrm{i}\, b \in \mathbb{C}$. Tada je

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - (a + \mathrm{i}\, b)\right| =$$

$$= \frac{\left|u(x,y) + \mathrm{i}\, v(x,y) - u(x_0,y_0) - \mathrm{i}\, v(x_0,y_0) - (a + \mathrm{i}\, b)\big((x - x_0) + \mathrm{i}\,(y - y_0)\big)\right|}{|z - z_0|}$$

$$= \frac{\left|u(x,y) - u(x_0,y_0) - a(x-x_0) + b(y-y_0) + \mathrm{i}\,\big(v(x,y) - v(x_0,y_0) - a(y-y_0) - b(x-x_0)\big)\right|}{|z - z_0|}\,.$$

Kako je $\lim\limits_{z \to z_0} \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - (a + \mathrm{i}\, b)\right| = 0$, i $|z - z_0| = \|(x - x_0, y - y_0)\|$, to je i

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{|u(x,y) - u(x_0,y_0) - a(x - x_0) + b(y - y_0)|}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0\,, \text{ i}$$

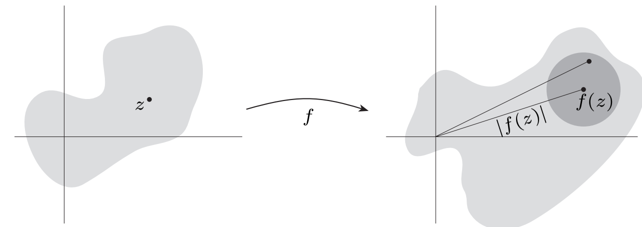
$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{|v(x,y) - v(x_0,y_0) - b(x - x_0) - a(y - y_0)|}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0\,.$$

To znači da su funkcije $u, v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ diferencijabilne u $(x_0, y_0) = z_0$, i da je

$$\begin{aligned} \partial_x u(x_0, y_0) &= a = \partial_y v(x_0, y_0) \\ \partial_y u(x_0, y_0) &= -b = -\partial_x v(x_0, y_0)\,. \end{aligned}$$

Time je nužnost dokazana. Obrnutim redoslijedom zaključivanja, dobivamo i dovoljnost. ■

Dokaz: Prema teoremu o otvorenom preslikavanju, korolar 42.3, skup $f(\Omega)$ je otvoren, pa za svaki $z \in \Omega$, oko točke $f(z)$ postoji krug $K(f(z), \varepsilon) \subseteq f(\Omega)$, a u njemu očito ima točaka kojima je modul veći od $|f(z)|$. ■



I sljedeća se varijanta prethodnog korolara često naziva istim imenom, a za obje verzije koristi se i naziv ***Princip maksimuma modula***.

Korolar 42.7 *Neka je $K \subseteq \Omega$ kompaktan skup, a $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija koja nije konstantna niti na jednoj okolini niti jedne točke nutrine skupa K. Tada modul funkcije $f\big|_K$ poprima maksimum samo u nekoj točki ruba $\partial K = K \setminus \operatorname{Int} K$ skupa K.* ■

Malo pojednostavljeno rečeno, ako je funkcija f holomorfna u svim točkama kompaktnog skupa K, onda modul $|f|$, koji kao neprekidna funkcija na kompaktu mora imati maksimum, taj maksimum poprima jedino u točkama ruba.

Korolar 42.8 (Schwarzova[1] lema) *Neka je $f\colon K(0,1) \to K(0,1)$ holomorfna funkcija takva da je $f(0) = 0$. Tada je ili $|f(z)| < |z|$ za sve $z \in K^*(0,1)$, ili je f rotacija, tj. postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $f(z) = z\, e^{\mathrm{i}\,\alpha}$, za sve $z \in K(0,1)$.*

Drugačije rečeno, holomorfno preslikavanje jediničnog kruga na sâma sebe koje fiksira središte kruga, je ili rotacija, dakle, izometrija, ili ima svojstvo da svaku točku, osim središta koje drži fiksnim, približi središtu kruga.

Dokaz: Definirajmo pomoćnu funkciju $g\colon K(0,1) \to \mathbb{C}$ formulom

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & , \ z \neq 0 \\ f'(0) & , \ z = 0 \end{cases}\,.$$

Funkcija g je holomorfna na probušenom krugu $K^*(0,1)$ i neprekidna je u 0, pa je, prema korolaru 34.11, holomorfna na cijelom krugu $K(0,1)$.

[1] Karl Herman Amandus Schwarz (1843–1921), njemački matematičar

tj. diferencijal preslikavanja $f=(u,v)$ je u točki (x_0,y_0) regularan. Prema teoremu o inverznom preslikavanju, postoje otvoreni skupovi U oko točke (x_0,y_0) i V oko točke $f(x_0,y_0)\;=:\;(\xi_0,\eta_0)$, takvi da je $f\big|_U\colon U\to V$ bijekcija, a inverzno preslikavanje $g=(p,q)\colon V\to U$ je diferencijabilno klase C^1, i vrijedi $Dg(\xi,\eta)=\big(Df(x,y)\big)^{-1}$, za sve $(\xi,\eta)=f(x,y)\in V$. To znači da je

$$\frac{\partial(p,q)}{\partial(\xi,\eta)}(\xi,\eta)=\Big(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x,y)\Big)^{-1}=\frac{1}{\det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x,y)}\begin{pmatrix}\partial_x u & \partial_x v\\ -\partial_x v & \partial_x u\end{pmatrix}_{(x,y)},$$

pa i za funkciju $g=(p,q)$ vrijede Cauchy-Riemannovi uvjeti, tj. funkcija g, shvaćena kao kompleksna funkcija, holomorfna je u točki $f(z_0)$.

Korolar 42.5 (Teorem o holomorfnom izomorfizmu) *Neka je holomorfna funkcija $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ injektivna. Tada je $f'(z)\neq 0$ za sve $z\in\Omega$, skup $f(\Omega)\subseteq\mathbb{C}$ je otvoren, i inverzna funkcija $g\colon f(\Omega)\to\Omega$ bijekcije $f\colon\Omega\rightarrowtail f(\Omega)$ je holomorfna, tj. $f\colon\Omega\to f(\Omega)$ je **holomorfni** ili **analitički izomorfizam**.*

Dokaz: Kada bi postojala točka $z_0\in\Omega$ takva da je $f'(z_0)=0$, onda bi z_0 bila nultočka funkcije $z\mapsto f(z)-f(z_0)$ reda barem 2, pa, prema Weierstrassovom pripremnom teoremu 42.1, funkcija f ne bi mogla biti injekcija na nekoj okolini točke z_0.

Kako je f injektivno preslikavanje, korestrikcija $f\colon\Omega\to f(\Omega)$ je bijekcija, pa postoji inverzno preslikavanje $g\colon f(\Omega)\to\Omega$. Prema teoremu o otvorenom preslikavanju, zapravo korolaru 42.3, skup $f(\Omega)\subseteq\mathbb{C}$ je otvoren, pa ima smisla govoriti o holomorfnosti preslikavanja g.

Prema teoremu o lokalnoj invertibilnosti holomorfne funkcije, teorem 42.4, oko svake točke z skupa Ω, postoji okolina i na njoj holomorfni inverz funkcije f. Ali, inverzna funkcija je jedinstvena, pa se takav lokalni inverz, na toj okolini podudara s restrikcijom funkcije g. Zbog lokalnog karaktera derivabilnosti, to znači da i funkcija g ima na toj okolini derivaciju, pa je ona holomorfna u z, dakle, $g\in H(\Omega)$. ■

Kao posljedicu teorema o otvorenom preslikavanju, dobivamo i

Korolar 42.6 (Teorem o maksimumu modula) *Neka je $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ otvoren i povezan skup, a $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Ako f nije konstantna funkcija onda je ona ili neomeđena ili je $|f(z)|<\sup_{\zeta\in\Omega}|f(\zeta)|$ za svaki $z\in\Omega$, tj. $|f|$ nema na području Ω maksimum.*

Korolar 31.2 *Ako je funkcija $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ derivabilna u $z_0=(x_0,y_0)\in\Omega$, onda je*

$$\begin{aligned}f'(z_0)&=\partial_x u(x_0,y_0)+\mathrm{i}\,\partial_x v(x_0,y_0)=:\partial_x f(z_0)\\&=\partial_x u(x_0,y_0)-\mathrm{i}\,\partial_y u(x_0,y_0)\\&=\partial_y v(x_0,y_0)-\mathrm{i}\,\partial_y u(x_0,y_0)=:-\mathrm{i}\,\partial_y f(z_0)=\frac{1}{\mathrm{i}}\partial_y f(z_0)=:\frac{\partial f}{\partial(\mathrm{i}\,y)}(z_0)=:\partial_{\mathrm{i}y}f(z_0)\\&=\partial_y v(x_0,y_0)+\mathrm{i}\,\partial_x v(x_0,y_0)\,.\end{aligned}$$

Uz oznake uvedene u ovim formulama, oba Cauchy-Riemannova uvjeta možemo zapisati jednom formulom: $\partial_x f(z_0)=\partial_{\mathrm{i}y}f(z_0)$. ■

Korolar 31.3 *Ako je funkcija $f=u+\mathrm{i}\,v\colon\Omega\to\mathbb{C}$ derivabilna, a realne funkcije u i v su diferencijabilne klase C^2 (vidjet ćemo kasnije da to već slijedi iz derivabilnosti kompleksne funkcije f), onda su u i v **harmoničke funkcije**, tj. obje zadovoljavaju Laplaceovu[1] diferencijalnu jednadžbu*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,.$$

Dokaz: Zbog Cauchy-Riemannovih uvjeta je $\partial_x u=\partial_y v$, pa deriviranjem po x dobivamo

$$\partial_x\partial_x\,u=\partial_x\partial_y\,v\overset{\text{Schwarz}}{=}\partial_y\partial_x\,v\overset{\text{(CR)}}{=}-\partial_y\partial_y\,u\,,$$

i slično za funkciju v. ■

Napomena 31.1 Teorem 31.1 i korolar 31.3 pokazuju kako su strogi zahtjevi na realne funkcije u i v da bi kompleksna funkcija $f=u+\mathrm{i}\,v$ bila derivabilna. S druge strane, za neprekidnost od f bila je dovoljna samo neprekidnost od u i v, i nije se zahtijevala nikakva međusobna veza tih funkcija. Otkuda tolika restrikcija kada se radi o derivabilnosti?

Uzrok tome je sljedeći. Diferencijabilnost funkcije u nekoj točki, što je za funkcije jedne varijable ekvivalentno derivabilnosti u toj točki, znači da se prirast te funkcije može aproksimirati linearnom funkcijom (linearnim operatorom). Kod kompleksnih funkcija to znači $\mathbb{C}$-*linearnim operatorom.* Međutim, $\mathbb{C}$-linearnih operatora $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ima manje nego $\mathbb{R}$-linearnih operatora $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, kakvi se koriste za aproksimaciju vektorskih funkcija dviju realnih varijabli, točnije funkcija $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$.

Naime, da bi $\mathbb{R}$-linearan operator $A\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ reprezentiran matricom $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ bio, shvaćen kao funkcija $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, i $\mathbb{C}$-linearan, nužno je i dovoljno da vrijedi

[1] Pierre-Simon Laplace (1749–1827), francuski matematičar

$a = d$ i $b = -c$. Zaista, ako je $A\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kompleksno-linearan operator, onda za skalar $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ i svaki $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, mora vrijediti $A(\mathrm{i}\, z) = \mathrm{i}\, A(z)$, odakle specijalno za $z = (1, 0)$, dobivamo $a = d$ i $b = -c$.

Da su ta dva uvjeta i dovoljna za $\mathbb{C}$-linearnost funkcije A, lako se provjeri direktno.

Tako dobivamo upravo Cauchy-Riemannove uvjete, jer je Jacobijeva matrica, a to je matrica koja reprezentira diferencijal funkcije $f = (u, v)\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$, jednaka $\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$.

Dakle, ako funkcija $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ima (kompleksnu) derivaciju (što je ekvivalentno diferencijabilnosti u smislu kompleksnih funkcija), onda je f shvaćena kao funkcija iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$ diferencijabilna, ali obratno vrijedi samo ako su još zadovoljeni i Cauchy-Riemannovi uvjeti.

Korolar 31.4 *Ako je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren i povezan skup, a $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija takva da je $f'(z) = 0$ za sve $z \in \Omega$, onda je f konstantna funkcija.* ■

Primjer 31.2 Navedimo nekoliko osnovnih primjera derivabilnih kompleksnih funkcija:

Identiteta $f(z) = z$ je derivabilna, i $f'(z) = 1$ za sve $z \in \mathbb{C}$.

Polinomi, tj. funkcije oblika $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, gdje su $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, \ldots, n$, derivabilne su funkcije, i derivacija je jednaka $p'(z) = n\, a_n z^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + a_1$.

Racionalne funkcije, tj. kvocijenti dvaju polinoma, derivabilne su svuda gdje su definirane, dakle, svuda osim u nultočkama nazivnika.

Eksponencijalna funkcija kompleksne varijable je funkcija $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definirana s

$$\exp z = e^z = e^{x + \mathrm{i}\, y} := e^x (\cos y + \mathrm{i}\, \sin y)\,.$$

Realni i imaginarni dio funkcije exp očito jesu diferencijabilne funkcije, a Cauchy-Riemannovi uvjeti lako se provjere. Stoga je (kompleksna) eksponencijalna funkcija derivabilna, i za derivaciju nalazimo

$$\exp' z = \partial_x u(z) + \mathrm{i}\, \partial_x v(z) = \exp z\,, \quad \text{tj. } (e^z)' = e^z\,.$$

Primijetimo da je $e^{z + 2\,\mathrm{i}\,\pi} = e^z$, pa je kompleksna eksponencijalna funkcija periodička, i to s osnovnim periodom $2\,\mathrm{i}\,\pi$.

Teorem 42.4 (o lokalnoj invertibilnosti holomorfne funkcije) *Neka je funkcija f holomorfna u točki z_0 i neka je $f'(z_0) \neq 0$. Tada postoje otvoreni skupovi $U \ni z_0$ i $V \ni f(z_0)$ takvi da je $f\big|_U\colon U \to V$ bijekcija, i inverzna funkcija $g := \big(f\big|_U\big)^{-1}\colon V \to U$ je holomorfna u $f(z_0)$.*

Dokaz: Iz pretpostavke $f'(z_0) \neq 0$, slijedi da je z_0 jednostruka nultočka funkcije $z \mapsto f(z) - f(z_0)$. Neka su $\delta > 0$ i $\varepsilon > 0$ kao u Weierstrassovom pripremnom teoremu 42.1, s tim da je δ dovoljno malen da vrijedi i $f'(z) \neq 0$ za sve $z \in K(z_0, \delta)$, što zbog neprekidnosti funkcije f' i napomene na početku dokaza drugog dijela Weierstrassovog teorema, možemo postići. Označimo s $V := K(f(z_0), \varepsilon)$ i $U := K(z_0, \delta) \cap f^{\leftarrow}(V)$. Zbog neprekidnosti funkcije f, skup U je otvoren. Prema Weierstrassovom teoremu, za svaki $w \in V = K(f(z_0), \varepsilon)$, postoji jedan jedini $z \in K(z_0, \delta)$ takav da je $f(z) = w$, što znači da je $f\big|_U\colon U \to V$ bijekcija. Označimo njezin inverz s $g := \big(f\big|_U\big)^{-1}\colon V \to U$. Preslikavanje g je neprekidno, jer, kako je f, prema prethodnom korolaru, otvoreno preslikavanje, za svaki otvoren skup $U' \subseteq U$, skup $g^{\leftarrow}(U') = f(U')$ je otvoren. Stoga su $f\big|_U$ i g homeomorfizmi.

Ostaje pokazati da je funkcija g holomorfna na V, a za to je dovoljno pokazati da je g derivabilna na V. Neka su w, $w' \in V$, i neka su $z := g(w)$ i $z' := g(w') \in U$, tj. $w = f(z)$ i $w' = f(z')$. Tada je

$$\lim_{w' \to w} \frac{g(w') - g(w)}{w' - w} = \lim_{z' \to z} \frac{z' - z}{f(z') - f(z)} = \lim_{z' \to z} \frac{1}{\frac{f(z') - f(z)}{z' - z}}\,.$$

(U ovom smo računu mogli zamijeniti limes $\lim\limits_{w' \to w}$ s limesom $\lim\limits_{z' \to z}$ jer su $f\big|_U$ i g homeomorfizmi.) Ovaj posljednji limes postoji, jer je f holomorfna na U. Stoga postoji i prvi od gornjih limesa, tj. funkcija g derivabilna je u w, a kako je $w \in V$ bila proizvoljna točka, g je derivabilna na V. ■

Napomena 42.1 Pokažimo kako se prethodni teorem može dokazati i koristeći samo teorem o inverznoj funkciji iz realne analize, teorem 12.1, i Cauchy-Riemannov teorem 31.1.

Naime, funkcija f je holomorfna, pa je f' neprekidna. Stoga je f, shvaćena kao funkcija $f = (u, v)\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, diferencijabilna klase C^1. U točki $z_0 = (x_0, y_0)$ je $f'(z_0) = \partial_x u(x_0, y_0) + \mathrm{i}\, \partial_x v(x_0, y_0) \neq 0$, pa, zbog Cauchy-Riemannovih uvjeta, za Jacobijan nalazimo

$$\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)} = \begin{vmatrix} \partial_x u & -\partial_x v \\ \partial_x v & \partial_x u \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)} = |f'(z_0)|^2 \neq 0\,,$$

Kako bismo dokazali i drugi dio teorema, primijetimo najprije da ako su δ i ε kao u teoremu, onda je i svaki $\delta' < \delta$, uz pripadni $\varepsilon' := \min\limits_{|z-z_0|=\delta'} |f(z) - w_0|$, dobar. Nadalje, derivacija f' funkcije f također je holomorfna funkcija, i nije konstantna funkcija 0, $f' \not\equiv 0$. Naime, u protivnom bi sve njezine derivacije bile jednake nuli, pa bi funkcija f bila konstantna na $K(z_0, \delta)$. Stoga su i nultočke funkcije f' izolirane, pa δ možemo odabrati tako da, osim ranijeg zahtjeva, vrijedi i $f'(z) \neq 0$ za sve $z \in K^*(z_0, \delta)$. Zbog toga su, za proizvoljan $w \in K^*(f(z_0), \varepsilon)$, sve nultočke funkcije $z \mapsto f(z) - w$ u krugu $K(z_0, \delta)$ jednostruke. Kako ih, računajući red, ima n, moraju sve biti međusobno različite. ∎

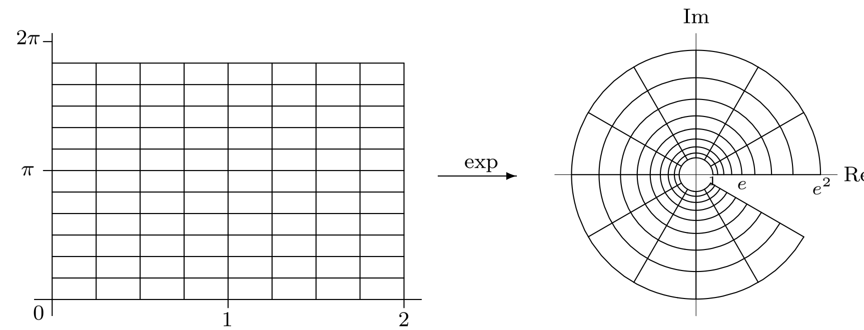
Primjer 42.1 Dobra ilustracija Weierstrassovog pripremnog teorema, je funkcija $f(z) := z^n = |z|^n e^{n\mathrm{i} \arg z}$. Ona preslikava kut $\dfrac{2\pi}{n}$ s vrhom u 0, na cijelu kompleksnu ravninu $\mathbb{C}$, tj. ravninu ‚namota' n puta oko ishodišta. Osim 0, sve su ostale točke kompleksne ravnine, slike od po točno n različitih točaka, n različitih n-tih korijena. Weierstrassov pripremni teorem kaže, dakle, da lokalno, svaka je holomorfna funkcija takva.

Korolar 42.2 (Teorem o otvorenom preslikavanju) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija, koja nije konstantna niti na jednoj komponenti povezanosti skupa Ω. Tada je za svaki otvoren skup $U \subseteq \Omega$, slika $f(U)$ otvoren skup u $\mathbb{C}$, tj. f je **otvoreno preslikavanje**.*

Dokaz: Neka je $w_0 \in f(U)$, i neka je $z_0 \in U$ takav da je $f(z_0) = w_0$, tj. z_0 je nultočka funkcije $z \mapsto f(z) - w_0$. Prema Weierstrassovom pripremnom teoremu, postoje brojevi $\delta > 0$ i $\varepsilon > 0$ takvi da za svaki $w \in K(w_0, \varepsilon)$, funkcija $z \mapsto f(z) - w$ ima u krugu $K(z_0, \delta)$ barem jednu nultočku. Drugačije rečeno, za svaki $w \in K(w_0, \varepsilon)$ postoji $z \in K(z_0, \delta)$ takav da je $f(z) = w$. Prema napomeni na početku dokaza drugog dijela Weierstrassovog teorema, broj δ, i onda pripadni ε, možemo odabrati tako da, zbog otvorenosti skupa U, bude $K(z_0, \delta) \subseteq U$, pa je tada i $K(w_0, \varepsilon) \subseteq f(U)$, što pokazuje da je skup $f(U) \subseteq \mathbb{C}$ otvoren. ∎

Specijalno, vrijedi

Korolar 42.3 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren i povezan skup, a $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija koja nije konstantna. Tada je skup $f(\Omega) \subseteq \mathbb{C}$ otvoren.* ∎



Tu smo funkciju, ali shvaćenu kao preslikavanje $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, promatrali već ranije, primjer 12.1, i vidjeli da ona nije injektivna (jer je periodička u drugoj varijabli), ali je injektivna na svakoj ‚horizontalnoj' prugi širine 2π, i slika takve otvorene pruge je cijela kompleksna ravnina bez jednog polupravca s početkom u ishodištu.

Na prethodnoj slici je prikazano kako eksponencijalna funkcije preslikava prugu $\mathbb{R} \times \langle 0, 2\pi\rangle = \{z = x + \mathrm{i}\,y : x \in \mathbb{R}, y \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$ na komplement pozitivnog dijela realne osi. Slike točaka $z = x + \mathrm{i}\,y$ za koje je $x > 0$ nalaze se izvan jediničnog kruga, a za $x < 0$ unutar jediničnog kruga. Slično, slika pruge $\mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi\rangle$ je komplement negativnog dijela realne osi.

Logaritamska funkcija kompleksne varijable nije definirana na cijeloj kompleksnoj ravnini. Naime, željeli bismo da je, kao kod realnih funkcija realne varijable, logaritamska funkcija inverzna eksponencijalnoj, ali kako kompleksna eksponencijalna funkcija nije bijekcija, inverzna funkcija ne postoji. Međutim, kako smo vidjeli, eksponencijalna funkcija jeste injektivna na svakoj horizontalnoj prugi širine 2π, pa restrikcija eksponencijalne funkcije na svaku takvu prugu ima svoju inverznu funkciju, koja je definirana na slici te pruge. Prirodno je zahtijevati da takva inverzna funkcija proširuje realnu logaritamsku funkciju $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \to \mathbb{R}$, koju ćemo privremeno označivati s $\ln_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Stoga za domenu treba uzeti takav skup koji sadrži pozitivan dio realne osi. Uobičajeno je za domenu kompleksne logaritamske funkcije uzeti komplement negativnog dijela realne osi, dakle sliku pruge $\mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi\rangle$.

Označimo s $\mathbb{C}_\pi := \mathbb{C} \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ komplement negativnog dijela realne osi, a s $U_{-\pi}^{\ \pi} := \{x + \mathrm{i}\,y : y \in \langle -\pi, \pi\rangle\} \subseteq \mathbb{C}$ odgovarajuću horizontalnu prugu. Želimo, dakle, derivabilnu funkciju $\ell\colon \mathbb{C}_\pi \to U_{-\pi}^{\ \pi}$ koja je inverzna funkciji $\exp\colon U_{-\pi}^{\ \pi} \to \mathbb{C}_\pi$. Mora dakle vrijediti $\ell \circ \exp = \mathrm{id}$, tj.

$$\ell(e^z) = z\,, \text{ za sve } z \in U_{-\pi}^{\ \pi}\,, \tag{1}$$

i $\exp \circ \ell = \mathrm{id}$, tj.

$$e^{\ell(z)} = z\,, \text{ za sve } z \in \mathbb{C}_\pi\,. \tag{2}$$

Budući da eksponencijalna funkcija preslikava sumu u produkt, mora njezina inverzna funkcija preslikavati produkt u sumu, tj. logaritam produkta mora biti jednak sumi logaritama. Zapišemo li $z \in \mathbb{C}_\pi$ kao $z = |z|\, e^{\mathrm{i}\,\arg z}$, zbog (1) mora vrijediti

$$\ell(z) = \ell(|z|\, e^{\mathrm{i}\,\arg z}) = \ell(|z|) + \ell(e^{\mathrm{i}\,\arg z}) \overset{(1)}{=} \ell(|z|) + \mathrm{i}\,\arg z\,,$$

a jer je $|z|$ pozitivan realan broj, i želimo da se za pozitivne realne brojeve funkcija ℓ podudara s realnom logaritamskom funkcijom, mora biti

$$\ell(z) = \ln_{\mathbb{R}} |z| + \mathrm{i}\,\arg z\,. \tag{3}$$

Tada za $z = x + \mathrm{i}\,y$ vrijedi

$$\ell(e^z) = \ell(e^{x+\mathrm{i}\,y}) = \ln_{\mathbb{R}} |e^{x+\mathrm{i}\,y}| + \mathrm{i}\,\arg e^{x+\mathrm{i}\,y} = \ln_{\mathbb{R}} e^x + \mathrm{i}\,y = x + \mathrm{i}\,y = z\,,$$

pa vrijedi (1).

Nadalje

$$e^{\ell(z)} = e^{\ln_{\mathbb{R}} |z| + \mathrm{i}\,\arg z} = e^{\ln_{\mathbb{R}} |z|} \cdot e^{\mathrm{i}\,\arg z} = |z| \cdot e^{\mathrm{i}\,\arg z} = z\,,$$

pa vrijedi i (2).

Umjesto ℓ, kompleksnu logaritamsku funkciju ćemo, kao i realnu, označivati s $\ln\colon \mathbb{C}_\pi \to U_{-\pi}^{\ \pi} \subseteq \mathbb{C}$. Prema (3), ona je definirana s

$$\ln z := \ln_{\mathbb{R}} |z| + \mathrm{i}\,\arg z\,. \tag{4}$$

Za pozitivne realne brojeve $z \in \mathbb{R}_+$ je $\arg x = 0$ pa je $\ln z = \ln_{\mathbb{R}} |z| = \ln_{\mathbb{R}} z$, tj. „kompleksna” logaritamska funkcija ln zaista proširuje „realnu” logaritamsku funkciju $\ln_{\mathbb{R}}$.

Zapisano u koordinatama, kompleksna logaritamska funkcija jednaka je

$$\ln z = \ln(x + \mathrm{i}\,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \mathrm{i}\,\arg z\,, \tag{5}$$

krugu $K(1, \frac{9}{10})$ nema niti jedne nultočke. Sve se, dakle, nultočke polinoma p nalaze u kružnom vijencu $V(1; \frac{9}{10}, 3)$.

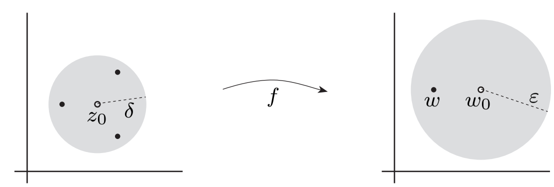
Zadatak 41.1 Poboljšajte ocjenu u prethodnom primjeru i pokažite da se sve nultočke polinoma p nalaze u kružnom vijencu $V(1; 1, 3)$.

§ 42 Lokalna svojstva holomorfnih funkcija

U ovoj ćemo točki, nakon Weierstrassovog pripremnog teorema, dokazati tri poznata teorema: o otvorenom preslikavanju, o maksimumu modula i Schwarzovu lemu.

Teorem 42.1 (Weierstrassov pripremni teorem) *Neka je funkcija f holomorfna u točki z_0, označimo $w_0 := f(z_0)$, i neka je red nultočke z_0 funkcije $z \mapsto f(z) - w_0$ jednak n. Tada postoje $\delta > 0$ i $\varepsilon > 0$ takvi da za svaki $w \in K(w_0, \varepsilon)$, funkcija $z \mapsto f(z) - w$ ima u krugu $K(z_0, \delta)$ točno n nultočaka, računajući njihov red.*

Štoviše, brojevi δ i ε mogu se odabrati tako da za svaki $w \in K^*(w_0, \varepsilon)$, funkcija $z \mapsto f(z) - w$ ima u krugu $K(z_0, \delta)$, točno n različitih nultočaka.



Dokaz: Funkcija $z \mapsto f(z) - w_0$ je holomorfna i nije konstanta 0 (jer tada njezina nultočka z_0 ne bi mogla biti konačnog reda n). Stoga su sve njezine nultočke izolirane, teorem 37.4, pa postoji $\delta > 0$ takav da je z_0 jedina nultočka funkcije $z \mapsto f(z) - w_0$ na zatvorenom krugu $\overline{K}(z_0, \delta)$. Specijalno, na rubu, tj. za $|z - z_0| = \delta$, vrijedi $|f(z) - w_0| > 0$. Neka je $\varepsilon := \min\limits_{|z-z_0|=\delta} |f(z) - w_0| > 0$ (minimum postoji jer je kružnica kompaktan skup, a f neprekidna funkcija). Neka je $w \in K(w_0, \varepsilon)$. Tada za $|z - z_0| = \delta$ vrijedi $|w_0 - w| < \varepsilon \le |f(z) - w_0|$. Iz Rouchéova teorema 41.4, primijenjenog na funkcije $z \mapsto f(z) - w_0$ i $z \mapsto w_0 - w$, slijedi da njihova suma, tj. funkcija $z \mapsto (f(z) - w_0) + (w_0 - w) = f(z) - w$, ima u krugu $K(z_0, \delta)$ jednak broj nultočaka kao i funkcija $z \mapsto f(z) - w_0$, dakle, ima ih točno n. Time je dokazana prva tvrdnja teorema.

iz primjera 41.1, i pokažimo da se sve njegove nultočke nalaze unutar kruga radijusa 3 oko točke 1, a izvan kruga radijusa $\frac{9}{10}$, tj. u kružnom vijencu $V(1;\frac{9}{10},3)$.

Razvijemo li polinom p po potencijama od $z-1$, dobijemo

$$p(z)=\tfrac{1}{8}(z-1)^8-\tfrac{1}{7}(z-1)^7+\tfrac{1}{3}(z-1)^6-\tfrac{1}{4}(z-1)^4+\tfrac{1}{3}(z-1)^3-(z-1)^2+\frac{111}{56}$$

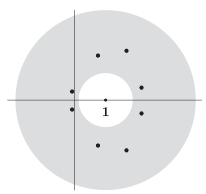
(to je zapravo Taylorov red polinoma p oko točke 1, a najjednostavnije se dobije tako da se izračuna $p(z+1)$, i uzmu koeficijenti dobivenog polinoma). Neka je

$$f(z):=\tfrac{1}{8}(z-1)^8$$
$$g(z):=-\tfrac{1}{7}(z-1)^7+\tfrac{1}{3}(z-1)^6-\tfrac{1}{4}(z-1)^4+\tfrac{1}{3}(z-1)^3-(z-1)^2+\frac{111}{56}\ .$$

Tada je za $|z-1|=3$

$$|f(z)| = \tfrac{1}{8}\cdot 3^8 \approx 820\ ,\ \text{i}$$
$$|g(z)| \le \tfrac{1}{7}\cdot 3^7+\tfrac{1}{3}\cdot 3^6+\tfrac{1}{4}\cdot 3^4+\tfrac{1}{3}\cdot 3^3+3^2+\frac{111}{56}\approx 596\ ,$$

pa u svim točkama kružnice $|z-1|=3$ vrijedi $|g(z)|<|f(z)|$. Primjenom Rouchéova teorema zaključujemo da polinomi $p=f+g$ i f imaju u krugu $K(1,3)$ jednak broj nultočaka. Kako polinom f ima u tom krugu, jednu nultočku, 1, i ona je reda osam, to i polinom p ima u tom krugu osam nultočaka, a prema Drugom osnovnom teoremu algebre, to su ujedno i sve njegove nultočke.



Neka je sada

$$f(z):=\frac{111}{56}$$
$$g(z):=\tfrac{1}{8}(z-1)^8-\tfrac{1}{7}(z-1)^7+\tfrac{1}{3}(z-1)^6-\tfrac{1}{4}(z-1)^4+\tfrac{1}{3}(z-1)^3-(z-1)^2\ .$$

Tada je za $|z-1|=\frac{9}{10}$

$$|f(z)| = \frac{111}{56}\approx 1.98\ ,\ \text{i}$$
$$|g(z)| \le \tfrac{1}{8}\big(\tfrac{9}{10}\big)^8+\tfrac{1}{7}\big(\tfrac{9}{10}\big)^7+\tfrac{1}{3}\big(\tfrac{9}{10}\big)^6+\tfrac{1}{4}\big(\tfrac{9}{10}\big)^4+\tfrac{1}{3}\big(\tfrac{9}{10}\big)^3+\big(\tfrac{9}{10}\big)^2\approx 1.52\ ,$$

pa u svim točkama kružnice $|z-1|=\frac{9}{10}$ vrijedi $|g(z)|<|f(z)|$. Kako je f konstantan polinom, pa nema niti jedne nultočke, to niti polinom $p=f+g$ u

a funkciju $\arg\colon \mathbb{C}_\pi\to\mathbb{R}$ možemo zapisati formulama

$$\arg z=\begin{cases}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} & ,\ x>0 \text{ (desna poluravnina)}\\ \operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{y} & ,\ y>0 \text{ (gornja poluravnina)}\\ \operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{y}-\pi & ,\ y<0 \text{ (donja poluravnina)}\end{cases}\ . \tag{6}$$

Kao i za funkciju ϑ u Primjeru 25.2, lako se provjeri da je formulom (6) funkcija $z\mapsto \arg z$ dobro definirana.

Pokažimo da je funkcija ln definirana formulama (5) i (6) zaista derivabilna, i nađimo njezinu derivaciju. Na skupu $\{\,x+\mathrm{i}\,y : x>0\,\}$, tj. na desnoj poluravnini vrijedi

$$\ln(z)=\ln(x+\mathrm{i}\,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\mathrm{i}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\ ,$$

pa je

$$\partial_x\ln(z)=\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\,\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\Big(-\frac{y}{x^2}\Big)=\frac{x}{x^2+y^2}-\mathrm{i}\,\frac{y}{x^2+y^2}\ ,$$

i

$$\partial_y\ln(z)=\frac{1}{2}\frac{2y}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\,\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\frac{1}{x}=\frac{y}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\,\frac{x}{x^2+y^2}\ .$$

Prema Cauchy-Riemannovu teoremu, teorem 31.1, zaključujemo da je funkcija ln derivabilna na desnoj poluravnini, i njezina je derivacija jednaka

$$\ln'(z)=\partial_x\ln(z)=\frac{\overline{z}}{|z|^2}=\frac{1}{z}\ .$$

Na gornjoj poluravnini vrijedi $\ln(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\mathrm{i}\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{y}$, a na donjoj je $\ln(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\mathrm{i}\,(\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{y}-\pi)$, usporedi s funkcijom ϑ u Primjeru 25.2, pa se, kao i ranije, pokazuje da je i tamo ln derivabilna i derivacija je $\frac{1}{z}$, tj. funkcija ln je derivabilna, i na cijelom skupu $\mathbb{C}_\pi$ je $\ln'(z)=\frac{1}{z}$.

Nema ništa posebnog u skupu $U_{-\pi}^{\,\pi}$. Eksponencijalna funkcija isto tako ostvaruje bijekciju pruge $U_0^{2\pi}:=\{\,z=x+\mathrm{i}\,y : 0<y<2\pi\,\}$ na komplement pozitivnog dijela realne osi, tj. na skup $\mathbb{C}_0:=\mathbb{C}\setminus\{\,z=(x,0):x\ge 0\,\}$, i općenito, bilo koje pruge $U_\vartheta^{\vartheta+2\pi}:=\{\,z=x+\mathrm{i}\,y:\vartheta<y<\vartheta+2\pi\,\}$, $\vartheta\in\mathbb{R}$, na skup $\mathbb{C}_\vartheta$ — komplement polupravca iz ishodišta koji s pozitivnim dijelom realne osi zatvara kut ϑ. Stoga za svaki ϑ postoji pripadna kompleksna logaritamska funkcija $\mathbb{C}_\vartheta \to U_\vartheta^{\vartheta+2\pi}$, inverzna restrikciji funkcije $z \mapsto e^z$ na $U_\vartheta^{\vartheta+2\pi}$.

Trigonometrijske i ***hiperbolne funkcije*** kompleksne varijable definiraju se pomoću eksponencijalne funkcije formulama:

$$\sin z := \frac{e^{\mathrm{i}\,z} - e^{-\mathrm{i}\,z}}{2\mathrm{i}} \qquad \cos z := \frac{e^{\mathrm{i}\,z} + e^{-\mathrm{i}\,z}}{2}$$
$$\operatorname{sh} z := \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z := \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}\ .$$

Sve su to derivabilne funkcije, i derivacije su jednake onima u realnom slučaju. I algebarski, tj. kod ,računanja' te se funkcije ponašaju kako smo naučeni iz realne analize.

§ 32 Integral kompleksne funkcije

Kompleksne funkcije kompleksne varijable integriramo po putevima, odnosno krivuljama. U ovoj točki definirat ćemo integral, nabrojati neka osnovna svojstva, i započeti ispitivanje neovisnosti integrala o putu integracije, čime ćemo se detaljnije baviti u idućem paragrafu.

Neka je $\gamma = \xi + \mathrm{i}\,\eta\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ po dijelovima gladak put, $\gamma^\clubsuit = \gamma([a,b]) \subseteq \mathbb{C}$ neka je njegova slika (trag), i neka je $f = u + \mathrm{i}\,v\colon \gamma^\clubsuit \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija. ***Integral funkcije*** f ***duž puta*** γ definiramo kao (kompleksan) broj

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma f\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt \\
&:= \int_a^b \big(u(\gamma(t))\,\xi'(t) - v(\gamma(t))\,\eta'(t)\big)\,dt + \mathrm{i}\int_a^b \big(v(\gamma(t))\,\xi'(t) + u(\gamma(t))\,\eta'(t)\big)\,dt \\
&= \int_\gamma u\,dx - v\,dy + \mathrm{i}\int_\gamma v\,dx + u\,dy\ .
\end{aligned}$$

U zadnjem retku radi se o dva integrala diferencijalnih 1-formi duž puta γ. To opravdava i uvođenje oznake $dz := dx + \mathrm{i}\,dy$, jer tada formalnim množenjem, dobivamo

$$\int_\gamma f\,dz = \int_\gamma (u + \mathrm{i}\,v)(dx + \mathrm{i}\,dy) = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + \mathrm{i}\int_\gamma v\,dx + u\,dy\ , \qquad (1)$$

nalazimo da je $\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{g'(z)\,f(z) - g(z)\,f'(z)}{f(z)(f(z)+g(z))}$. Uvrstimo li to u (6), zamjenom varijable $w := h(z)$, dobivamo

$$N_\Gamma(f+g) - N_\Gamma(f) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{h'(z)}{h(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{h(\Gamma)} \frac{dw}{w} = \nu(h(\Gamma),0)\ ,$$

gdje je posljednja jednakost dobivena kao ranije u korolaru 41.3.

Treba još odrediti indeks $\nu(h(\Gamma),0)$. Kako je za svaki $z \in \Gamma$, $\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$, to je, prema definiciji funkcije h, krivulja $h(\Gamma)$ sadržana u krugu radijusa 1 oko točke 1, tj. $h(\Gamma) \subseteq K(1,1)$. Zbog toga je $\nu(h(\Gamma),0) = 0$, pa iz prethodne formule slijedi da $f+g$ i f imaju jednak broj nultočaka unutar Γ. ■

Primijetimo da Rouchéov teorem *ne* tvrdi da funkcije f i $f+g$ imaju iste nultočke unutar Γ — samo da ih je jednako mnogo.

Primjenom Rouchéova teorema, dobivamo sada najavljivani

Korolar 41.5 (Drugi osnovni teorem algebre) *Svaki polinom stupnja n, s kompleksnim koeficijentima, ima točno n nultočaka u $\mathbb{C}$.*

Dokaz: Neka je

$$p(z) = a_n\,z^n + a_{n-1}\,z^{n-1} + \cdots + a_1\,z + a_0\ , \quad a_i \in \mathbb{C}\ , \quad a_n \neq 0\ , \quad n \geq 1\ .$$

Definirajmo

$$\begin{aligned}
f(z) &:= a_n\,z^n \\
g(z) &:= a_{n-1}\,z^{n-1} + \cdots + a_1\,z + a_0\ .
\end{aligned}$$

Kako je $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{|a_{n-1}|\,t^{n-1} + \cdots + |a_1|\,t + |a_0|}{|a_n|\,t^n} = 0$, postoji $R_0 > 0$ takav da za sve $R > R_0$ vrijedi $|a_n|\,R^n > |a_{n-1}|\,R^{n-1} + \cdots + |a_1|\,R + |a_0|$. Neka je Γ kružnica oko 0 radijusa R. Iz prethodne nejednakosti vidimo da za svaki $z \in \Gamma$ vrijedi $|g(z)| < |f(z)|$, pa prema Rouchéovom teoremu zaključujemo da $p = f+g$ ima u krugu $K(0,R)$ jednak broj nultočaka kao f, koji ima jednu nultočku, 0, reda n. Kako to vrijedi za svaki $R \geq R_0$, svaka nultočka polinoma p će kad-tad biti obuhvaćena, pa zaključujemo da p ima točno n kompleksnih nultočaka. ■

Primjer 41.2 Promotrimo ponovno polinom

$$p(z) := \tfrac{1}{8}z^8 - \tfrac{8}{7}z^7 + \tfrac{29}{6}z^6 - 12z^5 + \tfrac{37}{2}z^4 - \tfrac{52}{3}z^3 + 8z^2 + 1$$

pa se opet u točki $p(\mathrm{i}\,y_4) \approx 18.611$ vraća u gornju poluravninu, te završava u točki $p(0) = 1$, gdje je početak krivulje $p(\Gamma_1)$ (vidi sliku).

Na osnovi ovih razmatranja, zaključujemo da je indeks krivulje $p(\Gamma)$ s obzirom na točku 0 jednak 3, pa naš polinom p ima u prvom kvadrantu tri nultočke (računajući njihov red).

Kako nultočke polinoma s realnim koeficijentima moraju dolaziti u konjugirano kompleksnim parovima, zaključujemo da polinom p ima i u četvrtom kvadrantu tri nultočke. Prema, već spominjanom Drugom osnovnom teoremu algebre, ukupan broj nultočaka našeg polinoma p je osam, pa jer na koordinatnim osima nema nultočaka i jer nultočke dolaze u konjugirano kompleksnim parovima, mora se još po jedna nultočka nalaziti u drugom i u trećem kvadrantu.

Često se koristi sljedeći teorem:

Teorem 41.4 (Rouchéov[1] teorem) *Neka su funkcije f i g holomorfne na otvorenom skupu Ω, i neke je $\Gamma \subseteq \Omega$ kontura čije je i unutrašnje područje sadržano u Ω. Ako za svaki $z \in \Gamma$ vrijedi $|g(z)| < |f(z)|$, onda Γ obuhvaća jednak broj nultočaka funkcijâ f i $f+g$ (pritom svaku nultočku treba računati onoliko puta koliki je njezin red).*

Dokaz: Za svaki $z \in \Gamma$ je $|f(z)| > |g(z)| \geq 0$, pa je $f(z) \neq 0$. Nadalje, kada bi neki $z \in \Gamma$ bio nultočka funkcije $f+g$, bilo bi $g(z) = -f(z)$, tj. $|g(z)| = |f(z)|$, suprotno pretpostavci teorema. Dakle, kontura Γ ne prolazi niti jednom nultočkom funkcijâ f i $f+g$, pa, jer se radi o holomorfnim funkcijama, za određivanje broja njihovih nultočaka unutar konture Γ, možemo primijeniti korolar 41.2. Tako dobivamo

$$
\begin{aligned}
N_\Gamma(f+g) - N_\Gamma(f) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)}\,dz - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{g'(z)\,f(z) - g(z)\,f'(z)}{f(z)(f(z)+g(z))}\,dz\,. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Pokazali smo da je za svaki $z \in \Gamma$, $f(z) \neq 0$. Stoga, zbog neprekidnosti, postoji (otvorena) okolina $U \supseteq \Gamma$, takva da je $f(z) \neq 0$ za sve $z \in U$, pa je dobro definirana funkcije $h\colon U \to \mathbb{C}$ formulom $h(z) := 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$. Deriviranjem

[1] Eugène Rouché (1832–1910), francuski matematičar

a uz taj formalizam je i

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,\Big(\int_\gamma f\,dz\Big) &= \int_\gamma \mathrm{Re}(f\,dz) \\
\mathrm{Im}\,\Big(\int_\gamma f\,dz\Big) &= \int_\gamma \mathrm{Im}(f\,dz)\,.
\end{aligned}
$$

Lako se pokazuje da ovako definiran integral ima uobičajena svojstva, tj. da je linearan funkcional na prostoru neprekidnih kompleksnih funkcija definiranih na $\gamma^\clubsuit$, i da je aditivna funkcija puta integracije. Također se, kao i kod integrala diferencijalne 1-forme duž puta, tj. integrala druge vrste, lako pokazuje da su integrali duž algebarski ekvivalentnih puteva jednaki.

Kao i u § 30 za integral diferencijalne 1-forme, i ovdje se definira ***integral*** $\int_\Gamma f\,dz$ ***kompleksne funkcije duž*** orijentirane po dijelovima glatke ***krivulje*** $\Gamma = (\Gamma, \mathcal{G}_o)$, kao integral $\int_\gamma f\,dz$ po proizvoljnom po dijelovima glatkom putu γ koji parametrizira orijentiranu krivulju Γ. Da je ta definicija dobra, tj. da ne ovisi o odabranoj po dijelovima glatkoj parametrizaciji γ krivulje Γ, pokazuje se bilo direktno, koristeći se teoremom 30.1, bilo rabeći (1) i činjenicu da integral diferencijalne 1-forme ne ovisi o odabranoj parametrizaciji krivulje Γ.

Napomena 32.1 U prethodnoj smo definiciji prešutno istakli i što podrazumijevamo pod integralom kompleksne funkcije jedne realne varijable. Naime, ako je naprimjer, $g = g_{\mathrm{Re}} + \mathrm{i}\,g_{\mathrm{Im}}\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija, onda, po definiciji, smatramo da je

$$
\int_a^b g(t)\,dt := \int_a^b \big(g_{\mathrm{Re}}(t) + \mathrm{i}\,g_{\mathrm{Im}}(t)\big)\,dt := \int_a^b g_{\mathrm{Re}}(t)\,dt + \mathrm{i}\int_a^b g_{\mathrm{Im}}(t)\,dt\,.
$$

To je usaglašeno i s inkluzijom $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, tj. s identifikacijom $x \equiv (x,0)$. Naime, tom će identifikacijom, segment realnih brojeva $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ biti identificiran sa skupom $[a,b] \times \{0\} = \{z = x + \mathrm{i}\,y : x \in [a,b],\ y = 0\} \subseteq \mathbb{C}$, pa na identitetu $\mathrm{id}\colon [a,b] \to [a,b]$ možemo gledati kao na put $\iota\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ dân s $\iota(t) := (t,0)$. Ako sada na $g = g_{\mathrm{Re}} + \mathrm{i}\,g_{\mathrm{Im}}$ gledamo kao na funkciju $g\colon \iota^\clubsuit \to \mathbb{C}$, dakle, umjesto

$g(t)$ pišemo $g(t,0)$, i slično za realne funkcije g_{Re} i g_{Im}, onda je

$$\begin{aligned}\int_\iota g\,dz &= \int_a^b g(\iota(t))\,\iota'(t)\,dt\\ &= \int_a^b \big(g_{\mathrm{Re}}(t,0)\,\iota'_{\mathrm{Re}}(t) - g_{\mathrm{Im}}(t,0)\,\iota'_{\mathrm{Im}}(t)\big)dt +\\ &\qquad + \mathrm{i}\int_a^b \big(g_{\mathrm{Im}}(t,0)\,\iota'_{\mathrm{Re}}(t) + g_{\mathrm{Re}}(t,0)\,\iota'_{\mathrm{Im}}(t)\big)dt\\ &= \int_a^b g_{\mathrm{Re}}(t)\,dt + \mathrm{i}\int_a^b g_{\mathrm{Im}}(t)\,dt\ ,\end{aligned}$$

jer je $\iota'_{\mathrm{Re}}(t) = 1$ i $\iota'_{\mathrm{Im}}(t) = 0$ za sve t, a upravo smo tako, prešutno, u definiciji integrala kompleksne funkcije duž puta, bili i definirali $\int_a^b g(t)\,dt$.

Dokažimo sada jednu ocjenu modula integrala, koju ćemo često koristiti.

Lema 32.1 (o ocjeni integrala) *Neka je $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ po dijelovima gladak put duljine $\ell(\gamma)$, i neka je $f\colon \gamma^{\clubsuit} \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija, te neka je $M := \max\{|f(z)| : z \in \gamma^{\clubsuit}\}$. Tada je*

$$\Big|\int_\gamma f\,dz\Big| \le M\,\ell(\gamma)\ .$$

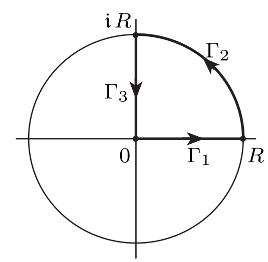
Dokaz: Primijetimo najprije, da, zbog kompaktnosti skupa $\gamma^{\clubsuit}$ i neprekidnosti funkcije f, maksimum M zaista postoji. Označimo s $J := \int_\gamma f\,dz = |J|e^{\mathrm{i}\vartheta}$ za neki $\vartheta \in \mathbb{R}$ (točnije, $\vartheta = \arg J$, ali nam ta činjenica neće trebati). Tada je

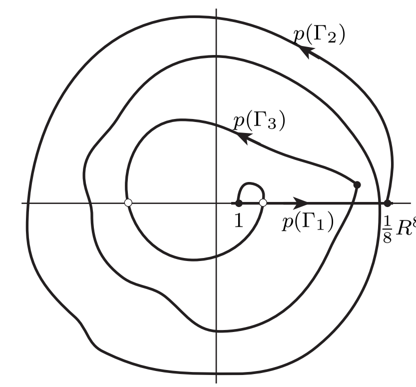
$$\begin{aligned}|J| &= e^{-\mathrm{i}\vartheta}\int_\gamma f\,dz = e^{-\mathrm{i}\vartheta}\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt\\ &= \int_a^b e^{-\mathrm{i}\vartheta} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt\ .\end{aligned}$$

(*ii*) Točke luka Γ_1 su oblika $R\,e^{\mathrm{i}\,t}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, pa je u točkama luka Γ_1

$$p(R\,e^{\mathrm{i}\,t}) = \frac{1}{8}R^8\,e^{8\,\mathrm{i}\,t}\Big(1 - \frac{64}{7R\,e^{\mathrm{i}\,t}} + \frac{116}{3R^2\,e^{2\,\mathrm{i}\,t}} - \frac{96}{R^3\,e^{3\,\mathrm{i}\,t}} + \\ + \frac{148}{R^4\,e^{4\,\mathrm{i}\,t}} - \frac{416}{3R^5\,e^{5\,\mathrm{i}\,t}} + \frac{64}{R^6\,e^{6\,\mathrm{i}\,t}} + \frac{8}{R^8\,e^{8\,\mathrm{i}\,t}}\Big)\ .$$

Kako je R velik, to je izraz u velikoj zagradi u prethodnoj formuli približno jednak 1, pa slika $p(\Gamma_2)$ dva puta obilazi približno kružnicu oko 0 radijusa $\frac{1}{8}R^8$, počevši od točke $p(R)$ do točke $p(\mathrm{i}\,R)$, za koju, iz formule (5), vidimo da je $\operatorname{Im} p(\mathrm{i}\,R) \approx \frac{8}{7}R^7 > 0$, jer je R velik.





(*iii*) $p(\Gamma_3)$ je skup točaka oblika $p(\mathrm{i}\,y)$, $y \in [R,0]$. Krivulja $p(\Gamma_3)$ počinje u točki $p(\mathrm{i}\,R)$, gdje je završila krivulja $p(\Gamma_2)$, a završava u točki $1 = p(0)$, gdje je počela krivulja $p(\Gamma_1)$. Pitanje je samo ‚vrti' li se, i kako, $p(\Gamma_3)$ oko 0. Kako bismo to ustanovili, dovoljno je ustanoviti gdje i kako $p(\Gamma_3)$ siječe realnu os. Iz (5) vidimo da je za nenegativan realan y, $p(\mathrm{i}\,y)$ realan samo u nultočkama polinoma p_{Im}, tj. u točkama

$$y_6 = \frac{1}{2}\sqrt{21 + \sqrt{\frac{595}{3}}} \approx 2.962\ ,\ y_4 = \frac{1}{2}\sqrt{21 - \sqrt{\frac{595}{3}}} \approx 1.315\ ,\ y_1 = 0\ ,$$

u kojima polinom p poprima približno vrijednosti -1167.39, 18.611 i 0. Kako su y_6 i y_4 jednostruke nultočke polinoma p_{Im}, to krivulja $p(\Gamma_3)$ počinje u točki $p(\mathrm{i}\,R) \approx \frac{1}{8}R^8 + \mathrm{i}\,\frac{8}{7}R^7$ u kojoj završava $p(\Gamma_2)$, i koja je u gornjoj poluravnini, zatim u točki $p(\mathrm{i}\,y_6) \approx -1167.39$ prelazi u donju poluravninu, Pokažimo sada da p nema niti čisto imaginarnih nultočaka. Za $y \in \mathbb{R}$ je

$$p(\mathrm{i}\,y) = \underbrace{\frac{1}{8}y^8 - \frac{29}{6}y^6 + \frac{37}{2}y^4 - 8y^2 + 1}_{=:p_{\mathrm{Re}}(y)} + \mathrm{i}\,\underbrace{\left(\frac{8}{7}y^7 - 12y^5 + \frac{52}{3}y^3\right)}_{=:p_{\mathrm{Im}}(y)} . \qquad (5)$$

Da bi bilo $p(\mathrm{i}\,y) = 0$, moraju realni i imaginarni dio istovremeno iščezavati. Imaginarni dio jednak je

$$p_{\mathrm{Im}}(y) = \frac{4}{21}y^3(6y^4 - 63y^2 + 91) ,$$

pa je $y_1 = 0$ trostruka nultočka, a ostale četiri jednostruke nultočke su

$$y_{4,5} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{21 - \sqrt{\frac{595}{3}}} \approx \pm 1.315 \qquad y_{6,7} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{21 + \sqrt{\frac{595}{3}}} \approx \pm 2.962 .$$

Kako je $p_{\mathrm{Re}}(0) = 1$, $p_{\mathrm{Re}}(y_4) = p_{\mathrm{Re}}(y_5) \approx 18.611$ i $p_{\mathrm{Re}}(y_6) = p_{\mathrm{Re}}(y_7) \approx -1167.39$, to p_{Re} i p_{Im} ne mogu istovremeno iščezavati, tj. p nema nultočaka niti na imaginarnoj osi.

Odredimo sada broj nultočaka polinoma p u prvom kvadrantu. Neka je $R > 0$, i neka je $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ kontura sastavljena od sljedećih orijentiranih lukova (vidi sliku):

Γ_1 je segment realne osi od 0 do R.
Γ_2 je luk kružnice oko 0 radijusa R od točke R do $\mathrm{i}\,R$
Γ_3 je segment imaginarne osi od $\mathrm{i}\,R$ do 0.

Prema Drugom osnovnom teoremu algebre, koji ćemo uskoro dokazati, korolar 41.5, polinom ima konačno mnogo nultočaka — točno onoliko koliki mu je red. Zbog toga će, za dovoljno veliki R, sve nultočke polinoma p koje se nalaze u prvom kvadrantu, biti obuhvaćene konturom Γ. Kako je polinom holomorfna funkcija, pa nema polova, bit će, prema prethodnom korolaru, broj tih nultočaka jednak indeksu krivulje $p(\Gamma) = p(\Gamma_1) + p(\Gamma_2) + p(\Gamma_3)$ s obzirom na 0. Treba, dakle, samo približno, kvalitativno, odrediti sliku $p(\Gamma)$ — detalji nam nisu važni, važno je jedino koliko se puta $p(\Gamma)$ ‚namota' oko 0.

(*i*) Jer je p polinom s realnim koeficijentima, to za realne varijable p poprima i realne vrijednosti, pa je $p(\Gamma_1)$ segment realne osi, koji sadrži točke $p(0) = 1$ i $p(R) \approx \frac{1}{8}R^8$.

Stoga je

$$\begin{aligned} |J| = \mathrm{Re}|J| &= \int_a^b \mathrm{Re}\big(e^{-\mathrm{i}\,\vartheta} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\big)\,dt \\ &\le \int_a^b \big|e^{-\mathrm{i}\,\vartheta} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\big|\,dt \\ &\le M \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = M\ell(\gamma) , \end{aligned}$$

jer je $|e^{-\mathrm{i}\,\vartheta}| = 1$. ■

Integral kompleksne funkcije, općenito, ovisi o putu integracije, ali uz neke uvjete — ne. Sada ćemo se pozabaviti upravo tim pitanjem — kada integral kompleksne funkcije *ne ovisi* o putu integracije. Kao što smo u teoremu 25.2 bili pokazali za integral diferencijalne 1-forme, tako se i sada jednostavno vidi da je neovisnost integrala kompleksne funkcije o putu integracije, ekvivalentna tome da je integral po svakom po dijelovima glatkom zatvorenom putu jednak nuli. Tu ćemo činjenicu ubuduće koristiti bez posebnog naglašavanja.

Analogno teoremu 25.2, vrijedi

Teorem 32.2 (Cauchyjev teorem za derivaciju) *Neka je $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija definirana na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Tada je $\int_\gamma f\,dz = 0$ za sve po dijelovima glatke zatvorene puteve γ u Ω ako i samo ako postoji derivabilna funkcija $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ za koju je $F' = f$ na Ω.*

Dokaz: $\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija takva da je $F' = f$, i neka je $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ PDG put koji je zatvoren, tj. $\gamma(a) = \gamma(b)$. Tada je

$$\begin{aligned} \int_\gamma f\,dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0 . \end{aligned}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Obratno, uz pretpostavku da integral funkcije f ne ovisi o putu, tj. da je integral po svakom zatvorenom PDG putu jednak nuli, treba definirati funkciju $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ takvu da je $F' = f$. Dovoljno je funkciju F definirati zasebno na svakoj komponenti povezanosti skupa Ω, jer su te komponente međusobno disjunktni otvoreni skupovi, a derivabilnost je lokalno svojstvo. Drugim riječima, dovoljno je definirati funkciju F u slučaju kada je otvoren skup Ω povezan.

Fiksirajmo točku $z_0 \in \Omega$, i za $z \in \Omega$ definirajmo

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f\,dz\,,$$

gdje je γ_z bilo koji PDG put u Ω od z_0 do z. Kako po pretpostavci, integral funkcije f ne ovisi o putu, F je dobro definirana funkcija. Pokažimo da je F derivabilna, i da je $F'(z) = f(z)$ za sve $z \in \Omega$. Neka je $z \in \Omega$ i $r_z > 0$ takav da je $K(z, r_z) \subseteq \Omega$. Za ‚malene' $h \in \mathbb{C}$, takve da je $|h| < r_z$, neka je $\sigma_h\colon [0,1] \to \Omega$ put definiran sa $\sigma_h(t) := z + th$, dakle jedna parametrizacija segmenta $[z, z+h] \subseteq K(z, r_z) \subseteq \Omega$. Kako u definiciji vrijednosti funkcije F u točki $z+h$ možemo uzeti proizvoljan put (u Ω) od z_0 do $z+h$, možemo uzeti i put $\gamma + \sigma_h$. Stoga je

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\int_{\gamma+\sigma_h} f\,dz - \int_\gamma f\,dz\Big) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{\sigma_h} f\,dz \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^1 f(z+th)\,h\,dt = \lim_{h\to 0}\int_0^1 f(z+th)\,dt\,.\end{aligned}$$

Kako je funkcija $(t,h) \mapsto f(z+th)$ neprekidna, limes po h i integral po t komutiraju, korolar 19.6, pa je to dalje jednako

$$= \int_0^1 \lim_{h\to 0} f(z+th)\,dt\,,$$

što je, zbog neprekidnosti funkcije $h \mapsto f(z+th)$, jednako

$$= \int_0^1 f(z)\,dt = f(z)\int_0^1 dt = f(z)\,.$$

Dakle, funkcija F derivabilna je, i njezina je derivacija zaista jednaka f. ■

Za neprekidnu funkciju $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ kažemo da ima *primitivnu funkciju* na Ω, ako postoji funkcija $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ takva da je $F'(z) = f(z)$ za sve $z \in \Omega$. Funkcija f ima na Ω *lokalno primitivnu funkciju*, ako oko svake točke $z \in \Omega$ postoji okolina (npr. otvoren krug) na kojoj f ima primitivnu funkciju.

Korolar 32.3 *Ako neprekidna funkciju $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ima primitivnu funkciju, tj. ako postoji derivabilna funkcija $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ takva da je $F' = f$, onda za svaki po dijelovima gladak put $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ vrijedi*

$$\int_\gamma f\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\,.$$ ■

dok je

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{f(\Gamma)} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^1 \frac{8\cdot 2\pi\mathrm{i}\, e^{2\pi\mathrm{i}\,t}}{8e^{2\pi\mathrm{i}\,t}}\,dt = 1\,.$$

Isto bi tako formula u korolaru 41.3 trebala glasiti

$$N_\Gamma(f) - P_\Gamma(f) = \nu(f\circ\gamma.0)\,,$$

gdje je γ neka po dijelovima glatka parametrizacija konture Γ.

Primjer 41.1 Kao primjer upotrebe prethodnih razmatranja, odredimo kako su po kvadrantima raspoređene nultočke polinoma

$$p(z) := \tfrac{1}{8}z^8 - \tfrac{8}{7}z^7 + \tfrac{29}{6}z^6 - 12z^5 + \tfrac{37}{2}z^4 - \tfrac{52}{3}z^3 + 8z^2 + 1\,.$$

Pokažimo, najprije, da p nema realnih nultočaka. Zaista, za derivaciju nalazimo (kako tražimo realne nultočke, varijablu označavamo sa x)

$$p'(x) = x^7 - 8x^6 + 29x^5 - 60x^4 + 74x^3 - 52x^2 + 16x\,.$$

Direktnom provjerom, vidi se da su 0, 1 i 2 nultočke polinoma p', pa dijeljenjem dobivamo djelomičnu faktorizaciju

$$p'(x) = x\,(x-1)(x-2)\underbrace{(x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 14x + 8)}_{=:q(x)}\,.$$

Polinom q faktoriziramo tako da nađemo koeficijente a, b, c, d koji zadovoljavaju sistem linearnih jednadžbi dobiven uspoređivanjem koeficijenata uz iste potencije od x u produktu

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 14x + 8\,,$$

pa dobivamo

$$p'(x) = x\,(x-1)(x-2)(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 3x + 4)\,.$$

Kvadratni faktori nemaju realnih nultočaka, pa su točke 0, 1 i 2 jedine realne nultočke derivacije, te, jer se radi o polinomu parnog stupnja kojemu je najstariji koeficijent pozitivan, p ima, kao realna funkcija, tri stacionarne točke, i to su lokalni minimumi u točkama 0 i 2, i lokalni maksimum u točki 1. Kako je $p(0) = 1 > 0$, i $p(2) = \frac{29}{21} > 0$, p nema realnih nultočaka.

Integralu na lijevoj strani formule (3) možemo dati i geometrijski smisao. Ako napravimo supstituciju (zamjenu varijabli) $f(z) =: w$, dobivamo

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{f(\Gamma)} \frac{dw}{w}\,. \tag{4}$$

$f(\Gamma)$ je po dijelovima glatka zatvorena krivulja, pa je desna strana u prethodnoj formuli, upravo indeks te krivulje s obzirom na točku 0. Tako dobivamo

Korolar 41.3 *Za meromorfnu funkciju f koja nije konstantna na otvorenom povezanom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, i pozitivno orijentiranu konturu Γ koja je nulhomotopna u Ω i ne prolazi niti jednom nultočkom niti polom funkcije f, vrijedi*

$$N_\Gamma(f) - P_\Gamma(f) = \nu(f(\Gamma), 0)\,. \qquad \blacksquare$$

Ovaj se korolar naziva i ***Princip argumenta***.

Napomena 41.1 Iako su formula (4) i formula u korolaru 41.3 u literaturi prilično standardne, one zapravo nisu dobre, i treba ih interpretirati na sljedeći način: Neka je γ proizvoljna po dijelovima glatka parametrizacija konture Γ. Tada, uz supstituciju $f(z) =: w$, formula (4) izgleda ovako:

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{f\circ\gamma} \frac{dw}{w}\,. \tag{4*}$$

Istina je da vrijedi $(f\circ\gamma)^* = f(\Gamma)$, ali to više ne mora biti parametrizabilan skup u smislu naše definicije (definicija 29.1), dakle na $f(\Gamma)$ možda više ne možemo gledati kao na krivulju u pravom smislu, a i ako $f(\Gamma)$ jeste krivulja, $f\circ\gamma$ ne mora biti njezina parametrizacija.

Naprimjer, neka je Γ kružnica radijusa 2, $\Gamma = \{x : |z| = 2\}$, funkcija $\gamma(t) := 2e^{2\pi\mathrm{i}\,t}$, $t \in [0,1]$, njezina parametrizacija, a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kubiranje, $f(z) := z^3$. Tada slika $f(\Gamma)$ zaista jeste krivulja — kružnica radijusa 8, ali $f\circ\gamma$ *nije* njezina parametrizacija jer ta funkcija tri puta obilazi kružnicu $f(\Gamma)$. I zaista, imamo

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{3z^2}{z^3}\,dz = \frac{3}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{dz}{z} = \frac{3}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^1 \frac{2\cdot 2\pi\mathrm{i}\,e^{2\pi\mathrm{i}\,t}}{2e^{2\pi\mathrm{i}\,t}}\,dt = 3$$

kao što daje i

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{f\circ\gamma} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^1 \frac{8\cdot 6\pi\mathrm{i}\,e^{6\pi\mathrm{i}\,t}}{8e^{6\pi\mathrm{i}\,t}}\,dt = 3\,,$$

Primjer 32.1 Promotrimo integral funkcije $f(z) := (z-z_0)^n$ po, pozitivno orijentiranoj, kružnici Γ radijusa r sa središtem u z_0. Jednostavna parametrizacija kružnice dana je funkcijom $\gamma(t) := z_0 + r\,e^{\mathrm{i}\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$, pa, za $n \neq -1$, imamo

$$\begin{aligned}\int_\Gamma (z-z_0)^n\,dz &= \int_0^{2\pi} \left(r\,e^{\mathrm{i}\,t}\right)^n r\,e^{\mathrm{i}\,t}\,\mathrm{i}\,dt \\ &= r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}\,(n+1)t}\,\mathrm{i}\,dt = \frac{r^{n+1}}{n+1}\,e^{\mathrm{i}\,(n+1)t}\Big|_0^{2\pi} = 0\,,\end{aligned}$$

što smo mogli zaključiti i na temelju Cauchyjeva teorema za derivaciju, teorem 32.2, jer je, za $n \neq -1$, funkcija $z \mapsto (z-z_0)^n$ derivacija funkcije $z \mapsto \frac{1}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ na probušenoj ravnini $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$.

Za $n = -1$ nalazimo

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r\,e^{\mathrm{i}\,t}}\,r\,\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\,t}\,dt = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} dt = 2\pi\mathrm{i}\,,$$

dakle, integral je različit od nule.

Specijalno je, dakle, integral $\int_\Gamma \frac{dz}{z} = 2\pi\mathrm{i} \neq 0$, što znači da *ne postoji* funkcija definirana na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ čija je derivacija jednaka $\frac{1}{z}$, što opet pokazuje da ne postoji funkcija $\ln\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$.

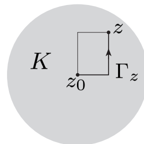
Pod *pravokutnikom* podrazumijevat ćemo uvijek pravokutnik kome su stranice paralelne koordinatnim osima (tj. *realnoj* i *imaginarnoj* osi). Ponekad se takav pravokutnik naziva *standardni* ili *koordinatni pravokutnik*.

U idućoj ćemo točki trebati sljedeću varijantu jednog smjera (nužnost) Cauchyjeva teorema za derivaciju:

Teorem 32.4 (o postojanju primitivne funkcije na krugu) *Neka je $K \subseteq \mathbb{C}$ otvoren krug, a $f\colon K \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija sa svojstvom da je $\int_{\partial I} f\,dz = 0$ po rubu svakog pravokutnika $I \subseteq K$. Tada f ima primitivnu funkciju na K.*

Dokaz: Neka je z_0 središte kruga K. Za svaki $z \in K$, pravokutnik I_z, kome su nasuprotni vrhovi z_0 i z, leži u K. Neka je $\Gamma_z \subseteq \partial I_z$ dio ruba pravokutnika I_z od z_0 do z (najprije ‚horizontalno', tj. paralelno realnoj osi, a onda ‚vertikalno', tj. paralelno imaginarnoj osi). Definirajmo

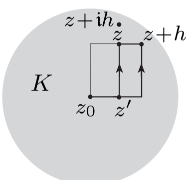
$$F(z) = U(z) + \mathrm{i}\,V(z) := \int_{\Gamma_z} f\,dz\ ,$$



i pokažimo da je to derivabilna funkcija kojoj je derivacija jednaka f.

Za $z \in K$, neka je $r_z > 0$ takav da je $K(z, r_z) \subseteq K$. Za $h \in \mathbb{R}$ takav da je $|h| < r_z$, je segment $[z, z+h] \subseteq K$, pa je

$$\partial_x F(z) = \partial_x U(x,y) + \mathrm{i}\,\partial_x V(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h}$$



$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\int_{z_0,\,z',\,z,\,z+h} f\,dz - \int_{z_0,\,z',\,z} f\,dz\Big)$$

što je, jer je integral po rubu svakog pravokutnika u K jednak nuli, jednako

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\int_{z_0,\,z',\,z,\,z+h} f\,dz - \int_{z_0,\,z',\,z} f\,dz\Big) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f\,dz\ .$$

Parametriziramo li segment $[z, z+h]$ funkcijom $t \mapsto z + th$, $t \in [0,1]$, to je jednako

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th)\,h\,dt\ .$$

Kako je funkcija $(t,h) \mapsto f(z+th)$ neprekidna, to integral po t i limes po h komutiraju, korolar 19.6, pa je to jednako

$$= \int_0^1 \lim_{h\to 0} f(z+th)\,dt = \int_0^1 f(z)\,dt = f(z)\ .$$

Na sličan način nalazimo

$$\partial_y F(z) = \partial_y U(x,y) + \mathrm{i}\,\partial_y V(x,y) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{F(z+\mathrm{i}\,h) - F(z)}{h} = \cdots = \mathrm{i}\,f(z)\ .$$

Kako je f neprekidna, zaključujemo da su funkcije $\partial_x U$, $\partial_x V$, $\partial_y U$ i $\partial_y V$ neprekidne u točki $z = (x,y)$, pa su, prema teoremu 9.1, funkcije U i V diferencijabilne u $z = (x,y)$. Nadalje, iz dobivenih izraza za $\partial_x F$ i $\partial_y F$, vidimo

Kako je drugi sumand, funkcija $h\,\frac{g'}{g}$, holomorfna na krugu $K(s,\delta)$, to je singularitet funkcije $h\,\frac{f'}{f}$ zapravo singularitet funkcije $z \mapsto h(z)\frac{n}{z-s}$. Razvijemo li funkciju h na δ-krugu oko s u Taylorov red, vidimo da ako je $h(s) = 0$, onda je s uklonjiv singularitet funkcije $z \mapsto h(z)\frac{n}{z-s}$, pa je njezin reziduum u s jednak nuli, dakle jednak je broju $h(s)\cdot n$. Ako je $h(s) \neq 0$ onda funkcija $z \mapsto h(z)\frac{n}{z-s}$ ima u s pol prvog reda, i njezin reziduum je opet jednak $h(s)\cdot n$.

Ponovimo li ovo zaključivanje za svaku nultočku funkcije f koja se nalazi unutar konture Γ, dobivamo prvi sumand u (1).

Neka je sada s pol funkcije f reda p. Ako u Laurentovom razvoju funkcije f oko pola s izlučimo faktor $(z-s)^{-p}$, vidimo da, kao i u slučaju nultočke, postoji $\delta > 0$ i holomorfna funkcija $g \in H(K(s,\delta))$, sa svojstvom $g(z) \neq 0$ za sve $z \in K(s,\delta)$, i takva da je

$$f(z) = \frac{1}{(z-s)^p}\,g(z)\ , \quad z \in K^*(s,\delta)\ .$$

Kao i ranije, dobivamo

$$h(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = h(z)\frac{-p}{z-s} + h(z)\frac{g'(z)}{g(z)}\ ,$$

pa zaključujemo da je

$$\mathrm{res}(h\frac{f'}{f}, s) = h(s)\cdot(-p) = -h(s)\cdot r(s,f)\ .$$

Sumiranjem po svim polovima funkcije f koji se nalaze unutar Γ, dobivamo i drugu sumu u (1). ■

Specijalno, za konstantnu funkciju $h(z) = 1$ za svaki z, dobivamo

Korolar 41.2 *Neka je f meromorfna funkcijama na otvorenom povezanom skupu Ω, koja nije konstantna, a $\Gamma \subseteq \Omega$ neka je nulhomotopna pozitivno orijentirana kontura, koja ne prolazi niti jednom nultočkom niti polom funkcije f. Tada je*

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N_\Gamma(f) - P_\Gamma(f)\ , \tag{3}$$

gdje je $N_\Gamma(f)$ broj nultočaka, a $P_\Gamma(f)$ broj polova funkcije f unutar Γ, i to računajući njihov red, tj. ukoliko je neka nultočka ili pol reda r, treba ju brojati r puta. ■

tako da općenito možemo smatrati da meromorfna funkcije ima samo polove.

Za točku z_0 koja je nultočka ili pol funkcije f, s $r(z_0, f) \in \mathbb{N}$ označit ćemo red te nultočke odnosno pola.

Teorem 41.1 *Neka je f meromorfna funkcija na otvorenom povezanom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, koja nije konstanta 0, $f \not\equiv 0$. $\Gamma \subseteq \Omega$ neka je pozitivno orijentirana kontura koja ne prolazi niti jednom nultočkom niti polom funkcije f i čije je unutarnje područje B sadržano u Ω, te neka je $h \in H(\Omega)$ proizvoljna holomorfna funkcija. Tada je*

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma h(z)\, \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \quad = \sum_{\substack{z' \in B \\ z' \text{ je nultočka od } f}} h(z')\, r(z', f) \quad - \sum_{\substack{z'' \in B \\ z'' \text{ je pol od } f}} h(z'')\, r(z'', f)\ . \quad (1)$$

Dokaz: Kako je $\nu(\Gamma, z_0) = 1$ za svaku točku $z_0 \in B$, to je, prema teoremu o reziduumima, teorem 40.2,

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma h(z)\, \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \quad = \sum_{\substack{s \in B \\ s \text{ je singularitet od } h\frac{f'}{f}}} \operatorname{res}(h\,\frac{f'}{f}, s)\ . \quad (2)$$

Odredimo reziduume funkcije $h\,\frac{f'}{f}$ u njezinim singularitetima koji se nalaze u unutrašnjem području B konture Γ. U točkama u kojima je funkcija f holomorfna i nije jednaka nuli, funkcija $h\,\frac{f'}{f}$ je holomorfna. Zato se singulariteti funkcije $h\,\frac{f'}{f}$ nalaze među nultočkama i singularitetima, dakle polovima, funkcije f. Niti skup nultočaka niti skup polova funkcije f nema gomilišta u Ω, pa smo na funkciju $h\,\frac{f'}{f}$ zaista mogli primijeniti teorem o reziduumima.

Neka je, prvo, s nultočka funkcije f, i to reda $r(s, f) =: n$. Prema teoremu 37.4, postoje $\delta > 0$ i holomorfna funkcija $g \in H(K(s, \delta))$, takvi da je

$$f(z) = (z-s)^n\, g(z)\ , \quad z \in K(s, \delta)\ , \text{ i}$$
$$g(z) \neq 0\ , \quad z \in K(s, \delta)\ .$$

Za svaki $z \in K^*(s, \delta)$ tada vrijedi

$$h(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = h(z)\frac{n}{z-s} + h(z)\frac{g'(z)}{g(z)}\ .$$

da vrijede Cauchy-Riemannovi uvjeti, pa je F derivabilna u točki z, i vrijedi $F'(z) = f(z)$.

Budući je z bila proizvoljna točka kruga K, zaključujemo da je $F' = f$. ■

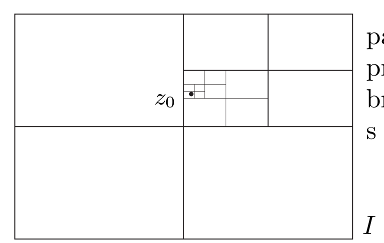
§ 33 Cauchyjev teorem

Fundamentalan teorem u teoriji funkcija kompleksne varijable je Cauchyjev teorem, koji govori o iščezavanju integrala derivabilne funkcije po zatvorenoj krivulji. Taj je teorem dokazao već sâm Cauchy uz pretpostavku da je derivacija funkcije koju integriramo, neprekidna. Važan je napredak bio dokaz Cauchyjeva teorema *bez* pretpostavke o neprekidnosti derivacije. Ključni korak u tom dokazu je sljedeći teorem:

Teorem 33.1 (Goursat[1]-Pringsheimov[2] teorem) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $I \subseteq \Omega$ pravokutnik, a $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija. Tada je* $\int_{\partial I} f\, dz = 0$.

Dokaz: Označimo s $J(I) := \left| \int_{\partial I} f\, dz \right|$. Razdijelimo I na četiri međusobno sukladna pravokutnika Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, koji su svi slični pravokutniku I. Kako je $\int_{\partial I} = \int_{\partial Q_1} + \cdots + \int_{\partial Q_4}$, to je

$$J(I) = \left| \int_{\partial I} f\, dz \right| \le \left| \int_{\partial Q_1} f\, dz \right| + \cdots + \left| \int_{\partial Q_4} f\, dz \right|\ ,$$



pa je integral po rubu najmanje jednog od tih pravokutnika, po modulu barem jednak četvrtini broja $J(I)$. Označimo jedan takav pravokutnik s I_1, i neka je $J(I_1) := \left| \int_{\partial I_1} f\, dz \right|$. Dakle

$$J(I_1) \ge \frac{1}{4} J(I)\ .$$

Razdijelimo sada I_1 na četiri sukladna pravokutnika, pa na isti način zaključujemo da za barem jednog od njih, nazovimo ga s I_2, vrijedi

$$J(I_2) \ge \frac{1}{4} J(I_1) \ge \frac{1}{4^2} J(I)\ .$$

[1] Edouard Jean-Baptiste Goursat (1858–1936), francuski matematičar
[2] Alfred Pringsheim (1850–1941), njemački matematičar, rođen u Poljskoj

Nastavimo li na isti način, dolazimo do niza pravokutnika I_n, $n \in \mathbb{N}$, takvih da je $I_{n+1} \subseteq I_n$, za sve n, i da je

$$J(I_n) \geq \frac{1}{4^n} J(I)\,. \tag{1}$$

Za dijametre tih pravokutnika vrijedi $\operatorname{diam} I_n = \frac{1}{2^n} \operatorname{diam} I$, pa se radi o silaznom nizu zatvorenih skupova kojima dijametri teže nuli. Prema Cantorovom teoremu o presjeku, teorem 4.13, presjek tih pravokutnika je neprazan i sastoji se od jedne jedine točke, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n =: \{z_0\}$.

Funkcija f derivabilna je u točki z_0, pa za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za $0 < |z - z_0| < \delta$, vrijedi $\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon$, tj.

$$|z - z_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|\,. \tag{2}$$

Neka je n tako velik da je I_n sadržan u otvorenom krugu oko z_0 radijusa δ. Kako funkcija $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ ima na Ω, čak na čitavom $\mathbb{C}$, primitivnu funkciju, to je prema Cauchyjevom teoremu za derivaciju, teorem 32.2,

$$\int_{\partial I_n} \big(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\big)\, dz = 0\,. \tag{3}$$

Stoga je, prema lemi o ocjeni integrala, lema 32.1,

$$J(I_n) = \Big|\int_{\partial I_n} f\, dz\Big| = \Big|\int_{\partial I_n} \big(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\big)\, dz\Big| \leq M s_n\,, \tag{4}$$

gdje je $M := \max\{|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| : z \in \partial I_n\}$, a s_n je opseg pravokutnika I_n.

Međutim, za svaki $z \in \partial I_n$ je

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \overset{(2)}{\leq} \varepsilon\, |z - z_0| < \varepsilon \cdot \frac{1}{2} s_n\,,$$

pa je $M < \frac{1}{2}\, \varepsilon s_n$, te zbog (4) vrijedi

$$J(I_n) < \frac{1}{2}\, \varepsilon s_n^2\,. \tag{5}$$

Prema konstrukciji je $s_n = \frac{1}{2^n}\, s$, gdje je s opseg pravokutnika I, pa je

$$J(I) \overset{(1)}{\leq} 4^n J(I_n) \overset{(5)}{\leq} \frac{1}{2}\, 4^n \varepsilon s_n^2 = \frac{1}{2}\, 4^n \varepsilon \Big(\frac{1}{2^n}\Big)^2 s^2 = \frac{1}{2}\, \varepsilon s^2\,.$$

Dokaz: Primijetimo najprije, da, prema napomeni 39.1, S, skup singulariteta funkcije f, nema gomilište koje pripada skupu Ω, jer bi inače to gomilište bilo neizoliran singularitet funkcije f. Stoga proizvoljan kompaktan podskup od Ω sadrži najviše konačno mnogo elemenata skupa S.

Neka je γ zatvoren po dijelovima gladak put, nulhomotopan u Ω, i neka je $H\colon [a,b]\times[0,1] \to \Omega$ homotopija između γ i nekog konstantnog puta. Označimo s $H^\clubsuit := H([a,b] \times [0,1]) \subseteq \Omega$ trag (sliku) homotopije H. Za svaku točku $z \in \mathbb{C} \setminus H^\clubsuit$ je zatvoren put γ nulhomotopan u $\mathbb{C} \setminus \{z\}$, pa je $\nu(\gamma, z) = 0$, propozicija 34.3 (i).

Označimo sa $S_H := S \cap H^\clubsuit$ skup onih singulariteta funkcije f koji se nalaze u skupu $H^\clubsuit$, i neka je $S_O := S \setminus S_H$ skup ostalih singulariteta. Zbog kompaktnosti pravokutnika $[a,b]\times[0,1]$ i neprekidnosti homotopije H, skup $H^\clubsuit$ je kompaktan, pa je skup S_H konačan, a za sve točke $s \in S_O$ je $\nu(\gamma, s) = 0$.

Neka je $\Omega_1 := \Omega \setminus S_O$. Pokažimo da je to otvoren skup. Neka je $z \in \Omega_1$ proizvoljna točka. z nije gomilište skupa S_O, jer bi to onda bilo i gomilište skupa S, a pokazali smo da takvih u Ω nema. Zbog toga, postoji $r > 0$ takav da je $K(z,r) \subseteq \Omega \setminus S_O = \Omega_1$, tj. skup Ω_1 je otvoren.

Restrikcija funkcije f na otvoren skup Ω_1 je funkcija koja je holomorfna, osim u točkama konačnog skupa $S_H =: \{s_1, \ldots, s_k\}$, a zatvoren put γ je nulhomotopan u Ω_1, jer je $H^\clubsuit \subseteq \Omega_1$. Možemo, dakle, na tu restrikciju primijeniti prethodni teorem o reziduumima za funkciju s konačno mnogo singulariteta, pa dobivamo

$$\int_\gamma f\, dz = 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} \nu(\gamma, s_j)\, \operatorname{res}(f, s_j)\,.$$

Kako smo dokazali da je $\nu(\gamma, s) = 0$ za sve $s \in S_O$, to sumu u prethodnoj formuli možemo napisati i kao $\sum_{s\in S}$, pa smo tako dokazali (5). ■

§ 41 Broj nultočaka i polova meromorfnih funkcija

Primijenit ćemo sada teorem o reziduumima na određivanje broja nultočaka i polova meromorfnih funkcija, a kao jednostavnu posljedicu dobit ćemo i dokaz Drugog osnovnog teorema algebre.

Kako meromorfna funkcija, u točkama u kojima nije holomorfna, ima samo uklonjive singularitete i polove, možemo uklonjive singularitete zaista i ukloniti, *Dokaz:* Neka je $g_j(z) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(j)}\,(z-s_j)^{-n}$ glavni dio Laurentova razvoja funkcije f oko točke s_j, $j = 1,\dots,k$. Definirajmo funkciju $h\colon \Omega \to \mathbb{C}$ formulom

$$h(z) := f(z) - \sum_{j=1}^{k} g_j(z)\,. \tag{2}$$

Svaka od funkcija g_j je holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \{s_j\}$, pa je funkcija h holomorfna, osim u točkama $s_1, s_2 \dots, s_k$, u kojima ima uklonjive singularitete. Primijenimo li sada Cauchyjev teorem za funkcije s uklonjivim singularitetima, korolar 39.2, dobivamo

$$\int_\gamma h\,dz = 0\,. \tag{3}$$

Za svaki $j \in \{1,\dots,k\}$ je

$$\int_\gamma g_j\,dz = 2\pi\mathrm{i}\,\nu(\gamma, s_j)\,\mathrm{res}(f, s_j)\,. \tag{4}$$

Zaista, kako je funkcija g_j holomorfna na $\mathbb{C}\setminus\{s_j\}$, red kojim je ona definirana konvergira lokalno uniformno na cijelom skupu $\mathbb{C}\setminus\{s_j\}$, vidi dokaz tvrdnje (i) teorema o jedinstvenosti Laurentova reda, teorem 38.2, pa, jer put γ ne prolazi točkom s_j, taj red konvergira uniformno na $\gamma^\clubsuit$. Zato možemo integrirati član po član, pa dobivamo

$$\int_\gamma g_j\,dz = \int_\gamma \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(j)}(z-s_j)^{-n}\,dz = a_{-1}^{(j)}\,2\pi\mathrm{i}\;\nu(\gamma,s_j) = 2\pi\mathrm{i}\,\nu(\gamma,s_j)\;\mathrm{res}(f,s_j)\,,$$

jer za $n \neq 1$, funkcije $z \mapsto \frac{1}{(z-s_j)^n}$ imaju na $\mathbb{C}\setminus\{s_j\} \supseteq \gamma^\clubsuit$, primitivnu funkciju, te je njihov integral duž γ jednak nuli.

Zbrajanjem formula (4), iz (2) i (3) dobivamo tvrdnju teorema. ■

Teorem 40.2 (o reziduumima) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija koja je holomorfna osim u točkama skupa $S \subseteq \Omega$, u kojima ima izolirane singularitete, i neka je $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ zatvoren, u Ω nulhomotopan, po dijelovima gladak put, koji ne prolazi niti jednim singularitetom funkcije f, tj. $\gamma^\clubsuit \cap S = \emptyset$. Tada je indeks puta γ s obzirom na sve točke skupa S osim njih konačno mnogo, jednak nuli, i vrijedi*

$$\int_\gamma f\,dz = 2\pi\mathrm{i}\sum_{s\in S}\nu(\gamma,s)\cdot\mathrm{res}(f,s)\,. \tag{5}$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, zaključujemo da je $J(I) = 0$, pa je i $\int\limits_{\partial I} f\,dz = 0$. ■

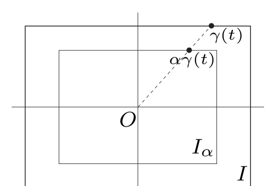
Goursat-Pringsheimov teorem govori da ako je funkcija $f\colon I \to \mathbb{C}$ derivabilna, tj. ima derivabilno proširenje na neku okolinu pravokutnika I, onda je integral funkcije f po rubu ∂I pravokutnika I, jednak nuli. U nekim je situacijama potreban nešto jači teorem — teorem koji daje isti zaključak, ali uz slabije pretpostavke.

Teorem 33.2 (Cauchyjev teorem za pravokutnik) *Neka je $f\colon I \to \mathbb{C}$ funkcija koja je neprekidna na zatvorenom pravokutniku $I \subseteq \mathbb{C}$ i takva da je derivabilna na otvorenom pravokutniku $\mathring{I} := I \setminus \partial I$, osim eventualno u konačno mnogo točaka (u kojima je samo neprekidna). Tada je $\int\limits_{\partial I} f\,dz = 0$.*

Dokaz: Dokažimo teorem najprije uz pretpostavku da je f derivabilna na cijelom otvorenom pravokutniku $\mathring{I}$. Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je središte pravokutnika I u ishodištu 0. U protivnom, zamjenom varijabli, $w := z - z_0$, gdje je z_0 središte pravokutnika I, dobivamo

$$\int_{\partial I} f(z)\,dz = \int_{\partial I_{z_0}} g(w)\,dw\,,$$

pri čemu je $I_{z_0} := I - z_0 = \{z - z_0 : z \in I\}$ pravokutnik dobiven translacijom pravokutnika I za $-z_0$, tako da mu središte padne u ishodište, a funkcija $g(w) := f(w + z_0)$ je neprekidna na I_{z_0} i derivabilna na $\mathring{I}_{z_0}$.



Za broj $\alpha \in \langle 0,1\rangle$ označimo sada s I_α pravokutnik dobiven od pravokutnika I homotetijom iz ishodišta i koeficijentom α. Tada je $I_\alpha \subseteq \mathring{I}$, a kako je f derivabilna na $\mathring{I}$, po Goursat-Pringsheimovom teoremu zaključujemo da je $\int\limits_{\partial I_\alpha} f\,dz = 0$, za sve $\alpha \in \langle 0,1\rangle$.

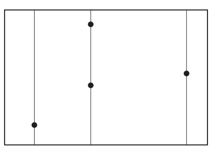
Neka je $t \mapsto \gamma(t)$, $t \in [a,b]$, po dijelovima glatka parametrizacija ruba ∂I pravokutnika I. Tada je $t \mapsto \alpha\,\gamma(t)$, $t \in [a,b]$, po dijelovima glatka parametrizacija ruba ∂I_α pravokutnika I_α.

Da je parametrizacija γ glatka, tj. funkcija γ' neprekidna, bila bi neprekidna i funkcija $(\alpha,t) \mapsto f(\alpha\,\gamma(t))\,\alpha\,\gamma'(t)$, pa bi limes po α i integral po t komutirali.

Imali bismo tada

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\alpha\to 1}\int_{\partial I_\alpha} f\,dz = \lim_{\alpha\to 1}\int_a^b f(\alpha\,\gamma(t))\,\alpha\,\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_a^b \lim_{\alpha\to 1} f(\alpha\,\gamma(t))\,\alpha\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_{\partial I} f\,dz\,. \end{aligned}$$

Kako je, međutim, parametrizacija γ samo po dijelovima glatka, to je njena derivacija γ' neprekidna osim u konačno mnogo točaka, tj. nije neprekidna u, naprimjer, tri točke. Stoga treba integral $\int_a^b f(\alpha\gamma(t))\alpha\gamma'(t)\,dt$ rastaviti na četiri dijela na kojima je γ' neprekidna, provesti gornji račun na svakom od tih dijelova, i rezultate zbrojiti. Opet dobijemo $\int_{\partial I} f\,dz = 0$.



U općem slučaju, kada f u konačno mnogo točaka možda nije derivabilna, kroz te točke povučemo paralele sa, naprimjer, imaginarnom osi, i tako razdijelimo pravokutnik I na nekoliko manjih pravokutnika. Na svakom od tako dobivenih pravokutnika funkcija f je neprekidna, a na nutrini i derivabilna, pa je, prema upravo dokazanom, integral po rubu svakog od tih pravokutnika, jednak nuli. Zbroj integrala po rubovima tih pravokutnika, jednak je integralu po rubu pravokutnika I, pa je $\int\limits_{\partial I} f\,dz = 0$. ■

Kombinacijom ranijih teorema, dobivamo sada

Teorem 33.3 (Cauchyjev teorem za krug) *Neka je $K \subseteq \mathbb{C}$ (otvoren) krug, a $f\colon K \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija, koja je i derivabilna, osim eventualno u konačno mnogo točaka. Tada je $\int\limits_\gamma f\,dz = 0$, za sve po dijelovima glatke zatvorene puteve γ u K.*

Dokaz: Prema Cauchyjevu teoremu za pravokutnik, $\int_{\partial I} f\,dz = 0$ za svaki pravokutnik $I \subseteq K$. Stoga, jer je funkcija f neprekidna, prema teoremu o postojanju primitivne funkcije na krugu, teorem 32.4, postoji derivabilna funkcija $F\colon K \to \mathbb{C}$ takva da je $F' = f$. Prema Cauchyjevom teoremu za derivaciju, teorem 32.2, integral funkcije f ne ovisi o putu, tj. $\int\limits_\gamma f\,dz = 0$ za sve po dijelovima glatke zatvorene puteve u K. ■

Odgovarajućom modifikacijom, teorem o postojanju primitivne funkcije, nije teško poopćiti na konveksne ili čak na tzv. zvjezdaste skupove, pa se i prethodni teorem lako može poopćiti na takve skupove. Međutim, opći Cauchyjev teorem, koji ćemo sada dokazati, sve te varijante sadrži kao specijalne slučajeve.

§ 40 Reziduumi

U ovoj ćemo točki dokazati teorem o reziduumima, koji je vrlo koristan i teoretski i u primjenama.

Definicija 40.1 Neka je funkcija f holomorfna na probušenom krugu $K^*(z_0, r)$ i neka je $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ njezin Laurentov red oko točke z_0. Koeficijent a_{-1} uz $\dfrac{1}{z-z_0}$ naziva se ***reziduum*** funkcije f u točki z_0, i označavamo ga $\mathrm{res}(f, z_0)$.

Promotrimo li Laurentov razvoj funkcije $z \mapsto f(z) - \frac{\mathrm{res}(f,z_0)}{z-z_0}$ oko točke z_0, vidimo da ona ima na probušenom krugu $K^*(z_0, r)$ primitivnu funkciju. Tako na reziduum funkcije u nekoj točki, možemo gledati kao na mjeru koliko se ta funkcija razlikuje od derivacije neke holomorfne funkcije definirane na okolini te točke.

Prema formuli (2) na str. 62, za koeficijente Laurentova reda, vidimo da je

$$\mathrm{res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_0} f(\zeta)\,d\zeta\,,$$

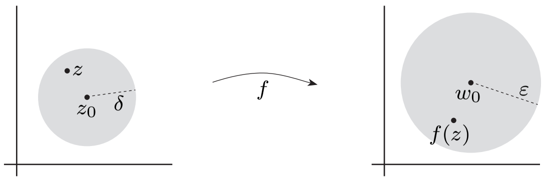
gdje je Γ_0 neka dovoljno mala pozitivno orijentirana kružnica oko z_0. Napišemo li tu formulu kao

$$\int_{\Gamma_0} f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}(f, z_0)\,,$$

dobivamo korisnu formulu za nalaženje integrala kompleksne funkcije u slučajevima kada znamo njezin Laurentov razvoj, ili barem koeficijent uz $\dfrac{1}{z-z_0}$. Teorem o reziduumima, koji ćemo sada dokazati, poopćuje tu formulu.

Teorem 40.1 (o reziduumima za funkcije s konačno mnogo singulariteta) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija koja je holomorfna osim u točkama $s_1, s_2, \ldots, s_k$, u kojima ima izolirane singularitete, i neka je γ zatvoren, u Ω nulhomotopan, po dijelovima gladak put, koji ne prolazi niti jednom od tih točaka. Tada je*

$$\int_\gamma f\,dz = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^k \nu(\gamma, s_j)\cdot \mathrm{res}(f, s_j)\,. \tag{1}$$



Dokaz: Neka je z_0 bitan singularitet funkcije f, i odaberimo δ, w i ε kao u iskazu teorema. Ako postoji $z \in K^*(z_0, \delta)$ takav da je $f(z) = w$, tvrdnja je dokazana.

Pretpostavimo, dakle, da je $f(z) \neq w$ za svaki $z \in K^*(z_0, \delta)$. Tada je i funkcija $g\colon K^*(z_0, \delta) \to \mathbb{C}$, definirana s $g(z) := \dfrac{1}{f(z) - w}$, holomorfna na $K^*(z_0, \delta)$. Funkcija g ima u z_0 izoliran singularitet.

Ako je funkcija g omeđena na nekoj okolini točke z_0, onda je z_0 uklonjiv singularitet, pa postoji limes $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) =: \ell \in \mathbb{C}$.

Ako je $\ell \neq 0$, onda je $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \dfrac{1}{\ell} + w$, pa bi, prema teoremu 39.1, funkcija f imala u z_0 uklonjiv singularitet, i u njezinom Laurentovom razvoju oko z_0 ne bi bilo negativnih potencija.

Ako je $\ell = 0$, onda je $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z) - w| = +\infty$, pa je i $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$, što bi, prema teoremu 39.3, značilo da f ima u z_0 pol, dakle, u Laurentovom razvoju bilo bi samo konačno mnogo negativnih potencija.

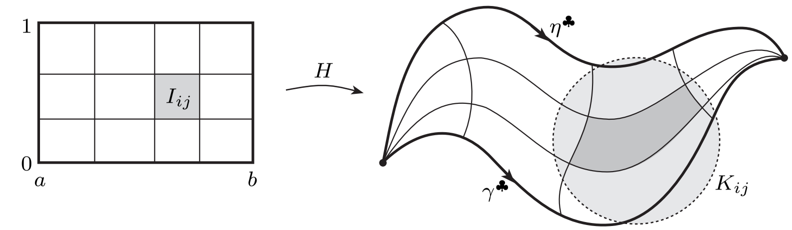
Prema tome, otpadaju obje mogućnosti, pa je funkcija g neomeđena na svakoj okolini točke z_0. To specijalno znači, da i za odabrane δ i ε, postoji $z \in K^*(z_0, \delta)$ takav da je $|g(z)| > \dfrac{1}{\varepsilon}$, tj. $|f(z) - w| < \varepsilon$.

Obrat je jednostavan. Naime, ako je za svaki $\delta > 0$, slika probušenog δ-kruga oko z_0 gusta na $\mathbb{C}$, onda niti može f biti omeđena na nekoj okolini točke z_0, niti može limes modula biti jednak $+\infty$. Prema karakterizacijama uklonjivih singulariteta, odnosno polova, zaključujemo da u Laurentovom razvoju funkcije f oko točke z_0 mora biti beskonačno mnogo negativnih potencija, pa je z_0 bitan singularitet funkcije f. ∎

Primjeri funkcija s bitnim singularitetom su $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$ i $z \mapsto \sin\dfrac{1}{z}$. Obje ove funkcije imaju bitan singularitet u 0, što se jednostavno vidi iz njihovih Laurentovih razvoja.

Teorem 33.4 (Opći Cauchyjev teorem) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, i neka je $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija koja je i derivabilna, osim eventualno u konačno mnogo točaka. Tada je $\int\limits_\gamma f\,dz = 0$ za svaki zatvoren, u Ω nulhomotopan, po dijelovima gladak put γ.*

Dokaz: Dovoljno je dokazati da ako su $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ i $\eta\colon [a,b] \to \Omega$ homotopni po dijelovima glatki putevi sa zajedničkim krajevima, tj. $\gamma(a) = \eta(a)$ i $\gamma(b) = \eta(b)$, onda je $\int_\gamma f\,dz = \int_\eta f\,dz$.



Dokaz je gotovo identičan dokazu teorema 26.3 da su integrali zatvorene diferencijalne 1-forme po homotopnim putevima jednaki. Neka je, dakle, $H\colon [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ PDG homotopija od γ do η. Odaberimo razdiobu ρ pravokutnika $I = [a,b] \times [0,1]$ tako da H preslikava svaki pravokutnik I_{ij} te razdiobe, u neki krug K_{ij} koji je sadržan u Ω. Restrikcija homotopije H na rub ∂I_{ij} je zatvoren PDG put u krugu K_{ij}, pa je, prema Cauchyjevu teoremu za krug, $\int_{H|_{\partial I_{ij}}} f\,dz = 0$. Sumiranjem svih tih integrala, zaključujemo da je $\int_{H|_{\partial I}} f\,dz = 0$. Kako su restrikcije preslikavanja H na lijevu i desnu stranicu pravokutnika I konstantni putevi, to je $\int_{H|_{\partial I}} f\,dz = \int_\gamma f\,dz - \int_\eta f\,dz$, odakle slijedi tvrdnja teorema. ∎

Korolar 33.5 (Cauchyjev teorem za jednostavno povezano područje) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jednostavno povezano područje, a $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija, koja je i derivabilna, osim eventualno u konačno mnogo točaka. Tada je $\int\limits_\gamma f\,dz = 0$ za svaki po dijelovima gladak zatvoren put γ u Ω.* ∎

Napomena 33.1 Postoji i „kraći dokaz” Cauchyjeva teorema. Naime, za derivabilnu funkciju $f = u + \mathrm{i}\,v\colon \Omega \to \mathbb{C}$ i, barem za jednostavno zatvorenu krivulju Γ, koja je nulhomotopna u Ω, tj. takva je da je i njezino unutrašnje područje B sadržano u Ω, koristeći se Greenovim teoremom, teorem 27.5, i

Cauchy-Riemannovim uvjetima, teorem 31.1, dobivamo

$$\int_\Gamma f\,dz = \int_\Gamma u\,dx - v\,dy \;+\; \mathrm{i}\int_\Gamma v\,dx + u\,dy$$
$$\stackrel{\text{Green}}{=} \iint_B (-\partial_x v - \partial_y u)\,dx\,dy \;+\; \mathrm{i}\iint_B (\partial_x u - \partial_y v)\,dx\,dy \stackrel{\text{(CR)}}{=} 0\,.$$

Međutim, da bismo mogli koristiti Greenov teorem, morale bi funkcije u i v biti diferencijabilne klase C^1, tj. derivacija f' morala bi biti neprekidna, dok smo mi bili pretpostavili samo postojanje derivacije, a u konačno mnogo točaka čak samo neprekidnost. To je značajna razlika, i, kao što ćemo kasnije vidjeti, važno je imati dokaz Cauchyjeva teorema *bez pretpostavke o neprekidnosti derivacije*.

Povijest ovog važnog teorema, koji predstavlja veleban ulaz u teoriju funkcija kompleksne varijable, dugačka je i zanimljiva. Originalni je dokaz dao Cauchy 1825. godine, uz dodatnu pretpostavku da je derivacija neprekidna. Kasnije tokom devetnaestog stoljeća, pojavilo se više dokaza tog teorema i uz različite pretpostavke o tipu puta integracije — nekad uz prešutno, a nekad uz eksplicitno pretpostavljenu neprekidnost derivacije. Godine 1884. Goursat je objavio jedan jednostavniji dokaz ovog teorema, uz samo jednu, ‚očitu' pretpostavku, da teorem vrijedi za dvije jednostavne funkcije: konstantnu funkciju i identitetu, ali bez pretpostavke o neprekidnosti derivacije. Barem je tako Goursat tvrdio.

Alfred Pringsheim je 1895. pomno analizirajući Goursatov dokaz, ustvrdio da se u dokazu prešutno pretpostavlja *uniformna derivabilnost*, za što je pokazao da je ekvivalentno pretpostavci o neprekidnosti derivacije. Stoga Goursatov dokaz predstavlja samo pojednostavljenje drugih dokaza Cauchyjeva teorema, ali ne i oslabljenje pretpostavki. Pringsheim je izrazio svoje uvjerenje da teorem vrijedi samo uz pretpostavku da derivacija postoji, bez pretpostavke o njezinoj neprekidnosti, ali je taj problem još uvijek ostao otvoren.

Ova Pringsheimova kritika proizvela je pravu buru, pa su, između ostalog, 1900. objavljena dva nova dokaza. U jednom je Goursat ponovio svoj raniji dokaz, ali uz više pažnje i uz izvjesne pretpostavke o tipu puta integracije, a u drugom je Moore[1] dao svoj dokaz Cauchyjeva teorema, uz nešto drugačije pretpostavke. U svom odgovoru 1901. Pringsheim je prigovorio da su u oba rada pretpostavke o tipu puta integracije previše restriktivne, pa je kombinirajući i profinivši te dokaze, dobio Cauchyjev teorem bez pretpostavke o neprekidnosti derivacije, i to za zatvorene rektifikabilne puteve. Dvije godine kasnije, Pringsheim se vratio Cauchyjevu teoremu, i dao dokaz u kojem koristi tehniku

[1]Eliakim Hastings Moore (1862–1932), američki matematičar

pa je $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1$. Odavde slijedi da je $\lim\limits_{z\to 0} z\,\frac{1}{\sin z} = 1$, pa, prema teoremu 39.1, funkcija $z \mapsto z\,\frac{1}{\sin z}$ ima u 0 uklonjiv singularitet. Primijenimo li sada prethodni teorem kojim su karakterizirani polovi, zaključujemo da funkcija $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ ima u 0 pol, i to prvoga reda.

Definicija 39.3 Za funkciju f kažemo da je ***meromorfna*** na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ako skup singulariteta nema gomilište u Ω, i ako su svi singulariteti ili uklonjivi ili polovi.

Tipični primjeri meromorfnih funkcija su racionalne funkcije. One, ako su brojnik i nazivnik relativno prosti, tj. razlomak je ‚skraćen do kraja', od singulariteta imaju samo polove, i to u nultočkama nazivnika. Ima međutim i drugih meromorfnih funkcija. Naprimjer, funkcija $z \mapsto \frac{1}{\sin z}$ također je meromorfna na $\mathbb{C}$, jer ona, od singulariteta u $\mathbb{C}$, ima samo polove, i to u nultočkama funkcije sinus. Treba ipak malo pripaziti. Funkcija $z \mapsto \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ meromorfna je na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, ali nije meromorfna na $\mathbb{C}$, jer 0 jeste singularitet te funkcije, ali nije izoliran (pa ne može biti pol niti uklonjiv singularitet).

Promatrajući Laurentov razvoj funkcije oko singulariteta z_0, ostaje još jedna mogućnost — da je glavni dio beskonačan. Za izoliran singularitet z_0 kažemo da je ***bitan singularitet*** ako u Laurentovom razvoju funkcije f oko točke z_0 ima beskonačno mnogo članova s negativnim potencijama, tj. beskonačno mnogo koeficijenata uz negativne potencije je različito od nule.

Iz već dokazanog o ponašanju funkcije u okolini uklonjivih singulariteta i polova, vidimo da funkcija ne može biti ograničena niti na jednoj okolini bitnog singulariteta, ali ne može niti po modulu težiti u $+\infty$. Ona je, dakle, neomeđena na svakoj okolini točke z_0, i čak njezin modul nema niti konačnog niti beskonačnog limesa. Preciznije o ponašanju funkcije u okolini bitnog singulariteta, govori sljedeći teorem.

Teorem 39.4 (Casorati[1]-Weierstrass-Sohockij[2]) *Neka je funkcija f holomorfna na probušenom krugu $K^*(z_0,R)$. Točka z_0 je bitan singularitet funkcije f ako i samo ako je za svaki $\delta > 0$, slika probušenog kruga $K^*(z_0,\delta)$ gusta na $\mathbb{C}$, tj. za svaki $w \in \mathbb{C}$ i svaki $\varepsilon > 0$, postoji $z \in K^*(z_0,\delta)$, takav da je $|f(z) - w| < \varepsilon$.*

[1]Felice Casorati (1835–1890), talijanski matematičar
[2]Julian-Karl Vasilievič Sohockij (1842–1927), ruski matematičar, rođen u Poljskoj

uklonjiv singularitet, i ako definiramo $g(z_0) := 0$, dobivamo holomorfnu funkciju na cijelom krugu $K(z_0, \delta)$.

Točka z_0 je jedina nultočka funkcije g, i označimo njezin red s m. Prema teoremu 37.4, na krugu $K(z_0, \delta)$ postoji holomorfna funkcija h takva da je

$$g(z) = (z - z_0)^m \, h(z) \ , \quad |z - z_0| < \delta \ , \tag{2}$$

i $h(z) \neq 0$ za sve $|z - z_0| < \delta$. Zbog toga je i funkcija $\frac{1}{h}$ holomorfna na $K(z_0, \delta)$, i neka je $\frac{1}{h(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ njezin Taylorov razvoj oko z_0. Tada je, prema (2),

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{g(z)} &= \frac{1}{(z - z_0)^m} \frac{1}{h(z)} \ , \quad 0 < |z - z_0| < \delta \\ &= \sum_{n=-m}^{\infty} b_{m+n} (z - z_0)^n \ , \end{aligned}$$

pa f ima u z_0 pol m-tog reda, jer je $b_0 = \frac{1}{h(z_0)} \neq 0$. ■

Primjeri 39.2

(*i*) Za $k \in \mathbb{N}$, funkcija $z \mapsto \frac{1}{z^k}$, ima u $z_0 = 0$ pol k-tog reda.

(*ii*) Funkcija $f(z) := \frac{1}{\sin z}$ ima u $z_0 = 0$ pol prvog reda. Zaista, 0 je izoliran singularitet funkcije f, jer, kako je sinus holomorfna funkcija, sve njezine nultočke, pa tako i 0, su izolirane. Da je 0 pol funkcije f slijedi već iz činjenice da je $\lim_{z \to 0} \frac{1}{|\sin z|} = +\infty$. Kojega je reda taj pol? Kako nemamo na raspolaganju Laurentov razvoj funkcije f, možemo razmišljati ovako:

Promatrajmo funkciju

$$z \mapsto z f(z) = z \, \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{\frac{\sin z}{z}} \ .$$

Funkcija $z \mapsto \frac{\sin z}{z}$ ima u 0 uklonjiv singularitet, jer je njezin Laurentov razvoj oko 0 (prvih nekoliko članova)

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\Big(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\Big) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots \ ,$$

dijeljenja pravokutnika na četiri sukladna pravokutnika, kao što smo mi radili u dokazu teorema 33.1 (s tim da je on radio s trokutima, a ne s pravokutnicima). Zato smo ovdje taj teorem i nazvali Goursat-Pringsheimovim.

Time, međutim, priča o Cauchyjevu teoremu nije bila gotova. Još su se idućih tridesetak godina matematičari, među njima i neki vrlo ugledni, prepucavali o detaljima, prioritetima i atribucijama. Mnogi zanimljivi detalji o događanjima vezanim uz Cauchyjev teorem mogu se naći u članku J. Graya[1].

Dokaz činjenice, da je derivacija kompleksne funkcije uvijek neprekidna, a koji se ne oslanja na Cauchyjev teorem, napravljen je istom početkom 1960-tih godina, i, naravno, nije ništa kraći niti jednostavniji od dokaza kojeg ćemo mi prikazati, tj. dokaza koji koristi Cauchyjev teorem.

§ 34 Cauchyjeva integralna formula

Kao posljedicu Cauchyjevog teorema, dokazat ćemo sada Cauchyjevu integralnu formulu — rezultat iz kojeg će, kao posljedice, slijediti mnogi, često i neočekivani rezultati o kompleksnim funkcijama.

Dokažimo najprije jedan pomoćni rezultat:

Propozicija 34.1 *Neka je γ po dijelovima gladak zatvoren put u $\mathbb{C}$, i neka je $z_0 \notin \gamma^\clubsuit$. Tada je vrijednost*

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

cijeli broj.

Dokaz: Neka je $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ po dijelovima gladak zatvoren put, $\gamma(a) = \gamma(b)$. Definirajmo funkciju $h\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ s

$$h(t) := \int_a^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u) - z_0} \, du \ .$$

To je neprekidna funkcija, a u točkama u kojima je γ' neprekidna, h ima i derivaciju jednaku

$$h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} \ .$$

[1] Jeremy Gray. Goursat, Pringsheim, Walsh, and the Cauchy integral Theorem, *Mathematical Intelligencer*, **22** (4) (2000), 60–66,77.

Primijetimo, nadalje, da je $h(a) = 0$.

Promotrimo funkciju $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ definiranu s

$$\varphi(t) := e^{-h(t)}(\gamma(t) - z_0) .$$

Funkcija φ derivabilna je tamo gdje je i h derivabilna, i vrijedi

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= -e^{-h(t)}\, h'(t)\, (\gamma(t) - z_0) + e^{-h(t)}\, \gamma'(t) \\ &= -e^{-h(t)}\, \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}\, (\gamma(t) - z_0) + e^{-h(t)}\, \gamma'(t) = 0 .\end{aligned}$$

Iako za funkciju φ znamo samo da je po dijelovima derivabilna, jer je γ samo po dijelovima glatka, ipak, zbog neprekidnosti funkcije φ, zaključujemo da je ona konstantna. Stoga je $\varphi(b) = \varphi(a)$, tj.

$$e^{-h(b)}\, (\gamma(b) - z_0) = e^{-h(a)}\, (\gamma(a) - z_0) .$$

Kako je $\gamma(b) = \gamma(a)$ i $h(a) = 0$, odavde slijedi $e^{h(b)} = 1$, tj. $h(b) = 2k\pi\mathrm{i}$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. Dakle,

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_a^b \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u) - z_0}\, du = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} h(b) = k \in \mathbb{Z} .$$ ■

Korolar 34.2 *Za po dijelovima gladak zatvoren put γ u $\mathbb{C}$ i točku $z_0 \notin \gamma^\clubsuit$, broj $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$ jednak je indeksu puta γ s obzirom na točku z_0, tj.*

$$\nu(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} .$$

(Definicijom 25.2 smo indeks zatvorenog puta γ s obzirom na točku P_0, bili definirali kao $\nu(\gamma, P_0) := \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \omega_{\vartheta,P_0}$, gdje je ω_{ϑ,P_0} kutna diferencijalna 1-forma, definirana s $\omega_{\vartheta,P_0}(x,y) := \frac{-(y - y_0)\, dx + (x - x_0)\, dy}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.)

Dokaz: Napravit ćemo dokaz za točku $z_0 = 0$. Opći slučaj dobije se translacijom

funkcije u konačno mnogo točaka ne utječe niti na njezinu integrabilnost, niti na sâm integral. ■

Drugi tip izoliranih singulariteta su polovi. Za izoliran singularitet z_0 funkcije f kažemo da je ***pol***, ako u Laurentovom razvoju funkcije f oko točke z_0 ima konačno mnogo (ali barem jedan) članova s negativnim potencijama, tj. s potencijama od $\frac{1}{z - z_0}$. ***Red pola*** je red najveće potencije od $\frac{1}{z - z_0}$ koja se u tom Laurentovom razvoju pojavljuje s koeficijentom različitim od nule.

Teorem 39.3 (Karakterizacija polova) *Neka je funkcija f holomorfna na probušenom krugu $K^*(z_0, R)$. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(i) *z_0 je pol funkcije f (reda m).*

(ii) *z_0 nije uklonjiv singularitet funkcije f, ali postoji prirodan broj k takav da je z_0 uklonjiv singularitet funkcije $z \mapsto (z - z_0)^k f(z)$. (Najmanji takav k upravo je m — red pola.)*

(iii) $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$.

Dokaz: (*i*) ⇒ (*ii*) Ako je z_0 pol m-tog reda funkcije f, onda, prema definiciji, Laurentov razvoj funkcije f oko točke z_0 ima oblik $f(z) = \sum\limits_{n=-m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, $a_{-m} \neq 0$, $m \geq 1$, pa prema teoremu 39.1 kojim su karakterizirani uklonjivi singulariteti, z_0 nije uklonjiv singularitet funkcije f. Pomnožimo li f sa $(z - z_0)^k$, za svaki $k \geq m$ dobit ćemo funkciju koja u svom Laurentovom razvoju oko točke z_0 nema negativnih potencija, pa je, prema istom teoremu, z_0 uklonjiv singularitet te funkcije. Očito je najmanji prirodan broj s ovim svojstvom, upravo broj m — red pola.

(*ii*) ⇒ (*iii*) Ako funkcija $g(z) := (z - z_0)^m f(z)$ ima u z_0 uklonjiv singularitet, onda, prema teoremu 39.1, postoji limes $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) \in \mathbb{C}$, pa je, zbog $m \geq 1$, $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = \lim\limits_{z\to z_0} \frac{|g(z)|}{|z - z_0|^m} = +\infty$.

(*iii*) ⇒ (*i*) Pretpostavimo da je $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$. To znači da za svaki $M > 0$ postoji $\delta > 0$, takav da za svaki $z \in K^*(z_0, \delta)$ vrijedi $|f(z)| > M$. Specijalno (uzevši npr. $M = 1$), postoji $\delta > 0$ takav da je $f(z) \neq 0$ za sve $z \in K^*(z_0, \delta)$. Definirajmo funkciju $g\colon K^*(z_0, \delta) \to \mathbb{C}$ s $g(z) := \frac{1}{f(z)}$. Funkcija g je holomorfna na $K^*(z_0, \delta)$ i $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = 0$. Prema teoremu 39.1, g ima u z_0

Neka je $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ Laurentov razvoj funkcije f na probušenom krugu $K^*(z_0, R)$. Prema Cauchyjevim ocjenama koeficijenata Laurentova reda, teorem 38.3, je $|a_{-n}| \leq r^n M(r)$ za sve $n \geq 1$, pa zbog (1) zaključujemo da je $a_{-n} = 0$ za sve $n \geq 1$, tj. koeficijenti uz sve negativne potencije u Laurentovom redu funkcije f oko točke z_0, jednaki su nuli.

$(v) \Rightarrow (i)$ Ova implikacija je opet jednostavna. Zaista, prema (v), Laurentov razvoj funkcije f na $K^*(z_0, R)$ ima oblik $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Definiramo li $f(z_0) := a_0$, singularitet smo uklonili, jer dobivena je funkciju na cijelom krugu $K(z_0, R)$ jednaka sumi reda (nenegativnih) potencija, pa je holomorfna na tom krugu. ■

Primjer 39.1 Kao primjer, promotrimo funkciju $f(z) := \frac{1-\cos 2z}{z^2}$, koja je holomorfna svuda osim u točki 0, gdje nije definirana. Pokažimo da je taj, očito izoliran, singularitet, uklonjiv. Kako je $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots$, to je

$$f(z) = \frac{1 - \left(1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - \frac{(2z)^6}{6!} + \cdots\right)}{z^2} = \mathbf{2} - \frac{2}{3}\, z^2 + \frac{4}{45}\, z^4 + \cdots .$$

Dakle, 0 je uklonjiv singularitet funkcije f, i definiramo li $f(0) := 2$ — uklonili smo ga.

Funkcije s uklonjivim singularitetima su gotovo tako dobre kao holomorfne funkcije. Specijalno, i za njih vrijedi opći Cauchyjev teorem:

Korolar 39.2 (Cauchyjev teorem za funkcije s uklonjivim singularitetima) *Neka je funkcija $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna, osim možda u nekim točkama, u kojima ima uklonjive singularitete. Tada je za svaki, u Ω nulhomotopan, zatvoren po dijelovima gladak put γ, $\int_\gamma f\, dz = 0$.*

Dokaz: Uklonimo li singularitete funkcija f, dobivamo holomorfnu funkciju $\hat{f}$, pa na nju primijenimo opći Cauchyjev teorem, teorem 33.4. Ako put integracije ne prolazi niti jednim uklonjivim singularitetom funkcije f, onda se $\hat{f}$ i f duž tog puta podudaraju, pa su im i integrali jednaki. Ali i ako put integracije prolazi nekim od uklonjivih singulariteta funkcije f, to na integral nema utjecaja. Naime, kako su uklonjivi singulariteti izolirani, na putu γ ih, prema napomeni 39.1, ima samo konačno mnogo, a kao što znamo od ranije, promjena

za $-z_0$, tj. zamjenom $w := z - z_0$. Prema definiciji integrala je

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{dz}{z} &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{x - \mathrm{i}\, y}{x^2+y^2}\,(dx + \mathrm{i}\, dy) \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \Big(\int_\gamma \frac{x\, dx + y\, dy}{x^2+y^2} + \mathrm{i} \int_\gamma \frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2+y^2} \Big) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2+y^2} - \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \int_\gamma \frac{x\, dx + y\, dy}{x^2+y^2} . \end{aligned} \qquad (*)$$

Prema prethodnoj propoziciji je $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{dz}{z}$ cijeli, dakle realan broj pa je njegov imaginarni dio jednak nuli. Stoga je drugi od dva integrala diferencijalnih 1-formi duž puta γ u posljednjem retku prethodne formule, jednak nuli, pa je

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \omega_\vartheta ,$$

što je, prema definiciji, upravo indeks puta γ s obzirom na ishodište $O = (0, 0)$. ■

Napomena 34.1 Da je imaginaran dio u formuli $(*)$ jednak nuli, mogli smo se uvjeriti i direktno. Naime, na probušenoj ravnini $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, diferencijalna 1-forma $\frac{x\, dx + y\, dy}{x^2+y^2}$ je egzaktna, jer je jednaka (vanjskom) diferencijalu funkcije $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2)$, pa je, prema teoremu 25.2, njezin integral po zatvorenom PDG putu γ koji ne prolazi ishodištem, jednak nuli.

Primjer 34.1 Geometrijsku interpretaciju indeksa, kao broja obilazaka zatvorenog puta oko, naprimjer, ishodišta, možemo, koristeći kompleksnu logaritamsku funkciju, opisati i ovako. Neka je γ PDG put u skupu $\mathbb{C}_\pi$ — komplementu negativnog dijela realne osi, od točke z_0 do z_1. Tada je

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \ln z \Big|_{z_0}^{z_1} = \big(\ln|z| + \mathrm{i} \arg z \big) \Big|_{z_0}^{z_1} = \ln \left| \frac{z_1}{z_0} \right| + \mathrm{i}\,(\arg z_1 - \arg z_0) .$$

Ista će formula vrijediti i ako se čitav put γ nalazi u skupu $\mathbb{C}_\vartheta$ — komplementu polupravca iz ishodišta koji s pozitivnim dijelom realne osi zatvara kut ϑ, s tim da treba koristiti i odgovarajuću logaritamsku funkciju $\mathbb{C}_\vartheta \to \mathbb{C}$.

Ako je put γ zatvoren, podijelimo ga točkama $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_k = z_0$ na dijelove, tako da se svaki dio puta između točaka z_{j-1} i z_j nalazi čitav u nekom $\mathbb{C}_{\vartheta_j}$.

Kako je $z_k = z_0$, zbrajanjem dobivamo

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} (\arg z_j - \arg z_{j-1}) \ ,$$

gdje u j-tom sumandu treba za kutove $\arg z$ uzimati one koji pripadaju skupu $\mathbb{C}_{\vartheta_j}$. Suma svih tih razlika kutova bit će upravo broj obilazaka puta γ pomnožen s 2π.

Dokažimo sada nekoliko osnovnih svojstava indeksa zatvorenog puta s obzirom na točku. Ta smo svojstva mogli, koristeći se teoremom 26.4 i njegovom posljedicom korolarom 26.5, dokazati i ranije, u četvrtom poglavlju. Kako će nam ta svojstva zaista trebati istom sada, dokazat ćemo ih ovdje koristeći Cauchyjev teorem, i činjenicu dokazanu prethodnim korolarom 34.2, da se indeks može definirati i kao integral odgovarajuće kompleksne funkcije.

Propozicija 34.3 (osnovna svojstva indeksa)

(*i*) *Za čvrstu točku z_0, indeks $\nu(\gamma, z_0)$ ne mijenja se ako se γ neprekidno deformira, i niti u jednom času ne prolazi kroz z_0, tj. $\nu(\gamma_1, z_0) = \nu(\gamma_2, z_0)$ ako su zatvoreni putevi γ_1 i γ_2 homotopni u $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.*

(*ii*) *Za čvrst put γ, funkcija $z \mapsto \nu(\gamma, z)$ konstantna je na svakom krugu koji je disjunktan s $\gamma^\clubsuit$. Stoga je indeks $\nu(\gamma, z)$ konstantan na komponentama povezanosti komplementa od $\gamma^\clubsuit$, tj. skupa $\mathbb{C} \setminus \gamma^\clubsuit$.*

(*iii*) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jednostavno povezano područje, γ po dijelovima gladak zatvoren put u Ω i $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Tada je $\nu(\gamma, z_0) = 0$.*

Stoga, ako je γ proizvoljan zatvoren PDG put u $\mathbb{C}$, a z_0 točka iz neomeđene komponente povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus \gamma^\clubsuit$, onda je $\nu(\gamma, z_0) = 0$.

(*iv*) *Neka je Γ (pozitivno orijentirana) kružnica sa središtem u z_0 i radijusom r. Tada je*

$$\nu(\Gamma, z) = \begin{cases} 1 \,, & za\ |z - z_0| < r \\ 0 \,, & za\ |z - z_0| > r \end{cases} .$$

Nije teško pokazati da se pri prijelazu iz jedne komponente povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus \gamma^\clubsuit$ u susjednu, tj. pri prijelazu jednom preko krivulje $\gamma^\clubsuit$, indeks promijeni za ± 1 (i to ako gledamo u smjeru orijentacije krivulje, onda se pri prelasku slijeva nadesno indeks smanji za 1, a pri prelasku zdesna nalijevo, poveća za 1).

Teorem 39.1 (Karakterizacija uklonjivih singulariteta) *Neka je funkcija f holomorfna na probušenom krugu $K^*(z_0, R)$. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(*i*) *z_0 je uklonjiv singularitet funkcije f.*

(*ii*) *Postoji limes $\lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.*

(*iii*) *f je omeđena na nekoj okolini točke z_0.*

(*iv*) $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)\, f(z) = 0$

(*v*) *U Laurentovom razvoju funkcije f oko točke z_0 nema negativnih potencija, tj. svi koeficijenti uz negativne potencije jednaki su nuli.*

Dokaz: (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) Ako je z_0 uklonjiv singularitet funkcije f, onda, uklonivši ga, dobivamo funkciju, nazovimo ju $\hat{f}$, koja je holomorfna na nekoj okolini točke z_0, pa ona, zbog neprekidnosti, ima u z_0 limes. Kako je za limes neke funkcije nebitno kako je i je li uopće definirana u točki u kojoj se promatra limes, to i funkcija f ima u točki z_0 limes.

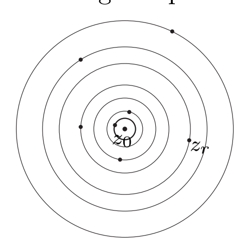
(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*) Ova implikacija slijedi iz sâme definicije limesa. Naime, neka je $\ell := \lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$. To znači, da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $z \in K^*(z_0, \delta)$ vrijedi $|f(z) - \ell| < \varepsilon$. Stoga je $f(K(z_0, \delta)) \subseteq K(\ell, \varepsilon) \cup \{f(z_0)\}$ ako f jeste definirana u z_0, ili je $f(K^*(z_0, \delta)) \subseteq K(\ell, \varepsilon)$, ukoliko nije. U oba je slučaja f ograničena na δ-okolini točke z_0.

(*iii*) $\Rightarrow$ (*iv*) Ova je implikacija trivijalna, jer ako je f omeđena na nekoj okolini točke z_0, onda zbog $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) = 0$, slijedi da limes $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)\, f(z)$ postoji, i jednak je 0.

(*iv*) $\Rightarrow$ (*v*) Za broj $0 < r < R$, s $M(r)$ označimo maksimum modula funkcije f na kružnici oko z_0 radijusa r, dakle, $M(r) := \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}$. Dokažimo, najprije, da je

$$\lim_{r \to 0} r\, M(r) = 0 \ . \tag{1}$$

Zbog kompaktnosti kružnice, za svaki $r < R$, postoji točka z_r, $|z_r - z_0| = r$,



takva da je $M(r) = |f(z_r)|$. Označimo sa S skup tako odabranih točaka z_r. Zbog (*iv*) je i $\lim_{z \to z_0} |z - z_0|\,|f(z)| = 0$, a kako je z_0 očito gomilište skupa S, to je i

$$0 = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in S}} |z - z_0|\,|f(z)| = \lim_{z_r \to z_0} |z_r - z_0|\,|f(z_r)| = \lim_{r \to 0} r\, M(r)$$

čime je dokazano (1).

zatvarača toga kruga. Druga je stvar što se funkcija f_2 na svojoj domeni podudara s restrikcijom funkcije f, a funkcija f zaista ima u točki 1 singularitet.

Singulariteta ima različitih i vrlo ‚neugodnih'. Mi ćemo promatrati samo tzv. izolirane singularitete:

Definicija 39.2 Za singularitet z_0 kažemo da je ***izoliran singularitet*** funkcije f, ako je f holomorfna funkcija na nekom probušenom krugu $K^*(z_0, R)$ oko točke z_0.

Naprimjer, točka 1 je izoliran singularitet maloprije promatranih funkcija f i f_1. Isto je tako 0 izoliran singularitet funkcije $z \mapsto \sin\frac{1}{z}$, ali 0 nije izoliran singularitet funkcije $z \mapsto \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$. Prema gornjoj definiciji, za točku 1 ne možemo kazati da je izoliran singularitet funkcije f_2, jer ta funkcija, onako kako je zadana, definirana je samo tamo gdje red $\sum z^n$ konvergira, pa nije definirana niti u jednoj točki izvan zatvorenog kruga $\overline{K}(0,1)$, dakle, nije definirana niti na jednom probušenom krugu $K^*(1,R)$, $R > 0$. Ipak, funkcija f_2 podudara se s funkcijom f na krugu $K(0,1)$, pa na f možemo gledati kao na proširenje funkcije f_2, i u tom smislu može se ipak za točku 1 kazati da je izolirani singularitet funkcije f_2. Mi u tako detaljna razmatranja nećemo ulaziti, i bavit ćemo se samo ‚pravim' izoliranim singularitetima koji su okruženi točkama u kojima promatrana funkcija je definirana, dakle točkama $z_0 \in \operatorname{Int}\overline{\Omega}$.

Napomena 39.1 Primijetimo da funkcija može imati i beskonačno mnogo izoliranih singulariteta. Ali, ako funkcija ima samo izolirane singularitete, onda skup singulariteta ne može imati gomilište koje je sadržano u Ω. Stoga niti jedan kompaktan podskup od Ω ne može sadržavati više od konačno mnogo izoliranih singulariteta takve funkcije f. Nadalje, svaki otvoren podskup od $\mathbb{C}$ je σ-kompaktan, tj. prebrojiva je unija kompaktnih podskupova, vidi teorem 5.5, pa odavde slijedi da funkcija koja ima samo izolirane singularitete, može ih imati najviše prebrojivo mnogo.

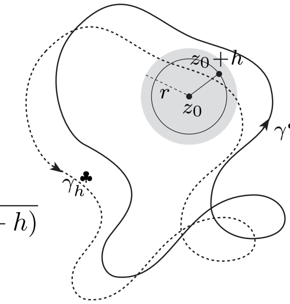
Pokazat ćemo da postoje tri vrste izoliranih singulariteta: uklonjivi, polovi i bitni singulariteti. Pođimo redom:

Za izoliran singularitet z_0 funkcije f kažemo da je ***uklonjiv***, ako u točki z_0 možemo funkciju f predefinirati ili, ako u z_0 nije bila definirana, dodefinirati, tako da postane holomorfna na nekom (pravom, neprobušenom) krugu $K(z_0, R)$ oko točke z_0. Drugim riječima, singularitet je uklonjiv, ako ga možemo ukloniti.

Sljedeći teorem daje nekoliko karakterizacija uklonjivog singulariteta.

Dokaz: (i) Kako je funkcija $z \mapsto \dfrac{1}{z - z_0}$ derivabilna na $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, to slijedi neposredno iz općeg Cauchyjeva teorema, teorem 33.4.

(ii) Neka je $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ po dijelovima gladak zatvoren put, neka je $z_0 \notin \gamma^\clubsuit$, i neka je $r > 0$ takav da krug $K(z_0, r)$ ne siječe $\gamma^\clubsuit$. Za $h \in \mathbb{C}$ takav da je $|h| < r$, označimo s $\gamma_h := \gamma - h$ put koji dobijemo tako da γ translatiramo za $-h$. Tada su γ i γ_h homotopni, s međunivoima $\gamma_{sh} := \gamma - sh$, $s \in [0,1]$, i homotopija ne prolazi točkom z_0. Prema (i) je, dakle, $\nu(\gamma_h, z_0) = \nu(\gamma, z_0)$. Međutim, položaj točke z_0 prema putu γ_h isti je kao položaj točke $z_0 + h$ prema putu γ, pa je $\nu(\gamma_h, z_0) = \nu(\gamma, z_0 + h)$. Točnije,



$$\begin{aligned}\nu(\gamma_h, z_0) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_h}\frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_a^b \frac{\gamma'(t)\,dt}{(\gamma(t) - h) - z_0}\\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_a^b \frac{\gamma'(t)\,dt}{\gamma(t) - (z_0 + h)} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{dz}{z - (z_0 + h)}\\ &= \nu(\gamma, z_0 + h)\,.\end{aligned}$$

Stoga je $\nu(\gamma, z_0 + h) = \nu(\gamma, z_0)$ za $|h| < r$, tj. funkcija $z \mapsto \nu(\gamma, z)$ je konstantna na krugu $K(z_0, r)$.

(iii) Prvi dio tvrdnje je neposredna posljedica Cauchyjeva teorema za jednostavno povezano područje, korolar 33.5. Naime, funkcija $z \mapsto \dfrac{1}{z - z_0}$ je derivabilna na $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, pa je derivabilna i na Ω, a svaki zatvoren PDG put γ u Ω je nulhomotopan u Ω zbog jednostavne povezanosti.

Za dokaz drugog dijela tvrdnje, primijetimo, najprije, da se komplement $\mathbb{C}\setminus\gamma^\clubsuit$ traga zatvorenog puta γ u ravnini, sastoji od nekoliko, možda i beskonačno mnogo, komponenti povezanosti, od kojih je jedna, i samo jedna, neomeđen skup, a ostale, ima ih barem jedna, su omeđeni otvoreni skupovi. Kako je skup $\gamma^\clubsuit$ kompaktan, dakle i omeđen, postoji dovoljno velik otvoren krug koji ga sadrži. Prema prvom dijelu tvrdnje, indeks puta γ obzirom na svaku točku izvan tog velikog kruga, jednak je nuli. Zbog tvrdnje (ii) je onda indeks puta γ jednak nuli i obzirom na svaku točku neomeđene komponente skupa $\mathbb{C} \setminus \gamma^\clubsuit$.

(iv) Da je indeks kružnice Γ s obzirom na svaku točku otvorenog kruga koju ta kružnica obrubljuje, jednak 1, slijedi iz (ii) i činjenice da je $\int\limits_\Gamma \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi\mathrm{i}$, vidi primjer 32.1. S druge strane, prema tvrdnji (iii), indeks kružnice jednak je nuli za svaku točku izvan tog kruga. ■

Sada možemo dokazati najavljivan

Teorem 34.4 (Cauchyjeva integralna formula) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija, a γ u Ω nulhomotopan, po dijelovima gladak zatvoren put. Tada za svaku točku $z_0 \in \Omega \setminus \gamma^\clubsuit$ vrijedi*

$$\nu(\gamma, z_0)\, f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz\,. \tag{C}$$

Dokaz: Definirajmo funkciju $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ s

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & , \; z \neq z_0 \\ f'(z_0) & , \; z = z_0 \end{cases}.$$

Funkcija g derivabilna je na $\Omega \setminus \{z_0\}$, i neprekidna je na čitavom skupu Ω. Prema općem Cauchyjevu teoremu, teorem 33.4, $\int_\gamma g\, dz = 0$. Stoga je

$$0 = \int_\gamma g\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \; - \underbrace{\int_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz}_{= f(z_0)\, \nu(\gamma, z_0)\, 2\pi \mathrm{i}} ,$$

odakle slijedi Cauchyjeva integralna formula (C). ■

U primjenama je γ često jednostavno zatvoren po dijelovima gladak put koji jednom obilazi točku z_0, tj. trag takvog puta je kontura u čijem se unutrašnjem području nalazi točka z_0, pa je indeks puta γ s obzirom na z_0 jednak 1. U tom slučaju, Cauchyjeva integralna formula poprima sljedeći jednostavan oblik:

Odsada će nam točka z_0 biti varijabilna, pa ćemo ju označivati sa z, a varijablu integracije sa ζ.

Korolar 34.5 *Neka je $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija, $\Gamma \subseteq \Omega$ pozitivno orijentirana kontura čije je unutrašnje područje sadržano u Ω, i neka točka z pripada tom unutrašnjem području. Tada je*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,.$$ ■

Ovaj korolar pokazuje da ako je f derivabilna funkcija na nekom području, i njezine su vrijednosti poznate u svim točkama neke nulhomotopne konture, onda su poznate vrijednosti funkcije f i u svim točkama unutrašnjeg područja te konture. U narednim ćemo teoremima ovu činjenicu još bolje razjasniti.

Teorem 38.3 (Cauchyjeve ocjene koeficijenata Laurentova reda) *Neka je $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ za $0 \le r < |z - z_0| < R$, i neka je za $r < \rho < R$, $M(\rho) := \max\{|f(z)| : |z - z_0| = \rho\}$. Tada je*

$$|a_n| \le \frac{M(\rho)}{\rho^n}\,, \quad \textit{za sve } n \in \mathbb{Z}\,.$$

Dokaz: Prema prethodnom teoremu o jedinstvenosti dvostranih redova, red $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ je upravo Laurentov red funkcije f na vijencu $V(z_0; r, R)$, pa je, prema Laurentovom teoremu 38.1, $a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$, gdje je Γ_ρ kružnica radijusa ρ oko z_0. Tvrdnja se sada dobije, kao i u dokazu teorema 37.7, korištenjem leme 32.1 o ocjeni integrala. ■

§ 39 Singulariteti

Laurentovi redovi omogućuju proučavanje funkcija i u okolini točaka u kojima nisu holomorfne, tj. u okolini singulariteta.

Definicija 39.1 Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, a $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija. Kažemo da je točka $z_0 \in \operatorname{Int} \overline{\Omega} = \overline{\Omega} \setminus \partial\overline{\Omega}$ ***singularitet funkcije*** f, ili da funkcija f ***ima u točki*** z_0 ***singularitet***, ako u točki z_0 funkcija f nije holomorfna ili uopće nije definirana u toj točki.

Kako bismo mogli govoriti o tome je li neka točka z_0 singularitet funkcije f ili nije, točka z_0 mora biti okružena točkama u kojima f jeste definirana, točnije, mora biti $z_0 \in \operatorname{Int} \overline{\Omega}$, a je li funkcija f definirana u sâmoj točki z_0 ili nije — nije odlučujuće. Naprimjer, funkcija $f(z) := \frac{1}{1-z}$ ima u točki 1 singularitet, isto kao i funkcija f_1 definirana s $f_1(z) := \begin{cases} \frac{1}{1-z} & , \; z \neq 1 \\ 0 & , \; z = 1 \end{cases}$, iako prva nije definirana u 1, a druga jeste. U svim ostalim točkama kompleksne ravnine, obje su funkcije holomorfne. S druge strane, za funkciju f_2, definiranu s $f_2(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, ne možemo kazati da, u smislu gornje definicije, ima singularitet u točki 1, jer, kako je definirana kao suma reda potencija, njezino područje definicije je samo krug konvergencije toga reda, tj. otvoren krug $K(0, 1)$, a točka 1 nije u nutrini oko 0. Budući da f nije definirana u 1 i u 2, razvit ćemo ju u redove na krugu $K(0,1)$ i na vijencima $V(0;1,2)$ i $V(0;2,+\infty)$.

Za drugi sumand, za $|z|<1$, je $-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, dok je za $|z|>1$,

$$-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}=-\sum_{n=-1}^{-\infty} z^n .$$

Za prvi sumand, $\frac{1}{z-2}$, za $|z|<2$ vrijedi

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} ,$$

a za $|z|>2$ je

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}=\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} .$$

Zbrajanjem, na sva tri područja, odgovarajućih redova, dobivamo

$$f(z)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n & , \quad |z|<1\\ -\sum_{n=-1}^{-\infty} z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n & , \quad 1<|z|<2\\ \sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-1\right)z^n & , \quad 2<|z|\end{cases} .$$

Ako želimo tu istu funkciju razviti u red, naprimjer, na probušenom krugu $K^*(1,1)$, dakle po potencijama od $z-1$, onda za prvi sumand nalazimo

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{1-(z-1)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n ,$$

dok je drugi sumand već zapisan kao red potencija od $z-1$, a svi koeficijenti a_n, osim a_{-1}, jednaki su nuli, i $a_{-1}=-1$. Tako dobivamo

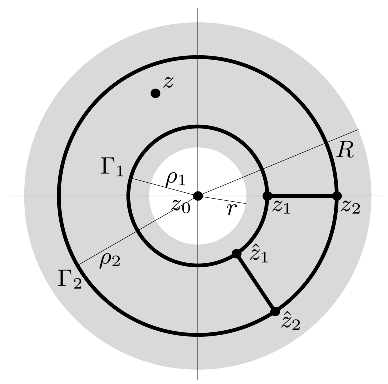
$$f(z)=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n , \quad 0<|z-1|<1 .$$

Kao i u slučaju Taylorova reda, i kod Laurentova reda dokazuju se sljedeće ocjene za koeficijente:

Korolar 34.6 *Neka je $V:=V(z_0;r,R):=\{z : r<|z-z_0|<R\}\subseteq\mathbb{C}$ kružni vijenac, neka je $f\colon V\to\mathbb{C}$ derivabilna funkcija, te neka su Γ_1 i Γ_2 pozitivno orijentirane kružnice oko z_0 radijusa ρ_1 i ρ_2, gdje je $0<r<\rho_1<\rho_2<R$. Tada za svaku točku $z\in V(z_0;\rho_1,\rho_2)$, tj. $\rho_1<|z-z_0|<\rho_2$, vrijedi*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta .$$

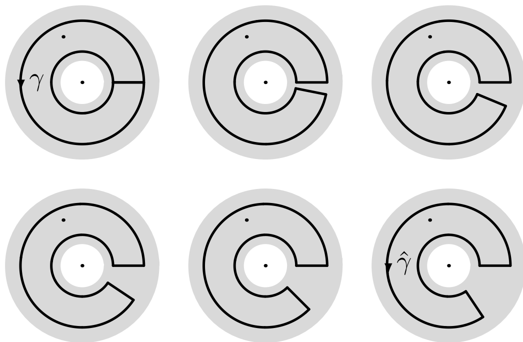
Dokaz: Neka je z neka točka vijenca između kružnica Γ_1 i Γ_2. Odaberimo dva bliska radijusa veće kružnice, Γ_2, tako da kružni isječak određen tim radijusima ne sadrži točku z, i neka su z_1, $\hat{z}_1$, z_2 i $\hat{z}_2$ točke tih radijusa koje leže na kružnicama Γ_1 odnosno Γ_2 (vidi sliku). Neka je γ zatvoren put koji počinje u točki z_1 i trag mu je $\gamma^{\clubsuit}=[z_1,z_2]+\Gamma_2+[z_2,z_1]-\Gamma_1$, a $\hat{\gamma}$ neka je put koji počinje također u točki z_1, a trag mu je $\hat{\gamma}^{\clubsuit}=[z_1,z_2]+\hat{\Gamma}_2+[\hat{z}_2,\hat{z}_1]-\hat{\Gamma}_1$, gdje su $\hat{\Gamma}_1$ i $\hat{\Gamma}_2$ dijelovi kružnica Γ_1 i Γ_2, iz kojih su izvađeni mali lukovi od z_1 do $\hat{z}_1$, odnosno od z_2 do $\hat{z}_2$.



Putevi γ i $\hat{\gamma}$ su homotopni u $V\setminus\{z\}$, i na tom je otvorenom skupu funkcija $\zeta\mapsto\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ derivabilna, pa su njezini integrali po tim putevima jednaki. Kako je $\hat{\gamma}^{\clubsuit}$ kontura i z se nalazi u njezinom unutrašnjem području, to je prema prethodnom korolaru,

$$\begin{aligned} f(\zeta)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\hat{\gamma}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\\ &=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta ,\end{aligned}$$

jer se integrali po segmentima $[z_2,z_1]$ i $[z_1,z_2]$ uzajamno dokidaju. ■



Početni i završni stadij homotopije $\hat{\gamma} \simeq \gamma$, i četiri međunivoa.

Cauchyjeva integralna formula i njezini korolari pokazuju da se vrijednost derivabilne funkcije na odgovarajućem području može izračunati kao integral po nekom putu. Zato je od interesa proučavati funkcije koje su tako i definirane.

Teorem 34.7 (o derivabilnosti funkcije definirane integralom) *Neka je γ po dijelovima gladak put u $\mathbb{C}$ (ne nužno zatvoren), neka je $\gamma^\clubsuit \subseteq \mathbb{C}$ njegov trag, i neka je $\psi\colon \gamma^\clubsuit \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija. Tada je funkcija $f\colon \mathbb{C}\setminus\gamma^\clubsuit \to \mathbb{C}$ definirana s*

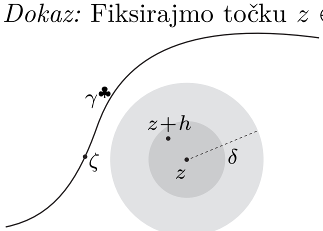
$$f(z) := \int_\gamma \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

derivabilna na $\mathbb{C}\setminus\gamma^\clubsuit$, i njezina je derivacija jednaka

$$f'(z) = \int_\gamma \frac{\psi(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta\ . \tag{1}$$

Štoviše, funkcija $f'\colon \mathbb{C}\setminus\gamma^\clubsuit \to \mathbb{C}$ je neprekidna.

Dokaz: Fiksirajmo točku $z \in \mathbb{C}\setminus\gamma^\clubsuit$ i pokažimo da je formulom (1) dâna derivacija funkcije f u točki z. Neka je $\delta > 0$ takav da je $K(z,\delta) \subseteq \mathbb{C}\setminus\gamma^\clubsuit$. Tada za sve $h \in \mathbb{C}$ takve da je $|h| < \frac{1}{2}\,\delta$, i sve $\zeta \in \gamma^\clubsuit$, vrijedi



$$\begin{aligned} |\zeta - z| &> \delta \\ |\zeta - (z+h)| &> \tfrac{1}{2}\,\delta\ . \end{aligned} \tag{2}$$

Funkcija h je dobro definirana, jer je za $r < |z - z_0| < R$, tj. za $z \in V$,

$$f_1(z) + f_2(z) = f(z) = g_1(z) + g_2(z)$$

pa je

$$f_1(z) - g_1(z) = g_2(z) - f_2(z)\ .$$

Iz definicije funkcije h, jasno je da je ona holomorfna na krugu $K(z_0, R)$ i izvan zatvorenog kruga $\overline{K}(z_0, r)$. No kako je presjek tih dvaju otvorenih skupova vijenac V, na kome se formule za h podudaraju, h je holomorfna na čitavoj kompleksnoj ravnini, tj. h je cijela funkcija. Nadalje, kako je $\lim\limits_{|z|\to\infty} f_1(z) = \lim\limits_{|z|\to\infty} g_1(z) = 0$, to je i $\lim\limits_{|z|\to\infty} h(z) = 0$, pa, kao i u dokazu Osnovnog teorema algebre, teorem 37.10, slijedi da je funkcija h i omeđena. Prema Liouvilleovom teoremu, teorem 37.9, zaključujemo da je h konstantna funkcija, a kako je $\lim\limits_{|z|\to\infty} h(z) = 0$, to je $h \equiv 0$, pa je $g_1 = f_1$ i $g_2 = f_2$, čime je dokazana jedinstvenost. ■

Upravo dokazan teorem o jedinstvenosti Laurentova reda, vrlo je koristan, kako teoretski, tako i u primjenama. Prvo, on pokazuje da je svaki red pozitivnih i negativnih potencija, koji funkciji f konvergira na nekom vijencu ili (probušenom) krugu, upravo Laurentov red te funkcije. Tu je sadržan i teorem o jedinstvenosti Taylorova reda. Jer i Taylorov red, dakle red sa sâmim nenegativnim potencijama, je također Laurentov red, samo što su svi koeficijenti uz negativne potencije jednaki nuli. Ako, dakle, krenemo razviti funkciju f u Laurentov red oko neke točke u kojoj je ona holomorfna, kao rezultat dobit ćemo njezin Taylorov red, tj. dobit ćemo da su koeficijenti uz sve negativne potencije jednaki nuli.

Drugo, kada trebamo neku funkciju razviti u red potencija — pozitivnih, negativnih — kako ispadne, onda tome obično ne pristupamo tako da počnemo derivirati ili integrirati ne bi li odredili koeficijente dâne formulama (1) i (2) na str. 54 ili (2) na str. 62, nego se nastojimo dočepati traženoga reda (najčešće je dovoljno naći samo nekoliko prvih članova) koristeći neke, od ranije poznate, redove.

Primjer 38.1 Za primjer odredimo Laurentov red funkcije

$$f(z) := \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

na okolini $K(0,\frac{1}{\rho})$ točke w'. Stoga red $\sum\limits_{n\le -1} a_n(z-z_0)^n$ konvergira uniformno na okolini $\mathbb{C}\setminus\overline{K}(z_0,\rho)$ točke z', pa taj red konvergira lokalno uniformno izvan zatvorenog kruga $\overline{K}(z_0,r)$.

Analogno se dokazuje da i red $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} b_n(z-z_0)^n$ konvergira lokalno uniformno na vijencu V.

Odaberimo $k\in\mathbb{Z}$, i podijelimo oba reda u (10) sa $(z-z_0)^{k+1}$. Dobivamo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{n-k-1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z-z_0)^{n-k-1}\,. \tag{13}$$

Neka je Γ_0 proizvoljna kružnica oko z_0 koja leži u V. Kako oba ova reda konvergiraju uniformno na kružnici Γ_0, možemo te redove integrirati član po član, korolar 35.7. Međutim, $\int_{\Gamma_0}(z-z_0)^\ell\,dz = \begin{cases} 0 & ,\ \ell\ne -1\\ 2\pi\mathrm{i} & ,\ \ell=-1\end{cases}$, pa integrirajući (13) po kružnici Γ_0, dobivamo

$$a_k\cdot 2\pi\mathrm{i} = b_k\cdot 2\pi\mathrm{i}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}\,,$$

te je $a_k=b_k$ za sve $k\in\mathbb{Z}$, čime je dokazano (i).

(ii) Neka je funkcija f holomorfna na vijencu V, i neka je $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z\in V$, njezin Laurentov razvoj. Definirajmo funkcije f_1 i f_2 formulama

$$f_1(z) := \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-z_0)^n \tag{14}$$

$$f_2(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n\,. \tag{15}$$

Kao što smo pokazali u dokazu tvrdnje (i), red u (15) konvergira lokalno uniformno na krugu $K(z_0,R)$, pa je na tom krugu funkcija f_2 holomorfna, a red u (14) konvergira lokalno uniformno izvan zatvorenoga kruga $\overline{K}(z_0,r)$, pa je tamo funkcija f_1 holomorfna.

Ostaje pokazati da je, uz uvjet $\lim\limits_{|z|\to\infty} f_1(z)=0$, takav rastav jedinstven. Neka je, također, $f=g_1+g_2$, gdje je $g_2\in H(K(z_0,R))$ i $g_1\in H(\mathbb{C}\setminus\overline{K}(z_0,r))$, i vrijedi $\lim\limits_{|z|\to\infty} g_1(z)=0$. Definirajmo funkciju $h\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ s

$$h(z) := \begin{cases} f_1(z)-g_1(z) & ,\ |z-z_0|>r\\ g_2(z)-f_2(z) & ,\ |z-z_0|<R\end{cases}\,.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}\Big|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &- \int_\gamma \frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\Big|\\
&= \Big|\frac{1}{h}\Big(\int_\gamma\frac{\psi(\zeta)}{\zeta-z-h}\,d\zeta - \int_\gamma\frac{\psi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\Big) - \int_\gamma\frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\Big|\\
&= \Big|\int_\gamma\frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}\,d\zeta - \int_\gamma\frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\Big|\\
&= |h|\cdot\Big|\int_\gamma\frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}\,d\zeta\Big|\,.\end{aligned}$$

Označimo li s $M := \max\{|\psi(\zeta)| : \zeta\in\gamma^\clubsuit\}$, primjenom leme 32.1 o ocjeni integrala, zbog nejednakosti (2), to je dalje

$$\le |h|\,\frac{M}{\frac{1}{2}\delta\cdot\delta^2}\,\ell(\gamma)\,,$$

gdje je, kao i inače, $\ell(\gamma)$ duljina puta γ.

Odavde slijedi da je $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \int_\gamma\frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta$, tj. funkcija f derivabilna je u točki z, a kako je $z\in\mathbb{C}\setminus\gamma^\clubsuit$ bila proizvoljna točka, zaključujemo da je f derivabilna, i njezina je derivacija zaista dâna formulom (1).

Ostaje pokazati da je ta derivacija neprekidna funkcija. Uz iste oznake z, δ, h i M kao ranije, koristeći lemu o ocjeni integrala i nejednakosti (2), imamo

$$\begin{aligned}|f'(z+h)-f'(z)| &= \Big|\int_\gamma\Big(\frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z-h)^2}-\frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\Big)\,d\zeta\Big|\\
&\overset{\text{(razlika kvadrata)}}{=} \Big|\int_\gamma\frac{h\,\psi(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}\Big(\frac{1}{\zeta-z-h}+\frac{1}{\zeta-z}\Big)\,d\zeta\Big|\\
&\le |h|\,\frac{M}{\frac{1}{2}\delta^2}\Big(\frac{1}{\frac{1}{2}\delta}+\frac{1}{\delta}\Big)\,\ell(\gamma) = |h|\,\frac{6M}{\delta^3}\,\ell(\gamma)\,,\end{aligned}$$

pa je $\lim\limits_{h\to 0} f'(z+h)=f'(z)$, tj. f' je neprekidna. ■

Definicija 34.1 Za funkciju $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ kažemo da je ***holomorfna*** ako je derivabilna i derivacija f' je neprekidna na Ω. Za funkciju f kažemo da je ***holomorfna u točki*** z_0 ako postoji okolina točke z_0 na kojoj je f holomorfna.

Skup svih funkcija holomorfnih na otvorenom skupu Ω, označavat ćemo s $H(\Omega)$.

Prethodni teorem kaže, dakle, da je svaka funkcija koja je definirana pomoću neke neprekidne funkcije integralom kao u (1), holomorfna na komplementu traga puta integracije.

Koristeći se prethodnim teoremom i Cauchyjevom integralnom formulom, točnije korolarom 34.5, dobivamo

Korolar 34.8 (Teorem o holomorfnosti derivabilne funkcije) *Svaka je derivabilna funkcija $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna, tj. $D(\Omega) = H(\Omega)$.*

Dokaz: Oko zadane točke $z_0 \in \Omega$ odaberemo dovoljno malenu kružnicu Γ_0, tako da zajedno s krugom kojeg obrubljuje, leži u Ω. Prema korolaru 34.5, za svaki z iz toga kruga je $f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$. Budući da je funkcija f, koja se nalazi u brojniku razlomka pod integralom, neprekidna, prema prethodnom teoremu 34.7, funkcija f holomorfna je na krugu unutar Γ_0, tj. na okolini točke z_0. Zbog proizvoljnosti odabira točke z_0, f je holomorfna na Ω. ■

Ovaj, upravo dokazan rezultat, vrlo je važan. On pokazuje da je zahtjev derivabilnosti kompleksne funkcije tako jak, da ima za posljedicu ne samo postojanje, nego i neprekidnost derivacije, tj. holomorfnost. Stoga, za kompleksne funkcije (jedne) kompleksne varijable, nema smisla govoriti da su, naprimjer, *klase* C^1 — sve derivabilne funkcije automatski su takve. Dokazat ćemo još mnogo više:

Teorem 34.9 (o višim derivacijama derivabilne funkcije) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup a $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija. Tada f ima derivacije svakog reda, i sve su one holomorfne funkcije na Ω.*

Nadalje, ako je γ bilo koji, u Ω nulhomotopan, po dijelovima gladak zatvoren put, a točka $z \in \Omega \setminus \gamma^\clubsuit$, onda je

$$\nu(\gamma, z)\, f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta\,. \tag{3}$$

Dokaz: Znamo već, prema prethodnom korolaru 34.8 da je derivacija f' funkcije f neprekidna. Neka je $z_0 \in \Omega$ neka točka, i neka je $r > 0$ takav da kružnica Γ_0

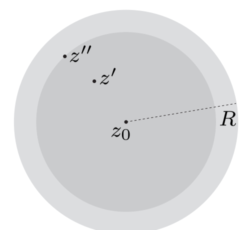
Dokaz: (*i*)

Pokažimo najprije, da oba reda u (10) konvergiraju lokalno uniformno na vijencu V. Prema definiciji je

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n\le -1} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n\ge 0} a_n(z - z_0)^n\,. \tag{11}$$

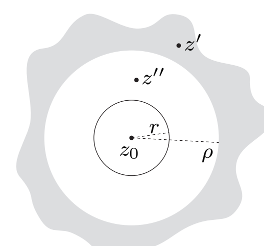
Treba pokazati da oba reda na desnoj strani u prethodnoj formuli, konvergiraju lokalno uniformno na V. Promotrimo najprije drugi od tih redova — red pozitivnih potencija, i pokažimo da on konvergira lokalno uniformno i na većem skupu $K(z_0, R) \supseteq V$.

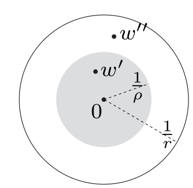
Neka je $z' \in K(z_0, R)$ proizvoljna točka. Odaberimo točku $z'' \in V$ tako da



je $|z' - z_0| < |z'' - z_0| < R$. Kako red $\sum_{n\ge 0} a_n(z'' - z_0)^n$ konvergira, to prema Abelovoj lemi, teorem 36.1, red $\sum_{n\ge 0} a_n(z - z_0)^n$ konvergira lokalno uniformno na krugu $K(z_0, |z'' - z_0|)$, što, prema definiciji, znači da konvergira uniformno i na nekoj okolini točke z'. Stoga red $\sum_{n\ge 0} a_n(z - z_0)^n$ konvergira lokalno uniformno na $K(z_0, R)$.

Dokažimo sada da prvi od redova na desnoj strani u (11) — red negativnih potencija, konvergira lokalno uniformno *izvan* zatvorenog kruga $\overline{K}(z_0, r)$, tj. na većem skupu $\mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0, r) \supseteq V$. Neka je $z' \in \mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0, r)$. Uz supstituciju





$w := \frac{1}{z - z_0}$ i zamjenu $k := -n$, taj red postaje

$$\sum_{n\le -1} a_n(z - z_0)^n = \sum_{k\ge 1} a_{-k}\, w^k\,. \tag{12}$$

Neka je $z'' \in V$ takav da je $r < |z'' - z_0| < |z' - z_0|$ i neka je ρ takav da je $|z'' - z_0| < \rho < |z' - z_0|$. Kako je $z'' \in V$, red $\sum_{n\le -1} a_n(z'' - z_0)^n$ konvergira, pa za $w'' := \frac{1}{z'' - z_0}$, konvergira i red $\sum_{k\ge 1} a_{-k}\, w''^k$. Prema Abelovoj lemi, red $\sum_{k\ge 1} a_{-k}\, w^k$ konvergira lokalno uniformno na krugu $K(0, |w''|)$, pa zbog $\frac{1}{\rho} < |w''| = \frac{1}{|z'' - z_0|}$, konvergira uniformno na zatvorenom krugu $\overline{K}(0, \frac{1}{\rho})$, pa onda i gdje je

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta\,, \qquad n \le -1\,. \tag{9}$$

Kako su kružnice Γ_1 i Γ_2 u vijencu V homotopne kružnici Γ_0, a funkcija $\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}$ je na V holomorfna, prema općem Cauchyjevom teoremu, teorem 33.4, integrale po Γ_2 odnosno Γ_1 u (7) odnosno (9), možemo zamijeniti integralima po Γ_0, pa uvrštavanjem formula (6) i (8) u (5), dobivamo (3), a koeficijenti a_n dani su formulom (4). ■

Napomena 38.1 Laurentov teorem vrijedi i u slučaju kada se umjesto kružnog vijenca $V(z_0; r, R)$ radi o ***probušenom krugu*** $K^*(z_0, R) := K(z_0, R) \setminus \{z_0\}$, na koji možemo gledati i kao na degenerirani vijenac s $r = 0$. Najčešće ćemo Laurentov red i promatrati upravo na nekom $K^*(z_0, R)$. Odsada ćemo, za točku $z_0 \in \mathbb{C}$ i realne brojeve $0 \le r < R$, vijencem $V := V(z_0; r, R)$ zvati otvoren skup, koji je u slučaju $r > 0$ pravi vijenac, a za $r = 0$ je to, zapravo, probušen krug $K^*(z_0, R)$.

Sljedeći teorem najavljivali smo već ranije.

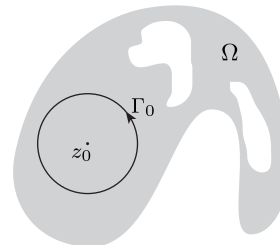
Teorem 38.2 (o jedinstvenosti Laurentova reda)

(i) *Ako za svaki $z \in V := V(z_0; r, R)$ vrijedi*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n\,, \tag{10}$$

onda je $a_n = b_n$ za sve $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) *Ako je funkcija f holomorfna na vijencu V, onda je $f = f_1 + f_2$, gdje je f_2 holomorfna na krugu $K(z_0, R)$ a f_1 je holomorfna izvan zatvorenog kruga $\overline{K}(z_0, r)$, tj. za $|z - z_0| > r$. Štoviše, ako je $\lim_{|z|\to\infty} f_1(z) = 0$, onda je rastav $f = f_1 + f_2$ jedinstven. Funkcija f_1 naziva se* ***glavni*** *ili* ***singularni dio****, a funkcija f_2* ***regularni dio*** *funkcije f.*



radijusa r oko točke z_0, zajedno s krugom $K(z_0, r)$ kojeg obrubljuje, leži u Ω. Za svaki $z \in K(z_0, r)$ je, prema Cauchyjevoj integralnoj formuli, točnije korolaru 34.5, $f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$, pa je, prema teoremu 34.7, i formuli (1) za derivaciju takve funkcije,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta\,, \quad z \in K(z_0, r)\,. \tag{4}$$

Odavde, parcijalnom integracijom, dobivamo

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_0} \underbrace{f(\zeta)}_{\alpha}\, \underbrace{\frac{1}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta}_{d\beta} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_0} \frac{f'(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,, \quad z \in K(z_0, r)\,. \tag{5}$$

Pritom smo rabili činjenicu da se radi o integralu po *zatvorenom* putu, pa je, kod parcijalne integracije, sumand koji ne sadrži integral, jednak nuli, tj. općenito, formula za parcijalnu integraciju duž zatvorenog puta γ ima oblik $\oint_\gamma \alpha\, d\beta = -\oint_\gamma \beta\, d\alpha$.

Iz prethodne formule, i već dokazane neprekidnosti funkcije f', ponovnom primjenom teorema 34.7, zaključujemo da je f' holomorfna na krugu $K(z_0, r)$. Kako je z_0 bila proizvoljna točka, dokazano je tako da je f' holomorfna na Ω.

Indukcijom se sada jednostavno pokazuje da funkcija f ima derivacije svakog reda, i da su sve one holomorfne funkcije na Ω.

Ostaje još dokazati formulu (3). Neka je γ, u Ω nulhomotopan, zatvoren po dijelovima gladak put, i neka je $z \in \Omega \setminus \gamma^\clubsuit$. Prema već dokazanom, n-ta derivacija $f^{(n)}$ funkcije f je holomorfna, pa je, prema Cauchyjevoj integralnoj formuli,

$$\nu(\gamma, z)\, f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f^{(n)}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,.$$

Odavde, uzastopnom parcijalnom integracijom, dobivamo

$$\begin{aligned}\nu(\gamma,z)\,f^{(n)}(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f^{(n)}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \underbrace{\frac{1}{\zeta-z}}_{\alpha}\,\underbrace{f^{(n)}(\zeta)\,d\zeta}_{d\beta}\\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma f^{(n-1)}(\zeta)\,\frac{d\zeta}{(\zeta-z)^2} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \underbrace{\frac{1}{(\zeta-z)^2}}_{\alpha}\,\underbrace{f^{(n-1)}(\zeta)\,d\zeta}_{d\beta}\\
&= \frac{1\cdot 2}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma f^{(n-2)}(\zeta)\,\frac{d\zeta}{(\zeta-z)^3} = \frac{2!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \underbrace{\frac{1}{(\zeta-z)^3}}_{\alpha}\,\underbrace{f^{(n-2)}(\zeta)\,d\zeta}_{d\beta}\\
&\ \ \vdots\\
&= \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta\,. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Kako sada znamo da je za kompleksne funkcije derivabilnost na otvorenom skupu isto što i holomorfnost, odsada ćemo koristiti gotovo isključivo termin *holomorfan*.

Na sljedeći teorem možemo gledati kao na neku vrstu obrata Cauchyjeva teorema.

Teorem 34.10 (Morerin[1] teorem) *Neka je $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ otvoren skup, a $f:\Omega\to\mathbb{C}$ neprekidna funkcija sa svojstvom, da za svaku točku $z\in\Omega$, postoji $r_z>0$, dovoljno malen da je $K(z,r_z)\subseteq\Omega$, i takav da za svaki pravokutnik $I\subseteq K(z,r_z)$ vrijedi $\int_{\partial I} f\,dz=0$. Tada je f holomorfna na Ω.*

Dokaz: Neka je $z\in\Omega$ i $r_z>0$ kao u pretpostavci teorema, te označimo s $K_z:=K(z,r_z)$. Prema teoremu 32.4 o postojanju primitivne funkcije na krugu, postoji derivabilna funkcija $F_z\colon K_z\to\mathbb{C}$ takva da je $F_z'=f\big|_{K_z}$, tj. za sve $\zeta\in K_z$, je $F_z'(\zeta)=\big(f\big|_{K_z}\big)(\zeta)=f(\zeta)$. Prema prethodnom teoremu 34.9, funkcija F_z ima derivacije svakog reda na K_z, pa specijalno postoji $F_z''(z)$. Kako se funkcije F_z' i f podudaraju na krugu K_z oko točke z, i jedna od njih je

[1] Giacinto Morera (1856–1909), talijanski matematičar

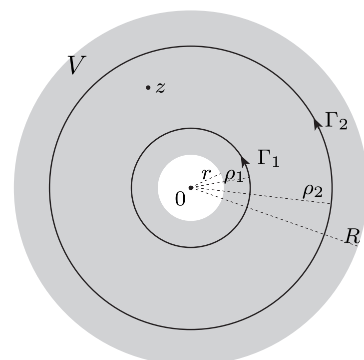
gdje su koeficijenti dâni formulom

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_0}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta\,,\qquad n\in\mathbb{Z}\,, \tag{4}$$

a Γ_0 je proizvoljna kružnica oko 0 koja leži u V.

Neka je $z\in V$ i neka su Γ_1 i Γ_2 kružnice oko 0 radijusa ρ_1 i ρ_2 tako da je $r<\rho_1<|z|<\rho_2<R$. Prema Cauchyjevoj integralnoj formuli, točnije korolaru 34.6, je

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\,. \tag{5}$$



Kao i u dokazu Taylorova teorema 13.1, jer je za sve $\zeta\in\Gamma_2$, $\left|\frac{z}{\zeta}\right|<1$, u $\int_{\Gamma_2}$ stavimo

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}\,,$$

pa kao i kod Taylorova teorema, dobivamo

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,z^n\,, \tag{6}$$

gdje je

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta\,,\qquad n\ge 0\,. \tag{7}$$

Da bismo izračunali integral $\int_{\Gamma_1}$ u (5), primijetimo da je za $\zeta\in\Gamma_1$, $\left|\frac{z}{\zeta}\right|>1$, tj. $\left|\frac{\zeta}{z}\right|<1$, pa $\frac{1}{\zeta-z}$ razvijemo po potencijama od $\frac{\zeta}{z}$. Dobivamo

$$-\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta^{n-1}}{z^n}=\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

(za drugu jednakost zamijenili smo n s $n-1$, a za treću n s $-n$).

Kao i ranije, dokazavši uniformnu konvergenciju na Γ_1, odavde dobivamo

$$-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\sum_{n=-1}^{-\infty}a_n\,z^n\,, \tag{8}$$

dvaju redova, reda $\sum\limits_{n\geq 0} c_n$ i reda $\sum\limits_{n\leq -1} c_n$. Za red $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n$ kažemo da *konvergira*, ako konvergiraju oba reda $\sum\limits_{n\geq 0} c_n$ i $\sum\limits_{n\leq -1} c_n$, a sumu ćemo označivati sa

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n := \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \,.$$

Pritom je

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-1}^{-n} c_k \,,$$

ili, ako umjesto n pišemo $-n$,

$$:= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \,.$$

Analogno ćemo govoriti o apsolutnoj, a u slučaju redova funkcija, i o uniformnoj i lokalno uniformnoj konvergenciji takvih redova.

Kao i u poglavlju 5, za točku $z_0 \in \mathbb{C}$ i pozitivne brojeve $0 < r < R$, označavat ćemo s $V := V(z_0; r, R)$ kružni vijenac, tj. skup $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$.

Teorem 38.1 (Laurentov[1] teorem) *Neka je funkcija f holomorfna na kružnom vijencu $V := V(z_0; r, R)$ oko točke z_0. Tada za svaki $z \in V$ vrijedi*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \,, \tag{1}$$

gdje su koeficijenti a_n dâni formulom

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \,, \tag{2}$$

a Γ_0 je pozitivno orijentirana kružnica oko z_0 proizvoljnog radijusa ρ, $r < \rho < R$.

*To je **Laurentov red** funkcije f oko točke z_0.*

Dokaz: Kao i kod Taylorova teorema, dokaz ćemo provesti za slučaj $z_0 = 0$, a opći se slučaj dobije zamjenom varijable z sa $z - z_0$. Trebamo, dakle, dokazati da za $z \in V := V(0; r, R)$ vrijedi

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \,, \tag{3}$$

[1] Pierre Alphonse Laurent (1813–1854), francuski inženjer

derivabilna u z, to je i druga derivabilna u z (i njihove su derivacije jednake, što nam ovdje nije važno). Stoga je funkcija f derivabilna u točki z.

Kako je z proizvoljna točka iz Ω, f je derivabilna na Ω, pa je, prema teoremu o holomorfnosti derivabilne funkcije, korolar 34.8, holomorfna. ■

Na kraju, dokažimo jednu činjenicu, koja, na prvi pogled, sugerira da smo možda nepotrebno mistificirali pretpostavke u Cauchyjevim teoremima.

Korolar 34.11 *Neka je $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija koja je i derivabilna osim eventualno u konačno mnogo točaka. Onda je f derivabilna svuda, dakle i holomorfna na čitavom otvorenom skupu Ω.*

Dokaz: Zbog otvorenosti skupa Ω, za svaku točku $z \in \Omega$, postoji $r_z > 0$ takav da je $K(z, r_z) \subseteq \Omega$. Za svaki pravokutnik $I \subseteq K(z, r_z)$ je, prema Cauchyjevu teoremu za pravokutnik, teorem 33.2, $\int_{\partial I} f\, dz = 0$, pa prema Morerinom teoremu zaključujemo da je f holomorfna na Ω. ■

Ovaj korolar pokazuje kako funkcija koja je neprekidna na otvorenom skupu i derivabilna je u svim, osim možda u konačno mnogo točaka, ne može zaista ne biti derivabilna u tih nekoliko točaka. Zašto onda nismo u Cauchyjevim teoremima — za pravokutnik, krug i, konačno, u općem Cauchyjevom teoremu, jednostavno pretpostavili da je funkcija derivabilna? Razlog je sljedeći: za dokaz prethodnog korolara, kojim smo ustanovili da zapravo ovih konačno mnogo izuzetaka — točaka u kojima neprekidna funkcija nije derivabilna — ne može postojati, poslužili smo se Morerinim teoremom, a za dokaz kojega smo rabili teorem o postojanju viših derivacija derivabilne funkcije, koji je pak bio posljedica Cauchyjeve integralne formule. A u dokazu Cauchyjeve integralne formule, primijenili smo opći Cauchyjev teorem na izvjesnu pomoćnu funkciju g, za koju smo, u tom času, znali da je neprekidna i da je derivabilna u svim točkama osim jedne. Nije bilo načina da tada ustanovimo njezinu derivabilnost i u toj jednoj jedinoj točki. To je bilo jedino mjesto gdje smo zaista koristili punu snagu Cauchyjeva teorema. Sada, naravno, znamo da je ta funkcija g bila zapravo i u toj jednoj točki derivabilna, ali tada to zaista nismo mogli tvrditi.

Sljedećim dijagramom rekapitulirani su odnosi među osnovnim svojstvima kompleksne funkcije koja smo promatrali u ovom poglavlju.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\boxed{\begin{array}{c}\displaystyle\int_\gamma f\,dz = 0\\ \text{za svaki zatvoren}\\ \text{PDG put } \gamma \text{ u } \Omega\end{array}} \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{Tm. } 32.2"'] & \boxed{f \in H(\Omega)} \arrow[l, Rightarrow, dashed, "\begin{array}{c}\text{za } \Omega \text{ jednostavno}\\ \text{povezano područje}\end{array}"'] \arrow[d, Rightarrow, shift left, "\begin{array}{l}\text{Tm. } 33.4\\ \text{Tm. } 32.2\end{array}"] \\
\boxed{\begin{array}{c}f \text{ ima na } \Omega\\ \text{primitivnu funkciju}\end{array}} \arrow[r, Rightarrow, "\text{trivijalno}"] & \boxed{\begin{array}{c}f \text{ ima na } \Omega \text{ lokalno}\\ \text{primitivnu funkciju}\end{array}} \arrow[u, Rightarrow, shift left, "\begin{array}{r}\text{Tm. } 32.2\\ \text{Tm. } 34.10\end{array}"]
\end{tikzcd}
$$

Sljedeći teorem zapravo ne spada u analizu, nego u algebru. Međutim, svi njegovi dokazi, kako elementarni tako i sofisticirani, zahtijevaju sredstva analize i/ili topologije. Mi ćemo ovaj teorem ovdje dokazati kao jednostavnu posljedicu Liouvilleova teorema, koji nam je sada pri ruci. Postoje i elementarni dokazi koji koriste samo malo ε–δ tehnike iz realne analize.

Teorem 37.10 (Osnovni teorem algebre) *Neka je $p(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, gdje su $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, polinom s kompleksnim koeficijentima, stupnja barem 1. Tada p ima barem jednu nultočku, tj. postoji $z_0 \in \mathbb{C}$ takav da je $p(z_0) = 0$.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da p nema nultočke, dakle da je $p(z) \neq 0$ za sve $z \in \mathbb{C}$. Tada je i funkcija $q\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definirana s $q(z) := \frac{1}{p(z)}$, cijela funkcija. Nadalje,

$$|p(z)| = |z|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right| ,$$

pa je zbog $a_n \neq 0$, $\lim\limits_{|z| \to \infty} |p(z)| = +\infty$. Stoga je $\lim\limits_{|z| \to \infty} q(z) = 0$. To znači da za svaki $\varepsilon > 0$, specijalno za $\varepsilon = 1$, postoji $R > 0$ takav da za sve $z \in \mathbb{C}$, za koje je $|z| > R$, vrijedi $|q(z)| < 1$. Kako je zatvoren krug $\overline{K}(0, R)$ kompaktan, a q je neprekidna funkcija, to je funkcija q na tom krugu omeđena, tj. postoji $M > 0$ takav da je $|q(z)| < M$ za sve $|z| \leq R$, pa je $|q(z)| < M + 1$ za sve $z \in \mathbb{C}$. Prema Liouvilleovom teoremu je q konstantna funkcija, a zbog $\lim\limits_{|z| \to \infty} q(z) = 0$ je $q(z) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, što ne može biti jer je, prema definiciji, $q(z) = \frac{1}{p(z)}$. ■

§ 38 Laurentov red

Pri proučavanju funkcija koje su holomorfne na nekom krugu oko točke z_0, koristi se razvoj u Taylorov red — red (pozitivnih) potencija od $z - z_0$. Međutim, ako je funkcija u točki z_0 ‚loša', ali je u drugim točkama holomorfna, koriste se redovi u kojima se osim pozitivnih, pojavljuju i negativne potencije.

Prije nego što iskažemo osnovni teorem, uvedimo neke oznake. Neka su $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, kompleksni brojevi. ***Dvostrani red***, tj. red kome su članovi numerirani (indeksirani) cijelim brojevima, u oznaci $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} c_n$, označavat će sumu funkciju φ gledamo kao na restrikciju kompleksne funkcije $f(z) := \frac{1}{1+z^2}$ na realnu os. Taylorov red oko 0 za funkciju f je $\sum(-1)^n z^{2n}$, i njegov radijus konvergencije je 1. I zaista se na rubu kruga konvergencije tog reda nalaze točke i i $-\mathrm{i}$ u kojima f nije niti definirana.

Korolar 37.8 *Neka je funkcija f holomorfna na otvorenom krugu $K(z_0, R)$, i neka je $|f(z)| \leq M$ za svaki $z \in K(z_0, R)$. Tada je*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!\,M}{R^n}\,, \qquad \textit{za sve } n \geq 0\,.$$

Dokaz: Prema prethodnom teoremu, uz iste oznake, za svaki $r < R$ je

$$|f^{(n)}(z_0)| = n!\,|a_n| \leq \frac{n!\,M(r)}{r^n} \leq \frac{n!\,M}{r^n}\,,$$

pa gledajući limes $\lim_{r\to R}$, dobivamo traženu ocjenu. ■

Ovaj ćemo korolar odmah iskoristiti u dokazu sljedećeg važnog teorema.

Teorem 37.9 (Liouvilleov[1] teorem) *Ako je funkcija f holomorfna na cijeloj kompleksnoj ravnini $\mathbb{C}$, i ako je ograničena, onda je f konstantna funkcija.*

Dokaz: Neka je $|f(z)| < M$ za sve $z \in \mathbb{C}$. Kako je $f \in H(\mathbb{C})$, to je i za svaki $R > 0$, f holomorfna na krugu $K(0, R)$. Prema prethodnom korolaru je

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!\,M}{R^n}\,,$$

pa kako to vrijedi za svaki $R > 0$, zaključujemo da je $f^{(n)}(0) = 0$ za sve $n \geq 1$. Prema korolaru 37.3, f je konstantna funkcija. ■

Liouvilleov teorem *ne* kaže da su ograničene holomorfne funkcije nužno konstantne. Samo ograničene funkcije koje su holomorfne na *cijeloj* kompleksnoj ravnini su konstantne. Funkcije koje su holomorfne na cijeloj kompleksnoj ravnini, zovu se ***cijele*** ili ***čitave funkcije***. Liouvilleov teorem kaže da su ‚prave', tj. nekonstantne, cijele funkcije, uvijek neomeđene. To se možda kosi s našom predodžbom o, naprimjer, funkciji *sinus*, koja je cijela funkcija, i, *kao funkcija realne varijable*, ona je ograničena, ali sinus, kao funkcija kompleksne varijable *nije* ograničena funkcija.

[1] Joseph Liouville (1809–1882), francuski matematičar

6

Nizovi i redovi funkcija

U ovom ćemo se poglavlju baviti nizovima i redovima funkcija. Većina od tih stvari zapravo spada već u prvo poglavlje, gdje smo razmatrali pitanja konvergencije nizova. Međutim, osnovno svojstvo koje ćemo koristiti pri proučavanju nizova i redova kompleksnih funkcija — lokalno uniformna konvergencija — dosad nam nije trebalo, pa o tome govorimo istom sada.

§ 35 Uniformna i lokalno uniformna konvergencija

Određenosti radi, govorit ćemo o nizovima i redovima kompleksnih funkcija kompleksne varijable, jer ćemo u idućem poglavlju upravo to trebati. Međutim, većina pojmova i svojstva koja ćemo dokazati, imaju smisla i vrijede i u drugim, često općenitijim, situacijama.

Prisjetimo se najprije pojmova obične i uniformne konvergencije niza funkcija, kojima smo se već bavili u prvom poglavlju, § 4.

Definicija 35.1 Neka je $S \subseteq \mathbb{C}$ neki skup i $f_n\colon S \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, niz funkcija. Kažemo da niz $(f_n)_n$ ***konvergira*** (*obično* ili *po točkama*) ako za svaki $z \in S$ niz brojeva $\big(f_n(z)\big)_n$ konvergira. U tom slučaju, funkciju $f\colon S \to \mathbb{C}$ definiranu s $f(z) := \lim_n f_n(z)$ zovemo *limes niza* $(f_n)_n$, i označavamo s $f = \lim_n f_n$. Piše se također $f_n \to f$ ili $f_n \xrightarrow{n} f$.

Dakle, niz funkcija $(f_n)_n$ konvergira funkciji f, ako

$$\forall z \in S, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ t.d. } \forall n \geq n_0 \text{ vrijedi } |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \,.$$

Definicija 35.2 Za niz funkcija $f_n \colon S \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, kažemo da ***konvergira uniformno*** ili ***jednoliko*** na S, ako postoji funkcija $f\colon S \to \mathbb{C}$, takva da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $z \in S$ i sve $n \geq n_0$ vrijedi $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. Označavat ćemo to s $f_n \rightrightarrows f$. Dakle, niz $(f_n)_n$ konvergira uniformno funkciji f, ako

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \text{t.d. } \forall z \in S,\ \forall n \geq n_0 \text{ vrijedi } |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \,.$$

Očito je da ako niz funkcija $(f_n)_n$ konvergira uniformno funkciji f, onda taj niz konvergira i obično, ali obratno ne.

Napomena 35.1 S uniformnom konvergencijom bili smo se već bavili u § 4 u prvom poglavlju. Tamo smo promatrali skup $B(S, \mathbb{C})$ svih *omeđenih* funkcija sa S u $\mathbb{C}$ (zapravo umjesto $\mathbb{C}$ tamo je bio općenito, metrički prostor Y). U tom smo skupu definirali metriku ρ formulom $\rho(f, g) := \sup\limits_{z \in S} |f(z) - g(z)|$, i time je $B(S, \mathbb{C})$ postao metrički prostor, a konvergencija s obzirom na metriku ρ je bila upravo uniformna konvergencija. Kako je prostor $\mathbb{C}$ potpun, pokazali smo i da je $B(S, \mathbb{C})$ potpun. Važan je njegov potprostor $BC(S, \mathbb{C})$ svih omeđenih neprekidnih funkcija, za koji smo pokazali da je zatvoren potprostor, pa je također potpun. To je, specijalno, značilo da je uniformni limes niza (omeđenih) neprekidnih funkcija ponovno neprekidna funkcija.

Nas sada zanimaju i funkcije koje *nisu* omeđene, pa formalno uzevši ne možemo koristiti navedene rezultate. Međutim, isti dokaz kojim smo u teoremu 4.16 pokazali da je uniformni limes niza omeđenih neprekidnih funkcija, ponovno neprekidna funkcija, bez ikakve promjene vrijedi i bez pretpostavke o omeđenosti funkcija. Osim toga, u teoremu 35.4 mi ćemo taj dokaz napraviti i u nešto općenitijoj situaciji.

Druga mogućnost da koristimo navedene rezultate iz prvog poglavlja, bez da ih ponovno dokazujemo, je sljedeća. Ako za proizvoljne funkcije $f, g \colon S \to \mathbb{C}$ definiramo $\rho'(f, g) := \sup\limits_{z \in S} \big(\min\{|f(z) - g(z)|, 1\}\big)$, dobit ćemo metriku na skupu *svih* funkcija sa S u $\mathbb{C}$, i konvergencija s obzirom na tu metriku je upravo uniformna konvergencija. Za prostor $(C(S, \mathbb{C}), \rho')$ svih neprekidnih funkcija sa S u $\mathbb{C}$ vrijedi sve što smo bili dokazali za $BC(S, \mathbb{C})$. Topologija, dakle i konvergencija, koju metrika ρ' inducira na podskupu $B(S, \mathbb{C})$, ista je kao i ona koju definira metrika ρ, iako su sâme metrike različite. Isto vrijedi i za Cauchyjeve nizove.

učinili u dokazu prethodnog teorema, onda ćemo na isti način kao u prethodnom dokazu, zaključiti da je $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$, pa je red $(*)$ zapravo red $\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n$, dakle Taylorov red funkcije f oko točke z_0. Time je, zapravo, dokazan ***teorem jedinstvenosti za redove potencija***, koji kaže da ako za svaki z iz nekog otvorenog kruga $K(z_0, R)$, za dva reda vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \,,$$

onda je $a_n = b_n$, za sve $n \geq 0$. Ovaj teorem nismo posebno iskazali i numerirali, jer je on specijalan slučaj općenitijeg teorema 38.2, kojeg ćemo izreći i dokazati u idućem paragrafu.

Napomena[1] **37.1** Promotrimo funkciju $f\colon \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ definiranu s $f(z) := \frac{1}{1 - z}$. Na krugu $K(0, 1)$ oko 0 radijusa 1, f je holomorfna funkcija, i $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$. To je, naravno, izraz koji znamo od ranije kao formulu za sumu geometrijskog reda za $|z| < 1$. To je ujedno i Taylorov red te funkcije na krugu $K(0, 1)$. Radijus konvergencije reda $\sum z^n$ jednak je 1. Zaista, krug $K(0, 1)$ je najveći krug sa središtem u 0, koji je sadržan u domeni funkcije f, tj. u skupu $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, a ‚loša' točka za tu funkciju — točka 1, leži na rubu kruga konvergencije.

To nije slučajno. Neka je funkcija f holomorfna u točki z_0 i neka njezin Taylorov red $\sum a_n (z - z_0)^n$ ima radijus konvergencije $r < \infty$. Tada na rubu kruga konvergencije postoji točka u kojoj f nije holomorfna, tj. postoji točka z', $|z' - z_0| = r$, takva da f nije holomorfna niti na jednoj okolini te točke. Naime, kada bi oko svake točke kružnice oko z_0 radijusa r, postojala okolina na kojoj je funkcija f holomorfna, onda bi f bila holomorfna i na nekoj otvorenoj okolini zatvorenog kruga $\overline{K}(z_0, r)$, pa bi i za neki $R > r$, funkcija f bila holomorfna na krugu $K(z_0, R)$. No tada bi radijus konvergencije reda $\sum a_n (z - z_0)^n$ bio veći od r.

To pojašnjava i neke pojave kod realnih funkcija realne varijable. Naprimjer, funkcija $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s $\varphi(x) := \frac{1}{1 + x^2}$, definirana je i analitička na cijelom $\mathbb{R}$. Međutim, njezin Taylorov red oko 0 je $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, i radijus konvergencije tog reda jednak je 1, iako je u točkama ruba intervala konvergencije, dakle u točkama 1 i -1, funkcija φ analitička. Razlog zašto je radijus konvergencije Taylorova reda funkcije φ samo 1, postaje jasan ako na

[1] vidi također napomenu 36.1.

Točnije, vrijedi

Korolar 37.6 (Teorem o jedinstvenosti holomorfne funkcije) *Neka je skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren i povezan, a f i g holomorfne funkcije na Ω. Ako se f i g podudaraju na nekom skupu koji ima gomilište u Ω, onda je $f = g$ na Ω.*

Dokaz: Primijenimo prethodni teorem na funkciju $f - g \colon \Omega \to \mathbb{C}$. ∎

Teorem 37.7 (Cauchyjeve ocjene koeficijenata Taylorova reda) *Neka je $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ za $|z-z_0| < R$, i za pozitivan broj $r < R$ neka je $M(r) := \max\{|f(z)| : |z-z_0| = r\}$. Tada je*

$$|a_n| \le \frac{M(r)}{r^n}\,, \qquad \text{za sve } n \ge 0\,.$$

Dokaz: Prema teoremu 36.4 o holomorfnosti sume reda potencija, funkcija f je holomorfna na krugu $K(z_0, R)$, a prema definiciji funkcije f i formule za derivaciju iz istog teorema, slijedi da je

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)\,.$$

Zbog toga je, prema teoremu 34.9 o višim derivacijama derivabilne funkcije,

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta\,,$$

gdje je Γ_0 pozitivno orijentirana kružnica oko z_0 radijusa r. Prema lemi 32.1 o ocjeni integrala, imamo

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi} \frac{M(r)}{r^{n+1}} \cdot 2r\pi = \frac{M(r)}{r^n}\,.$$ ∎

Zašto za prethodni teorem kažemo da govori o ocjeni koeficijenata *Taylorova* reda, kad zapravo govori o proizvoljnom redu potencija

$$\sum a_n(z-z_0)^n \tag{$*$}$$

s radijusom konvergencije barem R? Ako je $(*)$ proizvoljan red potencija koji konvergira na krugu $K(z_0, R)$, pa s $f(z)$ označimo njegovu sumu, kao što smo

Primjeri 35.1

(i) Niz funkcija $f_n \colon [2, \infty\rangle \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definiranih s $f_n(x) := \frac{1}{x^n}$ konvergira uniformno konstantnoj funkciji 0, $f_n \rightrightarrows 0$.

(ii) Niz funkcija $g_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definiranih s $g_n(x) := x^n$, konvergira funkciji $g \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiranoj s $g(x) := \begin{cases} 0 & , \ x \in [0,1\rangle \\ 1 & , \ x = 1 \end{cases}$, ali ta konvergencija nije uniformna, jer limes nije neprekidna funkcija.

(iii) Neka je $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da je $f(0) = f(1) = 0$ i neka f nije svuda nula, $f \not\equiv 0$, te neka je $g_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, niz funkcija definiranih s $g_n(x) := f(x^n)$. Tada niz $(g_n)_n$ konvergira konstantnoj funkciji 0, ali ta konvergencija nije uniformna, iako su g_n i $0 = \lim_n g_n$ neprekidne funkcije na kompaktnom skupu $[0,1]$.

Zaista, kada bi $g_n \rightrightarrows 0$, onda bi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \text{ t.d. } \forall n \ge n_0 \text{ i } \forall x \in [0,1] \text{ vrijedi } |g_n(x)| < \varepsilon\,.$$

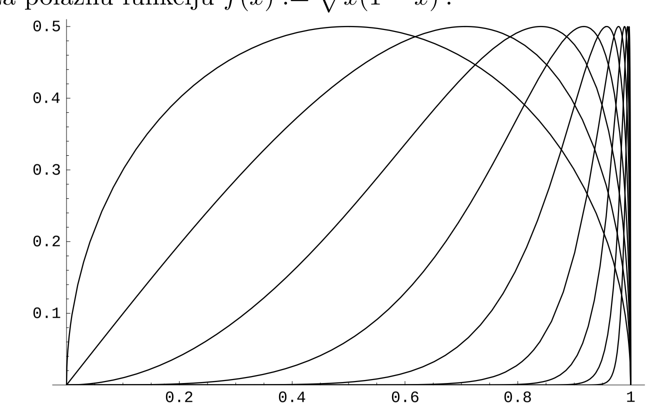
Pokažimo da $g_n \not\rightrightarrows 0$, tj. da

$$\exists \varepsilon > 0,\ \text{t.d. } \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \ge n_0 \text{ i } \exists x_n \in [0,1] \text{ t.d. je } |g_n(x_n)| \ge \varepsilon\,.$$

Neka je $\varepsilon := \max_{x \in [0,1]} |f(x)| > 0$, i neka je $x_0 \in \langle 0,1\rangle$ takav da je $|f(x_0)| = \varepsilon$. Za $n_0 \in \mathbb{N}$ neka je $n := n_0$ i $x_n := \sqrt[n]{x_0} \in \langle 0,1\rangle$. Tada je

$$|g_n(x_n)| = |g_n(\sqrt[n]{x_0})| = |f(x_0)| = \varepsilon\,.$$

Na sljedećoj slici prikazani su grafovi funkcija $g_1, g_2, g_4, g_8, g_{16}, \ldots, g_{256}$, i to za polaznu funkciju $f(x) := \sqrt{x(1-x)}$.



Sada ćemo definirati jedan novi tip konvergencije, koji će se pokazati vrlo korisnim pri proučavanju kompleksnih funkcija.

Definicija 35.3 Neka je $f_n\colon S \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, niz funkcija. Kažemo da niz $(f_n)_n$ ***konvergira lokalno uniformno*** na S, ako za svaki $z \in S$ postoji $r_z > 0$ takav da niz restrikcija $f_n\big|_{K(z,r_z)\cap S}$ konvergira uniformno na $S_z := K(z,r_z) \cap S$.

Lokalno uniformna konvergencija znači, da oko svake točke postoji okolina i na toj okolini neka funkcija kojoj niz restrikcija uniformno konvergira. Sljedeća propozicija kaže da se ipak radi o funkciji na čitavom skupu S, tako da možemo govoriti i o lokalno uniformnom limesu.

Propozicija 35.1 *Ako niz funkcija $f_n\colon S \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergira lokalno uniformno na S, onda postoji funkcija $f\colon S \to \mathbb{C}$ takva da niz $(f_n)_n$ konvergira lokalno uniformno prema f, tj. za svaki $z \in S$ postoji $r_z > 0$ takav da niz restrikcija $f_n\big|_{S_z}$ konvergira uniformno restrikciji $f\big|_{S_z}$, gdje je S_z kao u prethodnoj definiciji.*

Dokaz: Kako niz $(f_n)_n$ konvergira lokalno uniformno na S, za svaki $z \in S$ postoji $r_z > 0$ i funkcija $g_z\colon S_z \to \mathbb{C}$ tako da niz restrikcija $f_n\big|_{S_z}$ konvergira uniformno funkciji g_z na skupu S_z.

Pokažimo da se na presjecima $S_{z'} \cap S_{z''}$, $z', z'' \in S$, funkcije $g_{z'}$ i $g_{z''}$ podudaraju. Neka je $z \in S_{z'} \cap S_{z''}$. Tada je

$$g_{z'}(z) = \lim_n \big(f_n\big|_{S_{z'}}\big)(z) = \lim_n f_n(z) = \lim_n \big(f_n\big|_{S_{z''}}\big)(z) = g_{z''}(z)\,.$$

Stoga je dobro definirana funkcija $f\colon S \to \mathbb{C}$ takva da je $f\big|_{S_z} := g_z$, $z \in S$, i očito je $\lim_n f_n(z) = f(z)$, $z \in S$. ■

Primjer 35.2 Niz funkcija $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiranih s $g_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$, konvergira lokalno uniformno na poluotvorenom intervalu $[0,1\rangle$ konstantnoj funkciji 0, ali taj niz *ne* konvergira lokalno uniformno na segmentu $[0,1]$.

Primijetimo da niz $(g_n)_n$ *ne* konvergira uniformno na $[0,1\rangle$, jer bi tada konvergirao uniformno i na čitavom $[0,1]$, što prema primjeru 35.1 nije istina.

Očito je da ako neki niz funkcija konvergira uniformno, onda on konvergira i lokalno uniformno. Da obratno ne vrijedi, pokazuje prethodni primjer. Međutim, na kompaktnim skupovima te se dvije vrste konvergencije podudaraju. Točnije, vrijedi

odakle slijedi da redovi za g i f imaju jednake radijuse konvergencije.

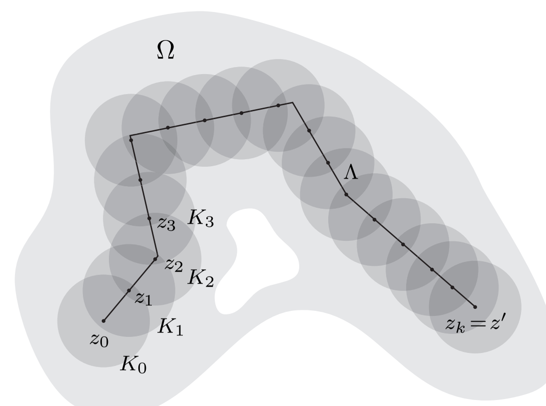
Nadalje, kako je funkcija g holomorfna, to je i neprekidna, a jer je $g(z_0) \neq 0$, postoji $\delta > 0$ takav da je $g(z) \neq 0$ i za sve $z \in K(z_0,\delta)$. Zbog toga je z_0 jedina nultočka funkcije f u krugu $K(z_0,\delta)$. ■

Teorem 37.5 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren i povezan skup, a $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Ako skup nultočaka funkcije f ima gomilište koje pripada skupu Ω, onda je $f(z) = 0$ za sve $z \in \Omega$, tj. $f \equiv 0$ na Ω.*

Dokaz: Neka je $z_0 \in \Omega$ gomilište skupa $f^{\leftarrow}(0)$, skupa nultočaka funkcije f. Tada je, zbog neprekidnosti, i točka z_0 nultočka funkcije f. Tvrdimo da je $f^{(n)}(z_0) = 0$ za sve $n \geq 0$. U protivnom bi z_0 bila nultočka funkcije f nekog, konačnog, reda, pa bi, prema prethodnom teoremu, to bila izolirana nultočka, što se protivi pretpostavci da je ona gomilište skupa nultočaka od f.

Kako je, dakle, $f^{(n)}(z_0) = 0$ za sve $n \geq 0$, iz Taylorovog razvoja funkcije f oko točke z_0, zaključujemo da je na svakom krugu K oko z_0 koji je sadržan u Ω, $f \equiv 0$, tj. $K \subseteq f^{\leftarrow}(0)$.

Pokažimo da je $f \equiv 0$ na cijelom Ω, tj. $f^{\leftarrow}(0) = \Omega$. Neka je $z' \in \Omega$ proizvoljna točka. Kako je Ω otvoren i povezan podskup od $\mathbb{C}$, postoji poligonalna linija $\Lambda \subseteq \Omega$ od točke z_0 do z'. Neka je $\varepsilon := d(\Lambda, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Zbog kompaktnosti je $\varepsilon > 0$ (vidi korolar 5.10). Odaberimo točke $z_0, z_1, \ldots, z_k = z'$ na Λ tako da je $|z_j - z_{j-1}| < \varepsilon$, $j = 1, \ldots, k$, i neka su $K_j := K(z_j, \varepsilon)$, $j = 0, 1, \ldots, k$, ε-krugovi oko tih točaka. Tada je $K_j \subseteq \Omega$ i $z_j \in K_{j-1} \cap K_j$ za sve $j = 1, \ldots, k$.



Prema prvom dijelu dokaza, $f \equiv 0$ na K_0, tj. $K_0 \subseteq f^{\leftarrow}(0)$. Pretpostavimo, induktivno, da je $f \equiv 0$ na K_{j-1}. Kako je točka z_j gomilište skupa $K_{j-1} \subseteq f^{\leftarrow}(0)$, to je ona gomilište i skupa $f^{\leftarrow}(0)$, skupa nultočaka funkcije f, pa je, prema prvom dijelu dokaza, $f \equiv 0$ i na krugu K_j. Indukcijom zaključujemo da je $f \equiv 0$ i na K_{k-1}, pa je i $f(z') = 0$. ■

Kao posljedicu dobivamo činjenicu, da ako su dvije holomorfne funkcije jednake na, naprimjer, nekom malom luku, one tada moraju biti jednake svuda.

Dokaz: Prema Taylorovu teoremu, za svaki $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$, i svaki $z \in K(z_0, r)$ je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n$. Ako je $f^{(n)}(z_0) = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, onda je $f(z) = f(z_0)$ za sve $z \in K(z_0, r)$, tj. funkcija f je na tom krugu konstantna. ■

Definicija 37.1 Za točku $z_0 \in \mathbb{C}$ za koju je $f(z_0) = 0$ kažemo da je ***nultočka*** funkcije f. Ako je f holomorfna na nekom krugu $K(z_0, r)$ oko nultočke z_0, i f nije konstantna funkcija 0 na tom krugu, onda, prema prethodnom korolaru, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Najmanji takav prirodan broj n zove se ***red nultočke***.

Teorem 37.4 (o izoliranosti nultočaka holomorfne funkcije) *Neka je funkcija f holomorfna na krugu $K(z_0, r)$ i neka je z_0 njezina nultočka reda n. Tada postoji funkcija g, holomorfna na krugu $K(z_0, r)$, takva da je $g(z_0) \neq 0$, i da za svaki $z \in K(z_0, r)$ vrijedi*

$$f(z) = (z - z_0)^n \, g(z) \, .$$

Štoviše, postoji $\delta > 0$ takav da je $g(z) \neq 0$ za sve $z \in K(z_0, \delta)$.

Dakle, holomorfna funkcija, ako se ne radi o trivijalnoj funkciji $f \equiv 0$, ima samo izolirane nultočke.

Dokaz: Prema Taylorovom teoremu, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k$, za svaki $z \in K(z_0, r)$. Kako je z_0 nultočka reda n, to je $f^{(k)}(z_0) = 0$ za $k = 0, 1, \ldots, n-1$, pa je

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)\,(z - z_0)^k = (z - z_0)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)\,(z - z_0)^{k-n} \, .$$

Definiramo li funkciju g kao sumu $g(z) := \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)\,(z - z_0)^{k-n}$, bit će na tom krugu zaista $f(z) = (z - z_0)^n \, g(z)$ i $g(z_0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Da je funkcija g holomorfna na krugu $K(z_0, r)$ slijedi iz činjenice da red kojim je funkcija g definirana ima isti radijus konvergencije kao i Taylorov red funkcije f. Zaista, za svaki niz a_n, $n \in \mathbb{N}$, kompleksnih brojeva, prema propoziciji 36.2 (i), vrijedi

$$\limsup_k \sqrt[k]{|a_{n+k}|} = \limsup_k \left(\sqrt[n+k]{|a_{n+k}|}\right)^{\frac{n+k}{k}} = \limsup_k \sqrt[n+k]{|a_{n+k}|} = \limsup_k \sqrt[k]{|a_k|} \, ,$$

Propozicija 35.2 *Neka niz funkcija $f_n \colon S \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergira lokalno uniformno. Ako je skup S kompaktan, onda niz $(f_n)_n$ konvergira uniformno.*

Dokaz: Kako niz $(f_n)_n$ konvergira lokalno uniformno na S, to, prema prethodnoj propoziciji 35.1, postoji funkcija $f \colon S \to \mathbb{C}$ takva da $(f_n)_n \overset{\text{lokalno}}{\rightrightarrows} f$. Stoga za svaki $z \in S$, postoji $r_z > 0$ takav da $\left(f_n\big|_{S_z}\right)_n \rightrightarrows f\big|_{S_z}$, gdje je, kao i ranije, $S_z := S \cap K(z, r_z)$.

Zbog kompaktnosti, postoje točke $z_1, \ldots, z_k \in S$ takve da je $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} K(z_i, r_{z_i})$, tj. $S = \bigcup_{i=1}^{k} S_{z_i}$.

Budući niz $\left(f_n\big|_{S_{z_i}}\right)_n$ konvergira uniformno restrikciji $f\big|_{S_{z_i}}$, to za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_{0,i} \in \mathbb{N}$ takav da za sve $z \in S_{z_i}$ i sve $n \geq n_{0,i}$, vrijedi $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. Neka je $n_0 := \max\{n_{0,1}, \ldots, n_{0,k}\}$. Tada za sve $z \in S$ i sve $n \geq n_0$ vrijedi $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$, tj. niz $(f_n)_n$ konvergira uniformno na S. ■

Korolar 35.3 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, a $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, niz funkcija. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(i) Niz $(f_n)_n$ konvergira lokalno uniformno na Ω.

(ii) Za svaki kompaktan skup $K \subseteq \Omega$, niz restrikcija $f_n\big|_K \colon K \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergira uniformno na K.

(iii) Za svaki zatvoreni krug $\overline{K}(z, r) \subseteq \Omega$, niz restrikcija $\left(f_n\big|_{\overline{K}(z,r)}\right)_n$ konvergira uniformno na $\overline{K}(z, r)$.

Dokaz: Da (ii) slijedi iz (i), pokazuje prethodna propozicija. (iii) slijedi trivijalno iz (ii), jer je svaki zatvoreni krug kompaktan. A implikacija $(iii) \Rightarrow (i)$ je gotovo sâma definicija lokalno uniformne konvergencije. ■

Dokažimo sada da lokalno uniformna konvergencija čuva neprekidnost.

Teorem 35.4 *Neka je $f_n \colon S \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, niz neprekidnih funkcija koji lokalno uniformno konvergira funkciji $f \colon S \to \mathbb{C}$. Tada je i funkcija f neprekidna.*

Dokaz: Neka je $z_0 \in S$ proizvoljna točka. Na nekoj okolini $S_{z_0} := S \cap K(z_0, r_{z_0})$ točke z_0, niz $(f_n)_n$ konvergira uniformno funkciji f, pa za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za svaki $z \in S_{z_0}$ i svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Specijalno je $|f_{n_0}(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ za sve $z \in S_{z_0}$.

Kako je funkcija f_{n_0} neprekidna u z_0, postoji $\delta > 0$, $\delta < r_{z_0}$, takav da za sve $z \in S$ za koje je $|z - z_0| < \delta$, vrijedi $|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Tada za sve takve z vrijedi

$$|f(z) - f(z_0)| \le \underbrace{|f(z) - f_{n_0}(z)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_0}(z_0) - f(z_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon \,. \quad \blacksquare$$

Zbog prethodnog teorema, kaže se da, u slučaju lokalno uniformne konvergencije, *limes (niza) i limes (funkcije), komutiraju.* Naime, ako je funkcija f lokalno uniformni limes niza funkcija neprekidnih u točki z_0, onda je i f neprekidna u z_0, pa je

$$\lim_{z \to z_0} \lim_n f_n(z) = \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) = \lim_n f_n(z_0) = \lim_n \lim_{z \to z_0} f_n(z) \,.$$

Naš glavni interes u ovom poglavlju su redovi funkcija. Kako redove dosad nismo spominjali, pođimo od definicije. Neka je X neki vektorski prostor snabdjeven nekom metrikom, ili barem nekom topologijom, naprimjer, neka je X normiran vektorski prostor, a $(x_n)_n$ niz u X. ***Red*** $\sum x_n$ je uređen par $\big((x_n)_n, (s_n)_n\big)$ niza $(x_n)_n$ i niza $(s_n)_n$ njegovih ***parcijalnih suma*** $s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k$, $n \in \mathbb{N}$. Za red $\sum x_n$ kažemo da ***konvergira***, ako konvergira niz $(s_n)_n$. U tom slučaju limes $\lim_n s_n$ niza parcijalnih suma zovemo ***sumom reda*** $\sum x_n$ i označavamo sa $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Nas će zanimati redovi funkcija, posebice redovi funkcija $\sum f_n$, gdje su $f_n \colon S \to \mathbb{C}$ kompleksne funkcije kompleksne varijable. Za takav red kažemo da ***konvergira*** (*obično*) ako za svaki $z \in S$ red $\sum f_n(z)$ kompleksnih brojeva konvergira.[1] Za red funkcija $\sum f_n$ kažemo da ***konvergira uniformno*** ako niz $\Big(\sum_{k=1}^{n} f_k\Big)_n$ konvergira uniformno, tj. konvergira u prostoru funkcija sa S u $\mathbb{C}$, snabdjevenom ranije spomenutom metrikom ρ'. Slično se definira lokalno uniformna konvergencija reda funkcija.

Korolar 35.5 *Ako je $\sum f_n$ red neprekidnih funkcija $f_n \colon S \to \mathbb{C}$ koji konvergira lokalno uniformno, onda je njegova suma $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \colon S \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija.* $\blacksquare$

[1] Primijetimo da *ne* postoji metrika na prostoru svih funkcija sa S u $\mathbb{C}$ takva da konvergencija s obzirom na tu metriku bude upravo obična konvergencija niza funkcija. Za opis obične konvergencije potrebna je ne-metrizabilna topološka struktura na prostoru funkcija, vidi [4].

Kako red $\sum \big|\frac{z}{\rho}\big|^n$ konvergira, to prema Weierstrassovom kriteriju, teorem 35.12, red pod integralom u (4) konvergira uniformno na Γ_ρ, pa se, prema korolaru 35.9, može integrirati član po član. Vrijedi zato

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} f(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta \Big) z^n \,.$$

Tako smo prikazali funkciju f kao sumu reda $\sum a_n z^n$, gdje su koeficijenti dâni formulom $a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta$, $n \in \mathbb{N}$. Kako je funkcija $\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}$ holomorfna na probušenom krugu $K^*(0,r)$, a kružnica Γ_ρ je u $K^*(0,r)$ homotopna kružnici Γ_0, to su, prema Cauchyjevu teoremu, teorem 33.4, integrali po tim kružnicama jednaki, pa dobivamo (2) za slučaj $z_0 = 0$.

Prema teoremu 34.9 o višim derivacijama derivabilne funkcije, znamo da je

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \,,$$

pa je tako dokazana i formula (1) za slučaj $z_0 = 0$. $\blacksquare$

Kao posljedicu Taylorova teorema i teorema 36.4, dobivamo

Korolar 37.2 (analitičnost holomorfne funkcije) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup. Funkcija $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ je holomorfna u točki $z_0 \in \Omega$ ako i samo ako postoji red potencija $\sum a_n (z - z_0)^n$ s radijusom konvergencije $r > 0$ takav da je*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

za sve z iz neke okoline točke z_0. $\blacksquare$

Ovaj korolar pokazuje, da je svaka derivabilna kompleksna funkcija ne samo holomorfna i da ima derivacije svih redova, kao što smo bili već dokazali u teoremu 34.9 o višim derivacijama derivabilne funkcije, nego je svaka takva funkcija ujedno i ***analitička***, tj. *može se razviti u red potencija*, što je mnogo više.

Korolar 37.3 *Neka je $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija i $z_0 \in \Omega$. Tada za svaki $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$ vrijedi $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n$ za sve $z \in K(z_0, r)$. Specijalno, ako je $f^{(n)}(z_0) = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, onda je f konstantna funkcija na svakom krugu $K(z_0, r)$ oko točke z_0, koji je sadržan u Ω.*

koeficijenti a_n dani formulama

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)\,, \quad \textit{pritom je } f^{(0)}(z_0) := f(z_0) \tag{1}$$
$$= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta\,, \tag{2}$$

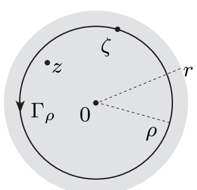
*pri čemu je Γ_0 proizvoljna pozitivno orijentirana kružnica oko z_0 radijusa manjeg od r. To je **Taylorov red funkcije** f u točki z_0.*

Uobičajeno je koeficijente Taylorova reda pisati u obliku (1), pa se najčešće Taylorov red piše kao

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)\,(z - z_0)^n\,.$$

Dokaz: Dokaz ćemo provesti za slučaj $z_0 = 0$. Opći se slučaj dobije translacijom, tj. jednostavnom zamjenom varijable z sa $z - z_0$.

Neka je, dakle, $f \in H(K(0,r))$ i neka je $z \in K(0,r)$ proizvoljna točka.



Odaberimo ρ takav da je $|z| < \rho < r$, i neka je Γ_ρ pozitivno orijentirana kružnica oko 0 radijusa ρ. Prema Cauchyjevoj integralnoj formuli, točnije korolaru 34.5, vrijedi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,. \tag{3}$$

Za svaki $\zeta \in \Gamma_\rho$ je $\zeta \neq 0$ i $\left|\frac{z}{\zeta}\right| < 1$, pa vrijedi

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\,\frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}\,.$$

Uvrstimo li to u (3), dobivamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}\, f(\zeta)\, d\zeta\,. \tag{4}$$

Označimo s $M := \max\{|f(\zeta)| : \zeta \in \Gamma_\rho\}$. Tada je

$$\left|\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}\, f(\zeta)\right| \leq M\, \frac{1}{|\zeta|} \left|\frac{z}{\zeta}\right|^n = M\, \frac{1}{|\rho|} \left|\frac{z}{\rho}\right|^n\,.$$

Kao kod nizova, ako red $\sum f_n$ funkcija neprekidnih u točki z_0 lokalno uniformno konvergira, onda se *limes po z sume reda dobije kao suma reda limesa po z*, tj.

$$\lim_{z\to z_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{z\to z_0} f_n(z)\,,$$

pa se kaže da *limes i suma reda komutiraju.*

Sljedeći teoremi govore o zamjeni limesa niza, odnosno sume reda, i integrala, odnosno derivacije.

Teorem 35.6 *Neka je $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ po dijelovima gladak put, a $f_n\colon \gamma^\clubsuit \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, niz neprekidnih funkcija koji konvergira lokalno uniformno funkciji $f\colon \gamma^\clubsuit \to \mathbb{C}$. Tada je $\int_\gamma f\,dz = \lim_n \int_\gamma f_n\,dz$.*

U slučaju lokalno uniformne konvergencije, vrijedi, dakle

$$\lim_n \int_\gamma f_n\,dz = \int_\gamma \lim_n f_n\,dz\,,$$

pa se kaže da *limes i integral komutiraju.*

Dokaz: Prema teoremu 35.4, f je neprekidna funkcija na $\gamma^\clubsuit$, pa integral $\int_\gamma f\,dz$ ima smisla. Prema lemi 32.1 o ocjeni integrala, vrijedi

$$\Big|\int_\gamma f_n\,dz - \int_\gamma f\,dz\Big| = \Big|\int_\gamma \big(f_n(z) - f(z)\big)\,dz\Big|$$
$$\leq \max\{|f_n(z) - f(z)| : z \in \gamma^\clubsuit\} \cdot \ell(\gamma)\,.$$

Kako je skup $\gamma^\clubsuit$ kompaktan, niz $(f_n)_n$ konvergira uniformno, pa za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ i sve $z \in \gamma^\clubsuit$ vrijedi $\big|f_n(z) - f(z)\big| < \frac{\varepsilon}{\ell(\gamma)}$. Zbog toga, za $n \geq n_0$ vrijedi

$$\Big|\int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz\Big| \leq \frac{\varepsilon}{\ell(\gamma)} \cdot \ell(\gamma) = \varepsilon\,,$$

tj. niz brojeva $\big(\int_\gamma f_n\,dz\big)_n$ konvergira, i limes je $\int_\gamma f\,dz$. ■

Korolar 35.7 *Neka je γ po dijelovima gladak put u $\mathbb{C}$, a $f_n\colon \gamma^\clubsuit \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, niz neprekidnih funkcija takvih da red $\sum f_n$ konvergira lokalno uniformno na $\gamma^\clubsuit$. Tada red brojeva $\sum \int_\gamma f_n\,dz$ konvergira, i vrijedi*

$$\int_\gamma \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n\,dz\,.$$

Kaže se, stoga, da se lokalno uniformno konvergentan red može integrirati član po član. ■

Prethodna dva teorema i korolara o zamjeni limesa s limesom odnosno integralom, nepromijenjeno vrijede i za, naprimjer, realne funkcije realne varijable. Međutim, sljedeći teorem o zamjeni limesa i derivacije, kao i njegov korolar, bez dodatnih pretpostavki, ne vrijede u slučaju realnih funkcija.

Teorem 35.8 (Weierstrassov teorem o limesu niza holomorfnih funkcija) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $f_n \in H(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, niz holomorfnih funkcija koji na Ω konvergira lokalno uniformno funkciji $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Tada je i f holomorfna funkcija, $f \in H(\Omega)$. Štoviše, niz derivacija $(f'_n)_n$ konvergira lokalno uniformno na Ω funkciji f', tj. vrijedi*

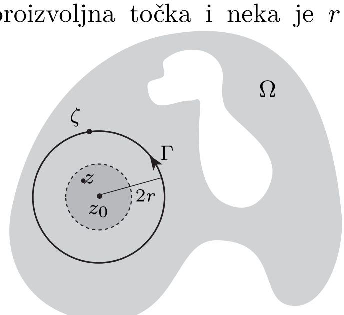
$$\lim_n f'_n = (\lim_n f_n)' .$$

Dokaz: Prema teoremu 35.4 je funkcija $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna. Neka je $z \in \Omega$ proizvoljna točka i $r_z > 0$ takav da je $K(z, r_z) \subseteq \Omega$. Tada, prema teoremu 35.6 i Cauchyjevu teoremu, za svaki pravokutnik $I \subseteq K(z, r_z)$ vrijedi

$$\int_{\partial I} f\,dz = \lim_n \int_{\partial I} f_n\,dz = 0 .$$

Prema Morerinom teoremu 34.10, zaključujemo da je f holomorfna na Ω.

Dokažimo i da niz $(f'_n)_n$ lokalno uniformno konvergira k f'. Neka je $z_0 \in \Omega$ proizvoljna točka i neka je $r > 0$ takav da je $\overline{K}(z_0, 2r) \subseteq \Omega$, te neka je $\Gamma := \partial K(z_0, 2r)$ pozitivno orijentirana obrubljujuća kružnica. Kako je skup Γ kompaktan, niz $(f_n)_n$ konvergira na Γ uniformno funkciji f, pa za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ i sve $\zeta \in \Gamma$ vrijedi $|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \varepsilon \frac{r}{2}$. Nadalje, kako su funkcije f i f_n, $n \in \mathbb{N}$, holomorfne na Ω, prema Cauchyjevoj integralnoj formuli, točnije korolaru 34.5, i teoremu 34.7 o derivaciji funkcije definirane integralom, za svaki $z \in K(z_0, r)$ vrijedi



$$f'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta$$

$$f'_n(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta , \quad n \in \mathbb{N} .$$

7

Razvoji kompleksnih funkcija u redove potencija

U ovom ćemo poglavlju najprije pokazati da je svaka holomorfna funkcija čak analitička, tj. da se može razviti u red potencija. Nakon toga ćemo pokazati da se i neke funkcije koje u ponekoj točki nisu holomorfne, mogu na nekoj okolini takve točke razviti u red sastavljen od pozitivnih, ali i negativnih potencija. Vidjet ćemo da ti redovi sadrže mnogo informacija o sâmim funkcijama i predstavljaju moćno oruđe u njihovom proučavanju.

§ 37 Taylorov red

Pokazat ćemo najprije da se svaka funkcija, koja je holomorfna na nekom krugu, može na tom krugu prikazati kao suma reda potencija.

Teorem 37.1 (Taylorov[1] teorem) *Neka je funkcija f holomorfna na krugu $K(z_0, r)$. Tada za svaki $z \in K(z_0, r)$ vrijedi $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, gdje su*

[1]Brook Taylor (1685–1731), engleski matematičar

Drugim riječima, red potencija predstavlja, na krugu konvergencije, holomorfnu funkciju, a derivacija se dobije deriviranjem reda član po član.

Dokaz: Holomorfnost funkcije f i formula (3) za njezinu derivaciju, slijede iz Cauchy-Hadamardova teorema 36.3 i korolara 35.9. Treba još samo pokazati da je radijus konvergencije za derivaciju f' upravo r.

Promatrajmo red $\sum c_n(z-z_0)^n$, gdje je $c_n := (n+1)\,a_{n+1}$. Za radijus konvergencije toga reda, koristeći propoziciju 36.2, nalazimo

$$\begin{aligned}\limsup \sqrt[n]{|c_n|} &= \limsup \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} \\ &= \limsup \Big(\sqrt[n+1]{n+1} \cdot \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \Big)^{\frac{n+1}{n}} \\ &= \limsup \Big(\sqrt[n+1]{n+1} \cdot \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \Big) \\ &= \limsup \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} = \frac{1}{r}\,,\end{aligned}$$

pa redovi $\sum a_n(z-z_0)^n$ i $\sum n\,a_n(z-z_0)^{n-1}$ imaju iste radijuse konvergencije. ■

Napomena[1] **36.1** Prethodni teorem o holomorfnosti sume reda potencija, pokazuje da je na krugu konvergencije, suma reda potencija holomorfna funkcija. Prema Cauchy-Hadamardovu teoremu, taj red potencija ne konvergira niti u jednoj točki izvan zatvorenog kruga konvergencije. To specijalno znači da za svaku točku s ruba kruga konvergencije, red potencija ne konvergira niti na jednoj okolini te točke. To, međutim, ne znači da se funkcija definirana sumom reda potencija na krugu konvergencije, ne može proširiti do holomorfne funkcije i izvan toga kruga. Naprimjer, red $\sum(-1)^n z^{2n}$ konvergira na jediničnom krugu oko ishodišta, ali funkcija $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$, koja je na tom krugu jednaka sumi toga reda, definirana je na cijeloj kompleksnoj ravnini, osim u dvije točke: i i $-\mathrm{i}$. A te su dvije točke upravo na rubu kruga konvergencije. Za red $\sum z^n$, kome je krug konvergencije također jedinični krug, jedina „loša" točka je 1.

Jednostavna posljedica Taylorova teorema, kojeg ćemo dokazati u idućem poglavlju, je da na rubu kruga konvergencije uvijek postoji barem jedna točka takva da se suma reda potencija ne može proširiti do holomorfne funkcije niti na jednu okolinu te točke.

[1]vidi također napomenu 37.1.

Kako za sve $z \in K(z_0, r)$ i sve $\zeta \in \Gamma$ vrijedi $|\zeta - z| > r$, to je, prema lemi 32.1,

$$|f_n'(z) - f'(z)| = \Big| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}\, d\zeta \Big| < \frac{1}{2\pi} \cdot \varepsilon \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 2 \cdot 2r\pi = \varepsilon\,,$$

pa $(f_n')_n \rightrightarrows f'$ na okolini $K(z_0, r)$ točke z_0. Stoga niz $(f_n')_n$ lokalno uniformno konvergira funkciji f'. ■

Za redove, kao posljedicu, dobivamo

Korolar 35.9 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, a $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, niz holomorfnih funkcija, takvih da red $\sum f_n$ lokalno uniformno konvergira. Tada je i suma reda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ holomorfna funkcija na Ω, red $\sum f_n'$ konvergira lokalno uniformno na Ω, i $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$, tj.*

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'\,.$$

Kaže se da se lokalno uniformno konvergentan red derivira član po član. ■

Uniformna i lokalno uniformna konvergencija su svojstva redova koja su ‚dobra' sa stajališta analize. Međutim za ‚računanje' s redovima, naprimjer za zbrajanje, a posebno množenje, potrebna je jedna druga vrsta konvergencije.

Definicija 35.4 Za red brojeva $\sum a_n$ kažemo da ***apsolutno konvergira*** ako konvergira red $\sum |a_n|$. Analogno, za red $\sum f_n$ funkcija sa S u $\mathbb{C}$ kažemo da apsolutno konvergira, ako konvergira red $\sum |f_n|$.

Kod apsolutno konvergentnih redova, članovi se mogu po volji grupirati i permutirati, a da to nema utjecaja na njihovu konvergenciju niti na sâmu sumu. Mi te stvari nećemo dokazivati, a precizno iskazane tvrdnje i detaljni dokazi nalaze se u [4].

Važna je sljedeća, na prvi pogled očita, činjenica:

Teorem 35.10 *Neka je z_n, $n \in \mathbb{N}$, niz kompleksnih brojeva. Ako red $\sum z_n$ konvergira apsolutno, onda on i konvergira.*

Dokaz: Da red $\sum z_n$ apsolutno konvergira znači da konvergira red $\sum |z_n|$, tj. da konvergira njegov niz parcijalnih suma $\sigma_n := \sum_{j=1}^{n} |z_j|$. Stoga je niz $(\sigma_n)_n$ Cauchyjev niz, pa za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq n_0$ i sve $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|\sigma_{n+k} - \sigma_n| = \sum_{j=1}^{n+k} |z_j| - \sum_{j=1}^{n} |z_j| = \sum_{j=n+1}^{n+k} |z_j| < \varepsilon\,.$$

Stoga za sve $n \geq n_0$ i sve $k \in \mathbb{N}$, za parcijalne sume s_n reda $\sum z_n$ vrijedi

$$|s_{n+k} - s_n| = \Big|\sum_{j=n+1}^{n+k} z_j\Big| \leq \sum_{j=n+1}^{n+k} |z_j| < \varepsilon\,,$$

pa je niz $(s_n)_n$ parcijalnih suma reda $\sum z_n$ Cauchyjev niz. Zbog potpunosti prostora $\mathbb{C}$, taj niz konvergira, tj. red $\sum z_n$ je konvergentan. ■

U dokazu prethodnog teorema koristili smo potpunost prostora kompleksnih brojeva. Iz sâmog se dokaza vidi da će u svakom Banachovom prostoru apsolutno konvergentni redovi biti i konvergentni. Međutim, u prostorima koji nisu potpuni postoje apsolutno konvergentni redovi koji ne konvergiraju.

Primjer 35.3 Konstruirat ćemo red racionalnih brojeva koji u $\mathbb{Q}$ apsolutno konvergira ali koji u $\mathbb{Q}$ nije konvergentan.

Neka su članovi redova $\sum a_n$ i $\sum b_n$ definirani s

$$\left.\begin{aligned} a_{2k} &:= \frac{1}{k!} - \frac{1}{2^k} \\ a_{2k+1} &:= 0 \end{aligned}\right\} k = 0,1,2,\dots$$

i

$$\left.\begin{aligned} b_{2k} &:= 0 \\ b_{2k+1} &:= \frac{1}{k!} \end{aligned}\right\} k = 0,1,2,\dots$$

Kako su redovi $\sum \frac{1}{k!}$ i $\sum \frac{1}{2^k}$, kao redovi u $\mathbb{R}$, apsolutno konvergentni, to su i redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ apsolutno konvergentni u $\mathbb{R}$. Zbog toga je u $\mathbb{R}$ apsolutno konvergentan i red $\sum q_n$ čiji su članovi definirani s

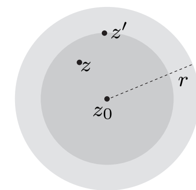
$$q_n := a_n + b_n = \begin{cases} \frac{1}{k!} - \frac{1}{2^k}\,, & n = 2k \\ \frac{1}{k!}\,, & n = 2k+1\,. \end{cases}$$

Budući je $\mathbb{R}$ potpun, taj red u $\mathbb{R}$ i konvergira i suma mu je

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} q_n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n &= \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{k!} - \frac{1}{2^k}\Big) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 2e - 2\,.\end{aligned}$$

Dokaz:

(a) Neka je $z \in K(z_0, r)$ proizvoljan. Odaberimo $z' \in K(z_0, r)$ takav da je $|z - z_0| < |z' - z_0| < r$. Tada je, prema prethodnoj propoziciji 36.2 (i),

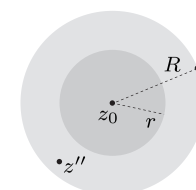


$$\begin{aligned}\limsup \sqrt[n]{|a_n(z' - z_0)^n|} &= \limsup \sqrt[n]{|a_n|}\cdot|z' - z_0| \\ &= \frac{1}{r}\,|z' - z_0| < 1\,.\end{aligned}$$

Prema Cauchyjevu kriteriju, propozicija 36.2 (ii), red $\sum a_n(z' - z_0)^n$ konvergira apsolutno.

Prema Abelovoj lemi, teorem 36.1, zaključujemo da red (1) konvergira apsolutno i lokalno uniformno na krugu $K(z_0, |z' - z_0|)$. Kako je $z \in K(z_0, r)$ bio proizvoljan, red (1) konvergira apsolutno i lokalno uniformno na cijelom krugu $K(z_0, r)$.

(b) Pretpostavimo da red (1) konvergira za neki z' takav da je $|z' - z_0| =: R > r$. Tada, prema Abelovoj lemi, teorem 36.1, red (1) konvergira apsolutno na krugu $K(z_0, R)$, pa specijalno konvergira apsolutno za neki z'' takav da je $r < |z'' - z_0| < R$, tj. konvergira red $\sum |a_n(z'' - z_0)^n|$. Međutim,



$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(z'' - z_0)^n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}\cdot|z'' - z_0| = \frac{|z'' - z_0|}{r} > 1\,,$$

što se protivi Cauchyjevu kriteriju, propozicija 36.2 (ii). ■

Dokažimo sada da su sume redova potencija uvijek ‚dobre', tj. holomorfne, funkcije.

Teorem 36.4 (o holomorfnosti sume reda potencija) *Neka red potencija $\sum a_n(z - z_0)^n$ ima radijus konvergencije $r > 0$. Tada je funkcija $f\colon K(z_0, r) \to \mathbb{C}$ definirana s*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

holomorfna na $K(z_0, r)$, i njezina derivacija jednaka je

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(z - z_0)^{n-1}\,. \tag{3}$$

Pritom, radijus konvergencije za f' također jednak je r.

Neka jednostavna svojstva koja ćemo trebati, dana su sljedećom propozicijom:

Propozicija 36.2

(*i*) *Neka su* $(\alpha_n)_n$ *i* $(\beta_n)_n$ *nizovi nenegativnih realnih brojeva takvi da niz* $(\beta_n)_n$ *konvergira, te neka je* $b := \lim_n \beta_n$ *i* $\alpha := \limsup \alpha_n$. *Tada je*

$$(a) \quad \limsup \alpha_n \cdot \beta_n = \alpha \cdot b$$
$$(b) \quad \limsup (\alpha_n)^{\beta_n} = \alpha^b\,.$$

(*ii*) ***(Cauchyjev kriterij konvergencije reda)***
Neka je $(\alpha_n)_n$ *niz nenegativnih realnih brojeva i neka je* $A := \limsup \sqrt[n]{\alpha_n}$. *Onda*

ako je $A < 1$, *red* $\sum \alpha_n$ *konvergira, a*
ako je $A > 1$, *red* $\sum \alpha_n$ *divergira.* ■

Dokažimo sada osnovni teorem o redovima potencija:

Teorem 36.3 (Cauchy-Hadamardov[1] teorem) *Neka je*

$$\sum a_n (z - z_0)^n \tag{1}$$

red potencija i neka je

$$r := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{2}$$

(dogovorno uzimamo $r := 0$ *ako je* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, *a* $r := +\infty$ *ako je* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$*). Tada*

(*a*) *red* (1) *konvergira apsolutno i lokalno uniformno na krugu* $K(z_0, r)$, *i*

(*b*) *red* (1) *divergira za svaki* $z \in \mathbb{C}$ *za koji je* $|z - z_0| > r$.

Broj r *zove se* ***radijus konvergencije***, *a* $K(z_0, r)$ ***krug konvergencije*** *reda potencija* (1).

[1] Jacques Salamon Hadamard (1865–1963), francuski matematičar

Red $\sum q_n$ je red racionalnih brojeva, $q_n \in \mathbb{Q}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Ali broj $2e - 2$ nije racionalan, pa taj red ne konvergira u $\mathbb{Q}$, tj. kao red u $\mathbb{Q}$ on nije konvergentan. Pokažimo da je on ipak apsolutno konvergentan i u $\mathbb{Q}$.

Označimo sa σ_n parcijalne sume reda $\sum |q_n|$. Direktnim računom, vidi se da je $\sigma_7 = \frac{83}{24}$, a jer za sve $k \geq 4$ vrijedi $\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^k}$, to za $n \geq 4$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\sigma_{2n} &= \frac{83}{24} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^k} - \frac{1}{n!} \\
\sigma_{2n+1} &= \frac{83}{24} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^k} \\
\sigma_{2n+2} &= \frac{83}{24} + \sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{2^k} - \frac{1}{(n+1)!} \\
&= \sigma_{2n+1} + \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{(n+1)!} \right),
\end{aligned}$$

pa je $\sigma_{2n} < \sigma_{2n+1} < \sigma_{2n+2}$, $n \geq 4$, tj. niz $(\sigma_n)_n$ je monotono rastuć niz u $\mathbb{Q}$. Međutim, njegov podniz $(\sigma_{2n+1})_n$ konvergira u $\mathbb{Q}$. Zaista,

$$\sigma_{2n+1} = \frac{83}{24} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{83}{24} + \frac{\frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{10}{3} - \frac{1}{2^n}\,,$$

pa je $\lim_n \sigma_{2n+1} = \frac{10}{3}$. Zbog toga i sâm niz $(\sigma_n)_n$ konvergira (i limes mu je $\frac{10}{3}$), tj. promatrani red $\sum q_n$ je i u $\mathbb{Q}$ apsolutno konvergentan.

Iz prethodnog teorema i definicije konvergencije reda funkcija, slijedi

Korolar 35.11 *Svaki apsolutno konvergentan red kompleksnih funkcija konvergira (obično).* ■

Primijetimo da apsolutno konvergentan red funkcija ne mora konvergirati (lokalno) uniformno, niti obratno, uniformno konvergentan red ne mora konvergirati apsolutno.

Primjer 35.4

(*i*) Red $\sum f_n$ funkcija $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranih s $f_n(t) := (-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}$, konvergira uniformno na $\mathbb{R}$, ali ne konvergira apsolutno.

(*ii*) Red $\sum g_n$ funkcija $g_n\colon [0,1\rangle \to \mathbb{R}$ definiranih s $g_n(t) := t^n$, konvergira apsolutno, ali ne i uniformno. Naime, kada bi red $\sum g_n$ konvergirao uniformno, onda bi *opći član morao uniformno težiti nuli*, tj. niz funkcija $(g_n)_n$ bi na $[0,1\rangle$ morao konvergirati uniformno, što, kako smo vidjeli u primjeru 35.1, nije istina.

Dokažimo na kraju ovog paragrafa jedan koristan dovoljan uvjet za apsolutnu i uniformnu konvergenciju, koji ćemo često koristiti.

Teorem 35.12 (Weierstrassov kriterij, Weierstrassov M-test) *Neka je $\sum f_n$ red funkcija sa S u $\mathbb{C}$. Ako postoje nenegativni realni brojevi $\rho_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, takvi da red $\sum \rho_n$ konvergira i da je $|f_n(z)| \leq \rho_n$ za sve $z \in S$ i sve $n \in \mathbb{N}$, onda red $\sum f_n$ konvergira apsolutno i uniformno na S.*

Dokaz: Da bismo dokazali apsolutnu konvergenciju, dovoljno je pokazati da je za svaki $z \in S$, niz parcijalnih suma reda $\sum |f_n(z)|$ omeđen (jer će tada zbog monotonosti i konvergirati). No, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki $z \in S$ je

$$\sum_{k=1}^{n} |f_k(z)| \leq \sum_{k=1}^{n} \rho_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \in \mathbb{R}\,,$$

pa red $\sum f_n$ zaista konvergira apsolutno.

Pokažimo da red $\sum f_n$ konvergira i uniformno. Kako red $\sum \rho_n$ konvergira, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \rho_k < \varepsilon$.

Zbog toga, za svaki $n \geq n_0$ i svaki $z \in S$, vrijedi

$$\Big|\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)}_{\substack{\text{ova suma postoji}\\ \text{zbog već dokazane}\\ \text{(apsolutne) konvergencije}}} - \sum_{k=1}^{n} f_k(z)\Big| = \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho_k < \varepsilon\,,$$

pa red $\sum f_n$ konvergira uniformno. Gornji račun je korektan, jer, kako smo već bili pokazali, red $\sum f_n$ konvergira apsolutno, pa onda i konvergira. ■

§ 36 Redovi potencija

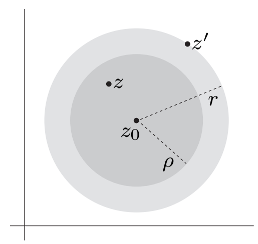
U ovom ćemo paragrafu promatrati neke posebne redove funkcija, i dokazati neka, za njih tipična, svojstva.

Red potencija je red oblika $\sum a_n(z-z_0)^n$, gdje su z_0 i koeficijenti a_n, $n \geq 0$, kompleksni brojevi. Uobičajeno je da kod redova potencija indeksi n uključuju, osim prirodnih brojeva, i nulu, pa ćemo sâm red označivati i sa $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$, a njegovu sumu, kada postoji, sa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

Često ćemo rabiti sljedeći teorem:

Teorem 36.1 (Abelova[1] lema) *Ako red potencija $\sum a_n(z-z_0)^n$ konvergira za neki $z' \neq z_0$, onda taj red konvergira apsolutno i lokalno uniformno na cijelom krugu $K(z_0, r)$, gdje je $r := |z'-z_0|$.*

Dokaz: Ako red $\sum a_n(z'-z_0)^n$ konvergira, onda je specijalno $\lim\limits_n a_n(z'-z_0)^n = 0$. Postoji stoga $M > 0$ takav da je $|a_n(z'-z_0)^n| \leq M$, za sve $n = 0, 1, 2, \ldots$



Neka je $0 < \rho < r = |z'-z_0|$. Tada za svaki $z \in K(z_0,\rho)$ vrijedi

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n(z'-z_0)^n| \cdot \left|\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right|^n < M\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^n .$$

Kako je $\frac{\rho}{r} < 1$, red $\sum M\big(\frac{\rho}{r}\big)^n$ konvergira, pa prema Weierstrassovu kriteriju, teorem 35.12, zaključujemo da red $\sum a_n(z-z_0)^n$ konvergira na $K(z_0,\rho)$ apsolutno i uniformno.

Budući da za svaki $z \in K(z_0, r)$ postoji ρ takav da je $|z-z_0| < \rho < r$, red $\sum a_n(z-z_0)^n$ konvergira apsolutno i lokalno uniformno na cijelom krugu $K(z_0, r)$. ■

Definicija 36.1 Neka je ρ_n, $n \in \mathbb{N}$, niz nenegativnih realnih brojeva. Ako je taj niz neograničen, definiramo $\limsup \rho_n := +\infty$. U protivnom, tj. ako je niz $(\rho_n)_n$ ograničen, označimo skup svih njegovih gomilišta sa S (taj je skup, prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu, neprazan), i definiramo $\limsup \rho_n := \sup S$.

Nije teško pokazati da je i $\limsup \rho_n$ također gomilište niza $(\rho_n)_n$, tj. vrijedi $\limsup \rho_n \in S$, i zbog toga naziv — najveće gomilište.

[1] Niels Henrik Abel (1802–1829), norveški matematičar