## 5 HOMOLOGIJA

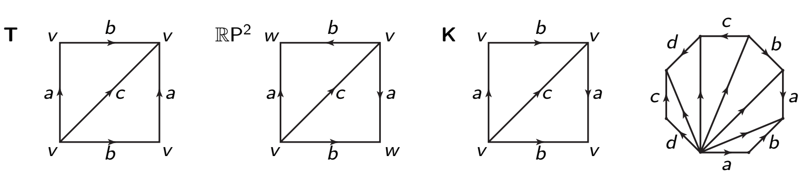
- $\Delta$-kompleksi
- Simplicijalna homologija
- Singularna homologija
- Homotopska invarijantnost
- Egzaktni nizovi
- Relativne homološke grupe
- Isijecanje
- Prirodnost
- Ekvivalencija simplicijalne i singularne homologije



## Rastav ploha na trokute

$\Delta$-kompleksi su mala generalizacija uobičajenijeg pojma *simplicijalni kompleksi* a uveli su ih (pod drugim nazivom) Eilenberg i Zilber 1950.

Torus, projektivnu ravninu i Kleinovu bocu možemo dobiti od po dva trokuta odgovarajućom identifikacijom stranica:

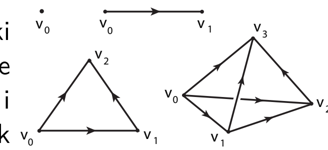



I svaki se poligon može razrezati na trokute, pa se i svaka ploha može sastaviti od trokutova. A i mnogi općenitiji 2-dimenzionalni prostori koji nisu plohe, mogu se sastaviti od trokutova.

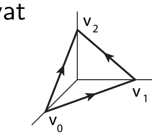
$\Delta$-kompleksi su generalizacija ovakvih rastava.



## Simpleksi




Konveksna ljuska skupa od $n+1$ geometrijski nezavisnih točaka $v_0, \dots, v_n$ u $\mathbb{R}^m$ naziva se ***n-simpleks***. Za homologiju važan će biti i redoslijed vrhova, pa će „$n$-simpleks" uvijek značiti „$n$-simpleks sa zadanim uređajem vrhova", i označivat ćemo ga s $[v_0, \dots, v_n]$.




$n$-simpleks $\Delta^n := \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_i t_i = 1, t_i \geq 0\}$ nazivamo ***standardni n-simpleks***.

Postoji prirodan linearni homeomorfizam $\Delta^n \xrightarrow{(t_0,\dots,t_n)\mapsto\sum_i t_i v_i} [v_0, \dots, v_n]$.
Koeficijenti $t_i$ su ***baricentričke koordinate*** točke $\sum_i t_i v_i \in [v_0, \dots, v_n]$.
Simplekse razapete nekim podskupom od $n$ vrhova nazivamo ***stranice***.
Uređaj vrhova podsimpleksa je *uvijek* naslijeđen od polaznog simpleksa.
Unija svih (pravih) stranica je ***rub*** od $\Delta^n$, oznaka $\partial\Delta^n$,
a nutrinu $\mathring{\Delta}^n := \Delta^n \setminus \partial\Delta^n$ nazivamo ***otvoreni simpleks***.



## $\Delta$-kompleksi

**Definicija**

***Struktura $\Delta$-kompleksa*** na prostoru $X$ je familija preslikavanja $\sigma_\alpha \colon \Delta^n \to X$ ($n$ ovisi o $\alpha$) t.d. vrijedi:

(*i*) Restrikcija $\sigma_\alpha|\mathring{\Delta}^n$ je injekcija i svaka točka od $X$ je slika točno jedne takve restrikcije.

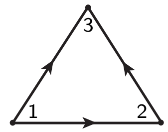
(*ii*) Svaka restrikcija od $\sigma_\alpha$ na stranicu od $\Delta^n$ je jedno od preslikavanja $\sigma_\beta \colon \Delta^{n-1} \to X$.
(Ovdje su stranice od $\Delta^n$ identificirane s $\Delta^{n-1}$ kanonskim linearnim homeomorfizmom koji čuva uređaj vrhova!)

(*iii*) Skup $A \subseteq X$ je otvoren akko je $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ otvoren u $\Delta^n$ za sve $\sigma_\alpha$.

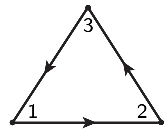
Odavde slijedi da se $\Delta$-kompleks može dobiti od familije disjunktnih simpleksa identifikacijom raznih podsimpleksa razapetim podskupovima vrhova, korištenjem kanonskih linearnih homeomorfizama koji čuvaju uređaj vrhova.

## Paziti na orijentaciju!

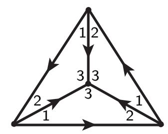
Ako u trokutu identificiramo sve tri stranice uz orijentaciju određenu uređajem vrhova, dobit ćemo Δ-kompleks *Borsukovu šubaru* (*dunce hat*).




Identificiramo li u trokutu stranice u cikličkom uređaju, kvocijentni prostor nema strukturu Δ-kompleksa.




Ali ako trokut podijelimo na manje trokute kao na trećoj slici, pa onda identificiramo stranice velikog trokuta u cikličkom uređaju, dobit ćemo Δ-kompleks.




Lako se vidi da su Δ-kompleksi Hausdorffovi prostori. Zbog (*iii*) su restrikcije $\sigma_\alpha|\mathring{\Delta}^n$ homeomorfizmi na sliku, pa je ta slika otvoren simpleks u $X$. Može se pokazati da su ti otvoreni simpleksi $\sigma_\alpha(\mathring{\Delta}^n)$ ćelije $e^n_\alpha$ CW strukture na $X$ s karakterističnim preslikavanjima $\sigma_\alpha$.

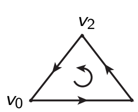


## Simplicijalna homologija

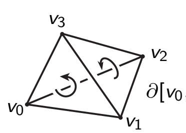
Za Δ-kompleks $X$ neka je $\Delta_n(X)$ slobodna abelova grupa kojoj bazu čine svi otvoreni $n$ simpleksi $e^n_\alpha$ u $X$. Elemente od $\Delta_n(X)$ zovemo ***n*-lanci** i možemo ih zapisivati kao formalne sume $\sum_\alpha n_\alpha e^n_\alpha$ s koeficijentima $n_\alpha \in \mathbb{Z}$, ili, ekvivalentno, kao $\sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha$, gdje je $\sigma_\alpha \colon \Delta^n \to X$ karakteristično preslikavanje od $e^n_\alpha$, i čija je slika zatvorenje od $e^n_\alpha$.

Rub simpleksa $[v_0, \ldots, v_n]$ sastoji se od svih stranica $[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$ (stranica nasuprot $v_i$). Pokazalo se da je za rub korisnije umjesto sume uzeti alterniranu sumu $\sum_i (-1)^i [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$.


$\partial[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0]$




$\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$




$$\partial[v_0, v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2, v_3] - [v_0, v_2, v_3] + [v_0, v_1, v_3] - [v_0, v_1, v_2]$$



## Homomorfizam ruba

***Homomorfizam ruba*** $\partial_n \colon \Delta_n(X) \to \Delta_{n-1}(X)$ zadan je na bazi formulom

$$\partial_n(\sigma_\alpha) := \textstyle\sum_i (-1)^i \sigma_\alpha|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]}.$$

**Lema 18.1 (osnovno svojstvo homomorfizma ruba)**

*Kompozicija* $\Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \Delta_{n-2}$ *je nul-homomorfizam.*

Dokaz: $\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]}$ pa je

$$\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) = \sum_{j<i} (-1)^i (-1)^j \sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_j,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]} + \sum_{j>i} (-1)^i (-1)^{j-1} \sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,\hat{v}_j,\ldots,v_n]}.$$

Zamijenimo li u drugom sumandu $i \leftrightarrow j$, sumandi se pokrate. □



## Homologija lančanog kompleksa

Niz abelovih grupa i homomorfizama

$$\mathcal{C} \qquad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

t.d. je $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ za sve $n$ naziva se ***lančani kompleks***. Elementi podgrupe $\operatorname{Ker} \partial_n$ nazivaju se ***n*-ciklusi** a elementi podgrupe $\operatorname{Im} \partial_{n+1}$ ***n*-rubovi**, a zbog $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ je $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subseteq \operatorname{Ker} \partial_n$. Kvocijentna grupa $H_n := \operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$ naziva se ***n*-ta homološka grupa** lančanog kompleksa $\mathcal{C}$. Elementi od $H_n$ nazivaju se ***homološke klase***, oznaka $[z]$, $z \in \operatorname{Ker} \partial$, a za dva ciklusa koji pripadaju istoj klasi kaže se da su ***homologni***.

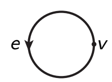
Za Δ-kompleks $X$, homološke grupe lančanog kompleksa

$$\cdots \longrightarrow \Delta_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Delta_1(X) \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

nazivamo ***simplicijalnim homološkim grupama*** od $X$, oznaka $H^\Delta_n(X)$.

## Homologija kružnice i torusa

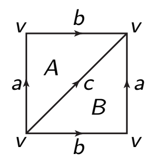
Kružnica: $X = S^1$ ima $\Delta$-strukturu s jednim vrhom i jednim bridom:




Zato je $\Delta_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \cong \Delta_0(S^1)$, a $\Delta_n(S^1) = 0$ za $n \geq 2$, pa je

$$H_n^\Delta(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{za } n = 0, 1 \\ 0 & \text{za } n \geq 2 \end{cases} \quad \text{jer je } \partial_1 = 0.$$

Torus: $T = S^1 \times S^1$ ima $\Delta$-strukturu s jednim vrhom $v$, tri brida $a$, $b$ i $c$ i dva 2-simpleksa $A$ i $B$.



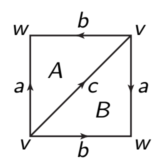

Kao i kod kružnice, $\partial_1 = 0$ pa je $H_0^\Delta(T) \cong \mathbb{Z}$.
Kako je $\partial_2(A) = a+b-c = \partial_2(B)$ i jer je $\{a, b, a+b-c\}$ baza grupe $\Delta_1(T)$, to je $H_1^\Delta(T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, i bazu čine klase $[a]$ i $[b]$.
Kako nema 3-simpleksa, to je $H_2^\Delta(T) = \operatorname{Ker} \partial_2 \cong \mathbb{Z}$, generirana s $[A-B]$, jer je $\partial(nA + mB) = (n+m)(a+b-c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n = -m$.
Dakle,

$$H_n^\Delta(T) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{za } n = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{za } n = 0, 2 \\ 0 & \text{za } n \geq 3 \end{cases}$$



## Homologija projektivne ravnine i $n$-sfere

Projektivna ravnina: $\mathbb{R}P^2$ ima $\Delta$-strukturu s dva vrha $v$ i $w$, tri brida $a$, $b$ i $c$ i dva 2-simpleksa $A$ i $B$.




$\operatorname{Im} \partial_1$ je generirana s $w - v$, pa je $H_0^\Delta(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}$ s jednim od vrhova kao generatorom.
Kako je $\partial_2(A) = -a + b + c$ a $\partial_2(B) = a - b + c$, to je $\partial_2$ injekcija pa je $H_2^\Delta(\mathbb{R}P^2) = 0$. Nadalje, $\operatorname{Ker} \partial_1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ generirana s $a - b$ i $c$, a $\operatorname{Im} \partial_2$ je podgrupa od $\operatorname{Ker} \partial_1$ reda 2, jer za bazu u $\operatorname{Ker} \partial_1$ možemo uzeti $c$ i $a-b+c$, a za bazu u $\operatorname{Im} \partial_2$ možemo uzeti $a-b+c$ i $2c = (a-b+c)+(-a+b+c) = \partial_2(B)+\partial_2(A)$, pa je $H_1^\Delta(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$.
Za $n \geq 3$ je $H_n^\Delta(\mathbb{R}P^2) = 0$ jer $\mathbb{R}P^2$ nema $n$-simpleksa za $n \geq 3$.

$n$-sfera: $S^n$ dobije $\Delta$-strukturu od dvije kopije $\Delta^n$ kojima su rubovi identificirani identitetom. Tada je $\operatorname{Ker} \partial_n \cong \mathbb{Z}$ generirana razlikom tih dvaju $n$-simpleksa, pa je $H_n^\Delta(S^n) \cong \mathbb{Z}$ generirana klasom te razlike.
$H_m^\Delta(S^n) = 0$ za $m > n$ (nema simpleksa), a nalaženje ostalih grupa je nešto teže (ali ćemo napraviti kasnije).



## itd., ali. . .

Na sličan način mogli bismo odrediti homološke grupe i za mnoge druge $\Delta$-komplekse, npr. za plohe, ali računi postaju sve složeniji kako se broj simpleksa povećava. Posebno u višim dimenzijama.
A odmah se postavljaju i sljedeća pitanja:

- Jesu li grupe $H_n^\Delta(X)$ neovisne o $\Delta$-strukturi, tj. ako su dva $\Delta$-kompleksa homeomorfna imaju li oni izomorfne homološke grupe?
- Općenitije, imaju li oni izomorfne homološke grupe i ako su samo homotopski ekvivalentni?

Za odgovor na ta pitanja i razvoj opće teorije, nejelegantnije je napustiti krute simplicijalne strukture i uvesti tzv. singularnu homologiju. Dodatna prednost je da su te grupe definirane za sve topološke prostore. Na kraju treba ipak dokazati da su za $\Delta$-komplekse obje teorije ekvivalentne.



## Simplicijalni kompleksi *vs.* $\Delta$-kompleksi

Tradicionalno se simplicijalna homologija definira za ***simplicijalne komplekse***. To su $\Delta$-kompleksi kod kojih je svaki simpleks jedinstveno određen svojim vrhovima. Stoga svaki $n$-simpleks ima točno $n+1$ *različitih* vrhova i nikoja dva simpleksa nemaju isti skup vrhova.

Ako se u simplicijalnom kompleksu odabere „pogodan" uređaj vrhova, npr. neki dobar uređaj, onda se na tom simplicijalnom kompleksu dobije i struktura $\Delta$-kompleksa.

Obratno, može se pokazati da se svaki $\Delta$-kompleks može subdividirati tako da se dobije simplicijalni kompleks, pa je svaki $\Delta$-kompleks homeomorfan nekom simplicijalnom kompleksu.

$\Delta$-kompleksi imaju tu prednost da su računi s njima jednostavniji. Npr. torus kao simplicijalni kompleks ima najmanje 14 trokutova, 21 brid i 7 vrhova, a za $\mathbb{R}P^2$ treba najmanje 10 trokuta, 15 bridova i 6 vrhova.

## Singularna homologija

***Singularni n-simpleks*** u prostoru $X$ je svako preslikavanje $\sigma\colon \Delta^n \to X$. Slobodnu abelovu grupu kojoj bazu čine svi singularni $n$-simpleksi, označavamo s $C_n(X)$. Njezini elementi, koje zovemo ***(singularnim) n-lancima***, su formalne konačne sume $\sum_i n_i\sigma_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $\sigma_i\colon \Delta^n \to X$.
Kao i prije, homomorfizam ruba $\partial_n\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ definiran je na bazi s $\partial_n(\sigma) := \sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]}$ (pritom je $[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]$ identificiran s $\Delta^{n-1}$ kanonskim linearnim homeomorfizmom koji čuva uređaj vrhova, t.d. na $\sigma|_{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]}$ možemo gledati kao na preslikavanje $\Delta^{n-1} \to X$).
Kao u lemi 18.1, pokazuje se da vrijedi $\partial_n \partial_{n+1} = 0$, ili kraće, $\partial^2 = 0$, pa definiramo ***singularne homološke grupe $H_n(X)$*** $:= \operatorname{Ker}\partial_n / \operatorname{Im}\partial_{n+1}$.
Iz definicije je evidentno da su singularne homološke grupe $H_n(X)$ topološke invarijante (za razliku od simplicijalne homologije $H_n^\Delta(X)$).
S druge strane, grupe $C_n(X)$ su tako velike, i za sve $n$ su netrivijalne, da čak nije niti jasno jesu li za konačne $\Delta$-komplekse grupe $H_n(X)$ konačno generirane.



## Singularni kompleks $S(X)$

Sljedeća konstrukcija pokazuje kako se singularna homologija, koja izgleda mnogo općenitija od simplicijalne homologije, može shvatiti i kao specijalan slučaj simplicijalne homologije.

Za proizvoljan prostor $X$ definira se ***singularni kompleks*** $S(X)$ kao $\Delta$-kompleks s po jednim $n$-simpleksom $\Delta^n_\sigma$ za svaki singularni $n$-simpleks $\sigma\colon \Delta^n \to X$, i to tako da je $\Delta^n_\sigma$ na prirodan (očit) način pričvršćen na $(n-1)$-simplekse od $S(X)$ koji su restrikcije od $\sigma$ na stranice od $\Delta^n$, tj. na $(n-1)$-simplekse od $\partial\Delta^n$.

Iz definicije je jasno da je $H_n^\Delta(S(X))$ isto što i $H_n(X)$, pa je singularna homologija od $X$ zapravo simplicijalna homologija singularnog kompleksa $S(X)$.

$S(X)$ je $\Delta$-kompleks model za $X$, i obično je enormno velik.

Pogledaj u [Hatcher] kako se, barem u malim dimenzijama, na singularne cikluse može gledati kao na preslikavanja orijentiranih mnogostrukosti u prostor $X$.



## Singularna homologija i povezanost putevima

**Propozicija 19.1**

*Neka je $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$ rastav prostora $X$ na komponente povezanosti putevima. Tada je $H_n(X) \cong \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$.*

Dokaz: Slike singularnih simpleksa su putevima povezane pa je $C_n(X) = \bigoplus C_n(X_\alpha)$. Homomorfizam ruba $\partial_n$ „poštuje” tu dekompoziciju u direktnu sumu, pa se to prenosi i na $\operatorname{Ker}\partial_n$ i $\operatorname{Im}\partial_{n+1}$, pa onda i na njihov kvocijent $H_n(X)$. □

**Propozicija 19.2**

*Za putevima povezan prostor $X$ je $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.*
*Općenito je, dakle, $H_0(X)$ direktna suma $\mathbb{Z}$-ova — po jedan za svaku komponentu povezanosti putevima.*



## $H_0$ „broji” komponente povezanosti putevima

Dokaz: Kako je $\partial_0 = 0$ to je $H_0(X) = C_0(X)/\operatorname{Im}\partial_1$. Neka je $\varepsilon\colon C_0(X) \to \mathbb{Z}$ homomorfizam definiran s $\varepsilon(\sum_i n_i\sigma_i) := \sum_i n_i$.
Ako je $X$ neprazan onda je $\varepsilon$ očito epimorfizam.
Tvrdnja: Ako je $X$ putevima povezan onda je $\operatorname{Ker}\varepsilon = \operatorname{Im}\partial_1$, pa $\varepsilon$ inducira izomorfizam $H_0(X) = C_0(X)/\operatorname{Ker}\varepsilon \cong \mathbb{Z}$ (1. tm. o izo$\varphi$).

*Dokaz tvrdnje:* Za svaki singularni 1-simpleks $\sigma\colon \Delta^1 \to X$ je $\varepsilon\partial_1(\sigma) = \varepsilon(\sigma|_{v_1} - \sigma|_{v_0}) = 1 - 1 = 0$, pa je $\operatorname{Im}\partial_1 \subseteq \operatorname{Ker}\varepsilon$.
Obratno, neka je $\varepsilon(\sum_i n_i\sigma_i) = 0$, tj. $\sum_i n_i = 0$.
Simpleksi $\sigma_i$ su singularni 0-simpleksi, dakle točke u $X$.
Odaberimo točku $x_0 \in X$ i neka je $\sigma_0$ singularni 0-simpleks sa slikom $x_0$.
Za proizvoljan singularni 0-simpleks $\sigma_i$ neka je $\tau_i\colon \Delta^1 = [v_0, v_1] \to X$ put od točke $x_0$ do $\sigma_i(v_0)$. Tada je $\partial\tau_i = \sigma_i - \sigma_0$, pa je

$$\partial(\textstyle\sum_i n_i\tau_i) = \sum_i n_i\sigma_i - (\sum_i n_i)\sigma_0 = \sum_i n_i\sigma_i.$$

To pokazuje da je $\sum_i n_i\sigma_i$ rub, tj. $\operatorname{Ker}\varepsilon \subseteq \operatorname{Im}\partial_1$. □

## Homologija točke

**Propozicija 19.3**

*Za jednotočkovni prostor $X = *$ je $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ a $H_n(X) = 0$ za $n > 0$.*

Dokaz: Kako je $X = *$ to za svaki $n$ postoji jedinstven singularan $n$-simpleks $\sigma_n \colon \Delta^n \to X$ — konstantno preslikavanje, i

$$\partial(\sigma_n) = \sum_i (-1)^i \sigma_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{za neparan } n \\ \sigma_{n-1} & \text{za paran } n \neq 0 \end{cases}.$$

Dakle, singularni lančani kompleks za $X = *$ izgleda ovako:

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

odakle jednostavno slijedi tvrdnja. □



## Reducirane homološke grupe

Često je praktičnije raditi s ponešto modificiranom homologijom za koju su homološke grupe točke trivijalne u *svim* dimenzijama, uključujući $n = 0$. To su ***reducirane homološke grupe $\tilde{H}_n(X)$*** definirane kao homološke grupe ***augmentiranog lančanog kompleksa***

$$\cdots \longrightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

gdje je $\varepsilon(\sum_i n_i \sigma_i) := \sum_i n_i$ ***homomorfizam augmentacije*** kao u dokazu propozicije 19.2.

Kako je $\varepsilon\,\partial_1 = 0$ to je $\varepsilon(\operatorname{Im}\partial_1) = 0$, pa $\varepsilon$ inducira homomorfizam $\tilde\varepsilon \colon H_0(X) \to \mathbb{Z}$ s jezgrom $\operatorname{Ker}\tilde\varepsilon = \operatorname{Ker}\varepsilon / \operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker}\varepsilon / \operatorname{Im}\partial_1 = \tilde{H}_0(X)$.

Stoga je $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.

Za $n > 0$ je očito $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & \operatorname{Im}\partial_1 \arrow[d, hook] & & 0 \\
\cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] & C_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[ur] & 0 \\
 & & H_0 \arrow[ur, "\tilde\varepsilon"'] \arrow[d] & & \\
 & \tilde{H}_0 \arrow[ur] & 0 & & \\
0 \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$



## Lančano preslikavanje inducirano neprekidnim preslikavanjem

Za preslikavanje $f \colon X \to Y$ definiraju se inducirani homomorfizmi $f_\# \colon C_n(X) \to C_n(Y)$ t.d. se stavi $f_\#(\sigma) := f\,\sigma \colon \Delta^n \to Y$ i proširi linearno na $C_n(X)$. Za $f_\#$ vrijedi $f_\#\partial = \partial f_\#$ jer je

$$f_\#\partial(\sigma) = f_\#\big(\textstyle\sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]}\big) = \sum_i (-1)^i f\sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]} = \partial f_\#(\sigma),$$

pa imamo komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_\#"] & C_n(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_\#"] & C_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_\#"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(Y) \arrow[r, "\partial"] & C_n(Y) \arrow[r, "\partial"] & C_{n-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

tj. homomorfizmi $f_\#$ definiraju ***lančano preslikavanje*** singularnih lančanih kompleksa od $X$ i $Y$.



## Inducirani homomorfizmi — funktorijalnost

Zbog $f_\#\partial = \partial f_\#$, tj. zbog komutativnosti dijagrama $(*)$, $f_\#$ preslikavaju cikluse u cikluse i rubove u rubove, pa $f_\#$ induciraju homomorfizme $f_* \colon H_n(X) \to H_n(Y)$. To su ***homomorfizmi inducirani neprekidnim preslikavanjem*** $f \colon X \to Y$.

Ujedno smo dokazali i sljedeću algebarsku tvrdnju:

**Propozicija 20.1**

*Lančano preslikavanje lančanih kompleksa inducira homomorfizme homoloških grupa tih kompleksa.* □

Iz definicije neposredno slijedi funktorijalnost:

- Za kompoziciju $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ vrijedi $(g\,f)_* = g_* f_*$.
- $(\mathbb{1}_X)_* = \mathbb{1}_{H_n(X)}$

odakle i formalno slijedi topološka invarijantnost singularne homologije.

## Homotopska invarijantnost homologije

Prvi važan teorem je

**Teorem 20.2**

*Ako su preslikavanja $f, g\colon X \to Y$ homotopna, onda su inducirani homomorfizmi jednaki, $f_* = g_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$, $n \in \mathbb{N}$.*

Zbog funktorijalnosti, odavde odmah slijedi

**Korolar 20.3**

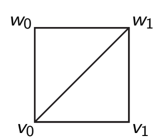
*Ako je $f\colon X \to Y$ homotopska ekvivalencija, onda su inducirani homomorfizmi $f_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$ izomorfizmi za sve $n \in \mathbb{N}$.* □

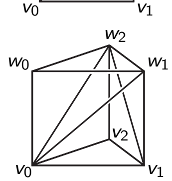
Ostaje dokazati teorem.



## Rastav prizme na simplekse

Dokaz teorema: Glavna stvar u dokazu je rastav produkta $\Delta^n \times I$ na $(n+1)$-simplekse. Označimo $\Delta \times \{0\} =: [v_0, \ldots, v_n]$ i $\Delta \times \{1\} =: [w_0, \ldots, w_n]$ kao na slici. Tada je $\Delta \times I$ unija $(n+1)$-simpleksa $[v_0, \ldots, v_i, w_i, \ldots, w_n]$ (za detalje vidi [Hatcher]).




Neka je $F\colon X \times I \to Y$ homotopija od $f$ do $g$. Definiramo ***operatore prizme*** $P\colon C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$ formulom $P(\sigma) := \sum_i (-1)^i F \circ (\sigma \times \mathbb{1}_I)|_{[v_0,\ldots,v_i,w_i,\ldots,w_n]}$.

Naprimjer, za $\sigma = [v_0, v_1, v_2]$ je

$$P(\sigma) = F(\sigma \times \mathbb{1})|_{[v_0,w_0,w_1,w_2]} - F(\sigma \times \mathbb{1})|_{[v_0,v_1,w_1,w_2]} + F(\sigma \times \mathbb{1})|_{[v_0,v_1,v_2,w_2]}$$



## Ključno svojstvo operatora prizme

Tvrdnja: $$\partial P = g_\# - f_\# - P\partial \qquad (*)$$

Računamo:

$$\partial P(\sigma) = \sum_{j \le i} (-1)^j (-1)^i F(\sigma \times \mathbb{1})|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_j,\ldots,v_i,w_i,\ldots,w_n]} + \sum_{j \ge i} (-1)^{j+1} (-1)^i F(\sigma \times \mathbb{1})|_{[v_0,\ldots,v_i,w_i\ldots,\hat{w}_j,\ldots,w_n]} .$$

Članovi za $i = j \neq 0$ iz prve sume skratit će se s članovima za $i = j \neq n$ iz druge sume (to su članovi u kojima nema ponavljanja indeksa), jer će u prvoj sumi biti ispušten $i$-ti vrh a u drugoj $(i+1)$-vi vrh.

Za $i = j = 0$ u prvoj sumi ostaje član $F(\sigma \times \mathbb{1})|_{[\hat{v}_0,w_0,\ldots,w_n]} = g\sigma = g_\#(\sigma)$, a za $i = j = n$ u drugoj ostaje $-F(\sigma \times \mathbb{1})|_{[v_0,\ldots,v_n,\hat{w}_n]} = -f\sigma = -f_\#(\sigma)$.

Članovi sa $i \neq j$ daju upravo $-P\partial(\sigma)$ jer je

$$P\partial(\sigma) = \sum_{i<j} (-1)^i (-1)^j F(\sigma \times \mathbb{1})|_{[v_0,\ldots,v_i,w_i\ldots,\hat{w}_j,\ldots,w_n]} + \sum_{i>j} (-1)^{i-1} (-1)^j F(\sigma \times \mathbb{1})|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_j,\ldots,v_i,w_i,\ldots,w_n]} . \checkmark$$



## Završetak dokaza

Za proizvoljan ciklus $\alpha \in \operatorname{Ker} \partial_n \subseteq C_n(X)$ je
$g_\#(\alpha) - f_\#(\alpha) = \partial P(\alpha) + P\partial(\alpha) = \partial P(\alpha)$ jer je $\partial\alpha = 0$.
Stoga je $g_\#(\alpha) - f_\#(\alpha)$ rub, pa su $g_\#(\alpha)$ i $f_\#(\alpha)$ homologni, tj. $g_*([\alpha]) = f_*([\alpha])$. □

Homomorfizmi $P$ lančanih kompleksa za koje je $\partial P + P\partial = g_\# - f_\#$ nazivaju se ***lančane homotopije***, pa završetak dokaza prethodnog teorema dokazuje i

**Propozicija 20.4**

*Lančano homotopna preslikavanja lančanih kompleksa induciraju na homologiji iste homomorfizme.* □

## Inducirani homomorfizmi u reduciranoj homologiji

Lako se vidi da je $\varepsilon f_\# = \varepsilon$, pa neprekidno preslikavanje $f\colon X \to Y$ inducira i lančano preslikavanje augmentiranih lančanih kompleksa

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \longrightarrow & C_2(X) & \xrightarrow{\partial} & C_1(X) & \xrightarrow{\partial} & C_0(X) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow f_\# & & \downarrow f_\# & & \downarrow f_\# & & \downarrow \mathbb{1} & \\ \cdots \longrightarrow & C_2(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_1(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_0(Y) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Ako su $g \simeq f\colon X \to Y$ homotopna preslikavanja, onda za singularni 0-simpleks $\sigma$ u $X$ vrijedi
$\partial P(\sigma) = F(\sigma\times\mathbb{1})|_{[\hat{v}_0, w_0]} - F(\sigma\times\mathbb{1})|_{[v_0, \hat{w}_0]} = g\sigma - f\sigma = g_\#(\sigma) - f_\#(\sigma)$,
tj. $\partial P = g_\# - f_\#$.
Ako lančanu homotopiju $P$ proširimo s $P = 0\colon \mathbb{Z} \to C_0(Y)$, dobit ćemo lančanu homotopiju augmentiranih lančanih kompleksa, što pokazuje da je i $g_* = f_*\colon \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_n(Y)$.



## Egzaktni nizovi

Za niz grupa i homomorfizama

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

kažemo da je ***egzaktan*** ako je $\operatorname{Im}\alpha_{n+1} = \operatorname{Ker}\alpha_n$ za sve $n$.
Inkluzija $\operatorname{Im}\alpha_{n+1} \subseteq \operatorname{Ker}\alpha_n$ znači da je $\alpha_n\alpha_{n+1} = 0$, tj. svaki egzaktan niz je lančani kompleks. S druge strane, $\operatorname{Ker}\alpha_n \subseteq \operatorname{Im}\alpha_{n+1}$ znači da su homološke grupe tog lančanog kompleksa trivijalne.
Dakle, na homološke grupe možemo gledati kao na *mjeru neegzaktnosti* lančanog kompleksa.

- $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B$ je egzaktan akko je $\operatorname{Ker}\alpha = 0$, tj. $\alpha$ je monomorfizam;
- $A \xrightarrow{\alpha} B \to 0$ je egzaktan akko je $\operatorname{Im}\alpha = B$, tj. $\alpha$ je epimorfizam;
- $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \to 0$ je egzaktan akko je $\alpha$ izomorfizam;
- $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ je egzaktan akko je $\alpha$ mono, $\beta$ epi i $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$. Tada $\beta$ inducira izomorfizam $C \cong B/\operatorname{Im}\alpha$, što, uz identifikaciju $A \equiv \operatorname{Im}\alpha$, pišemo $C \cong B/A$.
  Takav se niz naziva ***kratki egzaktni niz***.



## Kofibracije i homologija kvocijentnog prostora

Egzaktni nizovi su pravi jezik za izraziti vezu između homologije prostora, potprostora i njihova kvocijenta.

**Teorem 21.1**

*Neka je $X$ prostor a $A \subseteq X$ neprazan zatvoren potprostor koji je okolinski deformacijski retrakt od $X$. Tada postoji egzaktan niz*

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_0(X/A) \longrightarrow 0$$

*gdje je $i\colon A \hookrightarrow X$ inkluzija a $j\colon X \to X/A$ je kvocijentno preslikavanje.*

Homomorfizam $\partial$ ćemo konstruirati tijekom dokaza, koji je podugačak. Grubo rečeno, element od $\tilde{H}_n(X/A)$ može se reprezentirati lancem $\alpha$ u $X$ čiji je rub $\partial\alpha$ ciklus u $A$, pa je $\partial\alpha \in \tilde{H}_{n-1}(A)$ njegova homološka klasa.
Par $(X, A)$ gdje je $A$ zatvoren okolinski deformacijski retrakt od $X$, pa ima svojstvo proširenja homotopije, zvat ćemo ***dobar par*** ili ***kofibracija***.
CW-parovi jesu dobri parovi.



## Homološke grupe sfera

Prethodni ćemo teorem moći dokazati istom u § 23, nakon teorema o isijecanju, ali prije negoli ga počnemo dokazivati, evo dvije primjene:

**Korolar 21.2 (homološke grupe sfera)**

$$\tilde{H}_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{za } i = n \\ 0 & \text{za } i \neq n \end{cases}$$

Dokaz: Za $n > 0$ gledamo par $(D^n, S^{n-1})$, pa je $D^n/S^{n-1} \cong S^n$.
Kako je $D^n$ kontraktibilan, to je $\tilde{H}_i(D^n) = 0$ za sve $i$, pa iz egzaktnosti slijedi da su $\tilde{H}_i(S^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1})$ izomorfizmi.
Tvrdnja sada slijedi indukcijom počevši od $S^0$, za koju tvrdnja vrijedi zbog propozicija 19.1 i 19.3. □

Dakle, nereducirane homološke grupe sfera su

$$H_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{za } i = 0, n \\ 0 & \text{za } i \neq 0, n \end{cases} \quad \text{ako je } n \neq 0, \text{ a } H_i(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \text{za } i = 0 \\ 0 & \text{za } i \neq 0 \end{cases}.$$

## Brouwerov teorem o fiksnoj točki

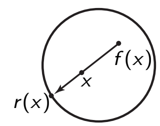
Sada kada znamo homološke grupe sfera, možemo dokazati Brouwerov teorem o fiksnoj točki, čiju smo verziju za $n = 2$, koristeći se fundamentalnom grupom, dokazali u § 8.

**Korolar 21.3 (Borsuk-Brouwer)**

*$S^{n-1} = \partial D^n$ nije retrakt od $D^n$.*
*Stoga svako neprekidno preslikavanje $f\colon D^n \to D^n$ ima fiksnu točku.*

Dokaz: Ako je $r\colon D^n \to \partial D^n$ retrakcija, onda je $r\,i = \mathbb{1}_{\partial D^n}$ gdje je $i\colon \partial D^n \hookrightarrow D^n$ inkluzija. Tada je kompozicija $\tilde{H}_{n-1}(\partial D^n) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(D^n) \xrightarrow{r_*} \tilde{H}_{n-1}(\partial D^n)$ identiteta grupe $\tilde{H}_{n-1}(\partial D^n) \cong \mathbb{Z}$, što ne može biti jer su $i_*$ i $r_*$ nul-homomorfizmi.

Tvrdnja o fiksnoj točki dokazuje se analogno dokazu teorema 8.3 za $n = 2$. □






## Relativne homološke grupe

Želimo definirati homološke grupe koje „ne uzimaju u obzir” lance u podskupu $A \subseteq X$. Definiramo $C_n(X,A) := C_n(X)/C_n(A)$.
To je grupa ***relativnih n-lanaca***.
Njezine ćemo elemente privremeno označivati $\langle\alpha\rangle$, $\alpha \in C_n(X)$.
Za homomorfizam ruba $\partial\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ vrijedi $\partial(C_n(A)) \subseteq C_{n-1}(A)$, pa on inducira ***homomorfizam ruba*** $\partial\colon C_n(X,A) \to C_{n-1}(X,A)$, i opet vrijedi $\partial^2 = 0$, tj. dobivamo lančani kompleks

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\partial} C_n(X,A) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X,A) \longrightarrow \cdots.$$

Homološke grupe tog lančanog kompleksa su ***relativne (singularne) homološke grupe*** para $(X,A)$, oznaka $\boldsymbol{H_n(X,A)}$.

- Elementi od $H_n(X,A)$ reprezentirani su ***relativnim ciklusima*** tj. $n$-lancima u $X$ kojima je rub $(n-1)$-lanac u $A$.
- Relativni ciklus $\langle\alpha\rangle \in \operatorname{Ker}\partial_n \subseteq C_n(X,A)$ je ***relativni rub*** ako je $\alpha = \partial\beta + \gamma$ za neki $\beta \in C_{n+1}(X)$ i neki $\gamma \in C_n(A)$.



## Još o relativnim lancima i ciklusima

Napomena: Kako se radi o slobodnim abelovim grupama, na $C_n(X,A) = C_n(X)/C_n(A)$ možemo gledati i kao na slobodnu abelovu grupu generiranu singularnim $n$-simpleksima u $X$ čije slike *nisu* sadržane u $A$. Mana ovakvog gledanja na relativne $n$-lance je da to nije kompatibilno s homomorfizmom ruba, tj. rub $n$-lanca u $X$ koji nije u $A$ može biti $(n-1)$-lanac u $A$. Zato je ipak bolje na $C_n(X,A)$ gledati kao na kvocijent $C_n(X)/C_n(A)$ nego kao na podgrupu od $C_n(X)$.

Sljedeći cilj je pokazati kako za par $(X,A)$ postoji dugi egzaktni niz

$$\cdots \to H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X,A) \to H_{n-1}(A) \to H_{n-1}(X) \to \cdots$$
$$\cdots \to H_0(X,A) \to 0.$$



## Kratki egzaktni niz lančanih kompleksa

To, međutim, spada u (uvod u) homološku algebru.
Naime, za svaki $n$ imamo komutativan dijagram

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{i} & C_n(X) & \xrightarrow{j} & C_n(X,A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \\
0 & \longrightarrow & C_{n-1}(A) & \xrightarrow{i} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{j} & C_{n-1}(X,A) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

gdje su $i$ inkluzije a $j$ kvocijentna preslikavanja, pa su reci kratki egzaktni nizovi. $i$ i $j$ induciraju na homologiji homomorfizme

$$H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A)$$

za koje vrijedi $j_* i_* = 0$, tj. $\operatorname{Im} i_* \subseteq \operatorname{Ker} j_*$. Dakle, treba konstruirati homomorfizam $H_n(X,A) \to H_{n-1}(A)$ i pokazati da je tako dobiven niz grupa i homomorfizama egzaktan.

Algebarski, situacija je sljedeća: imamo kratki egzaktni niz lančanih kompleksa kojemu treba pridružiti dugi egzaktni homološki niz:

## Vezni homomorfizam $\partial\colon H_n(\mathcal{C}) \to H_{n-1}(\mathcal{A})$

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_{n+1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_n \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_{n-1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-2} \arrow[r, "i"] & B_{n-2} & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

$b \overset{j}{\mapsto} [c] \mapsto 0$, $\quad b \mapsto \partial b$, $\quad [c] \mapsto 0$, $\quad [a] \overset{i}{\mapsto} \partial b \overset{j}{\mapsto} 0$, $\quad \partial b \mapsto 0$, $\quad [a] \mapsto \partial a \overset{i}{\mapsto} 0$

Neka je $c \in C_n$ ciklus. Kako je $j$ epi, $c = j(b)$ za neki $b \in B_n$. Jer je $j(\partial b) = \partial j(b) = \partial c = 0$, element $\partial b \in B_{n-1}$ leži u $\operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i$, pa, zbog injektivnosti od $i$, $\exists!\, a \in A_{n-1}$ t.d. je $\partial b = i(a)$. Zbog komutativnosti je $i(\partial a) = \partial i(a) = \partial(\partial b) = 0$, pa je $\partial a \in \operatorname{Ker} i = 0$ jer je $i$ mono, pa je $a \in A_{n-1}$ ciklus. Definiramo $\partial([c]) := [a] \in H_{n-1}(\mathcal{A})$.



## Homomorfizam $\partial$ je dobro definiran: neovisnost o izboru $b$

- Element $a$ jedinstveno je određen elementom $b$ jer je $i$ monomorfizam.
- Izbor elementa $b$: Neka je i $b' \in B_n$ t.d. je $j(b') = c$.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_n \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "i"] & B_{n-1} \arrow[r, "j"] & C_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

$\alpha \mapsto b' - b$, $\quad b', b \overset{j}{\mapsto} c$, $\quad a' = a + \partial\alpha \overset{i}{\mapsto} \partial b'$

Tada je $b' - b \in \operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i$, pa postoji $\alpha \in A_n$ t.d. je $b' - b = i(\alpha)$, tj. $b' = b + i(\alpha)$.
No tada je $a' := a + \partial\alpha \in A_{n-1}$ upravo jedinstven izbor za $b'$ jer je $i(a') = i(a+\partial\alpha) = i(a) + i(\partial\alpha) = \partial b + \partial i(\alpha) = \partial(b + i(\alpha)) = \partial b'$.
Dakle, $a$ i $a'$ su homologni, tj. $[a'] = [a] \in H_{n-1}(\mathcal{A})$. ✓



## Homomorfizam $\partial$ je dobro definiran: neovisnost o izboru $c$

Izbor elementa $c$: Neka je $c' = c + \partial\gamma$ za neki $\gamma \in C_{n+1}$.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_{n+1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_n \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "i"] & B_{n-1} \arrow[r, "j"] & C_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

$\beta \mapsto \gamma$, $\quad b + \partial\beta \overset{j}{\mapsto} c' = c + \partial\gamma$, $\quad b + \partial\beta \mapsto \partial b$, $\quad a \overset{i}{\mapsto} \partial b$

Tada postoji $\beta \in B_{n+1}$ t.d. je $\gamma = j(\beta)$, pa je $c' = c + \partial j(\beta) = c + j(\partial\beta) = j(b + \partial\beta)$, što ne utječe na izbor od $a$ jer je $\partial(b + \partial\beta) = \partial b$.

$\partial\colon H_n(\mathcal{C}) \to H_{n-1}(\mathcal{A})$ je homomorfizam: To slijedi neposredno iz definicije preslikavanja $\partial$, jer svi učinjeni izbori „poštuju" zbrajanja u odgovarajućim grupama. □



## Egzaktnost dugog homološkog niza

**Teorem 22.1**

*Dugi homološki niz*

$$\cdots \longrightarrow H_n(\mathcal{A}) \xrightarrow{i_*} H_n(\mathcal{B}) \xrightarrow{j_*} H_n(\mathcal{C}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(\mathcal{B}) \longrightarrow \cdots$$

*je egzaktan.*

(Pisanim slovima $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ označili smo lančane komplekse

$$\mathcal{A} \qquad \cdots \to A_{n+1} \xrightarrow{\partial} A_n \xrightarrow{\partial} A_{n-1} \to \cdots,$$

itd.)

Dokaz: Treba dokazati šest inkluzija:

- $\operatorname{Im} i_* \subseteq \operatorname{Ker} j_*$ i $\operatorname{Ker} j_* \subseteq \operatorname{Im} i_*$
- $\operatorname{Im} j_* \subseteq \operatorname{Ker} \partial$ i $\operatorname{Ker} \partial \subseteq \operatorname{Im} j_*$
- $\operatorname{Im} \partial \subseteq \operatorname{Ker} i_*$ i $\operatorname{Ker} i_* \subseteq \operatorname{Im} \partial$.

Prva slijedi iz činjenice da je $j\, i = 0$. Ostale dokažite za vježbu!
Metoda: „natjeravanje po dijagramu" (chasing the diagram).

## Dugi egzaktni homološki niz para $(X, A)$

Vratimo li se topologiji, prethodni teorem daje

**Korolar 22.2**

*Za svaki par $(X, A)$ topoloških prostora, sljedeći je niz egzaktan:*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow H_0(X, A) \longrightarrow 0.$$

Opis homomorfizma $\partial\colon H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$ je jednostavan: ako je $[\alpha] \in H_n(X, A)$ reprezentiran relativnim ciklusom $\langle\alpha\rangle$ onda je $\partial[\alpha]$ homološka klasa ciklusa $\partial\alpha$ u $H_{n-1}(A)$.

Dakle, relativne grupe $H_n(X, A)$ „mjere razliku" između homoloških grupa prostora $X$ i potprostora $A$.

Specijalno, ako su za sve $n$ grupe $H_n(X, A)$ trivijalne, onda inkluzija $A \hookrightarrow X$ inducira izomorfizme $H_n(X) \cong H_n(A)$ za sve $n$.

Lako se vidi da, zbog egzaktnosti, vrijedi i obratno.



## Dugi egzaktni niz za reduciranu homologiju

Analogan dugi egzaktni niz postoji i za reducirane homološke grupe para $(X, A)$. Treba samo primijeniti prethodnu mašineriju na kratki egzaktan niz augmentiranih lančanih kompleksa, gdje u dimenziji $-1$ treba uzeti kratki egzaktni niz $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbb{1}} \mathbb{Z} \to 0 \to 0$.
Specijalno, ako je $A \neq \emptyset$, onda je $\tilde{H}_n(X, A) = H_n(X, A)$ za sve $n$.

**Primjeri**

**1.** U dugom egzaktnom nizu za reduciranu homologiju para $(D^n, \partial D^n)$, sve su grupe $\tilde{H}_i(D^n)$ trivijalne, pa su $H_i(D^n, \partial D^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1})$ izomorfizmi za sve $i$.

**2.** Jer je $\tilde{H}_n(*) = 0$ za sve $n$, za točku $x_0 \in X$, iz dugog egzaktnog niza za reduciranu homologiju para $(X, x_0)$ (točnije, para $(X, \{x_0\})$), dobivamo izomorfizme $H_n(X, x_0) \cong \tilde{H}_n(X)$ za sve $n$.



## Inducirani homomorfizam relativnih grupa

Neprekidno preslikavanje parova $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ inducira homomorfizme $f_\#\colon C_n(X, A) \to C_n(Y, B)$, pa onda i homomorfizme $f_*\colon H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$.
Vrijedi također

**Propozicija 22.3**

*Ako su preslikavanja $f, g\colon (X, A) \to (Y, B)$ homotopna kao preslikavanja parova, onda je $f_* = g_*\colon H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$.*

Dokaz: Operator prizme $P$ iz dokaza teorema 20.2 preslikava $C_n(A)$ u $C_{n+1}(B)$, pa inducira relativni operator prizme $P\colon C_n(X, A) \to C_{n+1}(Y, B)$. Prelaskom na kvocijent, i dalje vrijedi $\partial P + P\partial = g_\# - f_\#$, pa su $f_\#$ i $g_\#$ lančano homotopna preslikavanja lančanih kompleksa relativnih singularnih lanaca, pa induciraju iste homomorfizme relativnih homoloških grupa. □



## Egzaktan homološki niz trojke

Neka je $(X, A, B)$ ***trojka*** topoloških prostora, tj. $B \subseteq A \subseteq X$. Tada postoji sljedeći dugi ***egzaktni homološki niz trojke:***

$$\cdots \longrightarrow H_n(A, B) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A, B) \longrightarrow \cdots$$

gdje su $i_*$ i $j_*$ inducirani odgovarajućim inkluzijama. To je dugi egzaktni niz dobiven iz kratkog egzaktnog niza lančanih kompleksa singularnih lanaca parova

$$0 \longrightarrow C_n(A, B) \longrightarrow C_n(X, B) \longrightarrow C_n(X, A) \longrightarrow 0.$$

Za $B = \{x_0\}$ egzaktan homološki niz trojke $(X, A, x_0)$ je zapravo egzaktan niz za reduciranu homologiju para $(X, A)$.

## Isijecanje

Jedno od fundamentalnih svojstava homologije para $(X, A)$, koje nema pravog analogona u homotopiji, je da se podskup koji se nalazi „dovoljno duboko” u $A$ može odstraniti bez utjecaja na homologiju.

**Teorem 23.1 (o isijecanju)**

*Neka su $Z \subseteq A \subseteq X$ potprostori t.d. je $\overline{Z} \subseteq \operatorname{Int} A$. Tada za sve $n \in \mathbb{N}$, inkluzija $(X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$ inducira izomorfizme*

$$H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A).$$

*Ekvivalentno, ako su $A, B \subseteq X$ potprostori t.d. je $X = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B$, onda inkluzija $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ inducira izomorfizme $H_n(B, A \cap B) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A)$ za sve $n$.*

Za „prijevod” jedne verzije teorema u drugu treba staviti $B := X \setminus Z$ odnosno $Z := X \setminus B$.



## Homologija sa „sitnim” lancima

Dokaz teorema o isijecanju je dugačak i sadrži tehniku baricentričkih subdivizija koja omogućuje određivanje homologije pomoću lanaca koji se sastoje od „malih” simpleksa.

Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ familija podskupova od $X$ čije nutrine pokrivaju $X$, i neka je $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ podgrupa od $C_n(X)$ koja se sastoji od lanaca $\sum_i n_i \sigma_i$ za koje su slike svakog od singularnih simpleksa $\sigma_i$ sadržane u nekom članu pokrivača $\mathcal{U}$. Jasno je da homomorfizam ruba $\partial \colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ preslikava $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ u $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$, pa grupe $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ čine lančani kompleks. Homološke grupe tog lančanog kompleksa označavat ćemo s $H_n^{\mathcal{U}}(X)$. Ključna je

**Propozicija 23.2**

*Inkluzija $\iota \colon C_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_n(X)$ je lančana homotopska ekvivalencija, tj. postoji lančano preslikavanje $\rho : C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$ t.d. su kompozicije $\iota\rho$ i $\rho\iota$ lančano homotopne identitetama. Stoga $\iota$ inducira izomorfizme $H_n^{\mathcal{U}}(X) \cong H_n(X)$ za sve $n$.*



## Dokaz nećemo raditi

Dokaz ove propozicije je dugačak, služi se tehnikom baricentričkih subdivizija, i nećemo ga raditi.

Ipak, trebat ćemo nešto iz dokaza:

U dokazu se konstruiraju lančano preslikavanje $\rho \colon C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$ i lančana homotopija $D \colon C_n(X) \to C_{n+1}(X)$ t.d. je $\rho\iota = \mathbb{1}$ i $\partial D + D\partial = \mathbb{1} - \iota\rho$. Osim toga, sva preslikavanja $\iota$, $\rho$ i $D$ preslikavaju lance koji leže u nekom $U_\alpha$ ponovno u lance u istom $U_\alpha$.



## Dokaz teorema o isijecanju

Pomoću prethodne propozicije dokazat ćemo teorem 23.1 o isijecanju. Neka je $X = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B$. Za pokrivač $\mathcal{U} := \{A, B\}$ rabit ćemo sugestivnu oznaku $C_n(A + B) := C_n^{\mathcal{U}}(X)$ jer se radi u sumama lanaca u $A$ i lanaca u $B$. Iz dokaza prethodne propozicije imamo lančano preslikavanje $\rho$ i lančanu homotopiju $D$ za koje vrijedi $\partial D + D\partial = \mathbb{1} - \iota\rho$ i $\rho\iota = \mathbb{1}$. Sva preslikavanja u tim formulama preslikavaju lance u $A$ ponovno u lance u $A$, pa kada podijelimo s lancima u $A$, induciraju preslikavanja na kvocijentima za koja također vrijede obje formule. Stoga inkluzija $C_n(A+B)/C_n(A) \hookrightarrow C_n(X)/C_n(A)$ inducira izomorfizam na homologiji. Preslikavanje $C_n(B)/C_n(A \cap B) \to C_n(A + B)/C_n(A)$ inducirano inkluzijom, očito je izomorfizam, jer su obje kvocijentne grupe slobodne abelove grupe generirane singularnim simpleksima u $B$ koji ne leže u $A$. Kompozicijom dobivamo željeni izomorfizam $H_n(B, A \cap B) \cong H_n(X, A)$ induciran inkluzijom. $\square$

## Homologija para i kvocijenta

Neka je $(X, A)$ dobar par, tj. $A$ je deformacijski retrakt neke okoline $V \subseteq X$.
Kako bismo dokazali teorem 21.1 da postoji dugi egzaktni niz

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

trebamo u dugom egzaktnom homološkom nizu para $(X, A)$, relativne grupe $H_n(X, A)$ zamijeniti reduciranim grupama $\tilde{H}_n(X/A)$ .
U tu svrhu dokažimo sljedeću propoziciju:

**Propozicija 23.3**

*Za dobar par $(X, A)$ kvocijentno preslikavanje $q\colon (X, A) \to (X/A, A/A)$ inducira izomorfizme $q_*\colon H_n(X, A) \to H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$ za sve $n$.*

Dokaz: Neka je $V \subseteq X$ okolina koja se deformacijski retraktira na $A$.
Imamo sljedeći komutativan dijagram:



## Dokaz propozicije

$$\begin{tikzcd}
H_n(X,A) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "q_*"] & H_n(X,V) \arrow[d, "q_*"] & H_n(X-A, V-A) \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[d, "q_*"] \\
H_n(X/A, A/A) \arrow[r, "\beta"] & H_n(X/A, V/A) & H_n(X/A - A/A, V/A - A/A) \arrow[l, "\epsilon"']
\end{tikzcd}$$

Deformacijska retrakcija od $V$ na $A$ daje homotopsku ekvivalenciju parova $(V, A) \simeq (A, A)$, pa je $H_n(V, A) \cong H_n(A, A) = 0$ za sve $n$.
Zbog toga iz egzaktnog homološkog niza trojke $(X, V, A)$ slijedi da je $\alpha$ izomorfizam.
Deformacijska retrakcija od $V$ na $A$ inducira deformacijsku retrakciju od $V/A$ na $A/A$, pa na isti način zaključujemo da je i $\beta$ izomorfizam.

$\varepsilon$ i $\epsilon$ su izomorfizmi isijecanja.

Desni $q_*$ je izomorfizam jer je induciran restrikcijom kvocijentnog preslikavanja $q$, a ono je na komplementu od $A$ homeomorfizam.

Da je i lijevi $q_*$ izomorfizam, slijedi sada iz komutativnosti dijagrama. □



## Homologija unije dvaju potkompleksa

Evo nekoliko posljedica teorema o isijecanju i prethodne propozicije:

**Korolar 23.4**

*Ako je CW kompleks $X$ unija dvaju potkompleksa $A$ i $B$, onda inkluzija $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ inducira izomorfizme $H_n(B, A \cap B) \to H_n(X, A)$.*

Dokaz: Kako su CW parovi dobri, možemo, prema prethodnoj propoziciji, prijeći na kvocijente $B/(A \cap B)$ i $X/A$, koji su, ako $A \cap B \neq \emptyset$, homeomorfni. □

**Korolar 23.5**

*Ako su parovi $(X_\alpha, x_\alpha)$ dobri, onda inkluzije $i_\alpha\colon X_\alpha \to \bigvee_\alpha X_\alpha$ induciraju izomorfizme $\bigoplus_\alpha i_{\alpha*}\colon \bigoplus_\alpha \tilde{H}_n(X_\alpha) \to \tilde{H}_n(\bigvee_\alpha X_\alpha)$ za sve $n$.*

Dokaz slijedi iz prethodne propozicije stavimo li $(X, A) = (\bigsqcup_\alpha X_\alpha, \bigsqcup_\alpha \{x_\alpha\})$ i činjenice da je $\tilde{H}_n(X) \cong H_n(X, \{x\})$. □



## Brouwerov teorem o invarijantnosti dimenzije

Sada možemo dokazati i klasični ***teorem o invarijantnosti dimenzije*** koji kaže da za $m \neq n$ prostori $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$ nisu homeomorfni.

**Teorem 23.6 (Brouwer, ∼ 1910.)**

*Ako su neprazni otvoreni skupovi $U \subseteq \mathbb{R}^m$ i $V \subseteq \mathbb{R}^n$ homeomorfni, onda je $m = n$.*

Dokaz: Zbog isijecanja, za $x \in U$ je $H_k(U, U \setminus \{x\}) \cong H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\})$ (uz $Z := \mathbb{R}^m \setminus U$). Iz dugog egzaktnog niza para $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\})$ dobivamo $H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \cong \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{x\})$. Kako se $\mathbb{R}^m \setminus \{x\}$ deformacijski retraktira na $S^{m-1}$, zaključujemo da je $H_k(U, U \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ za $k = m$ a 0 inače. Na isti način zaključujemo da je $H_k(V, V \setminus \{y\}) \cong \mathbb{Z}$ za $k = n$ a 0 inače.

Kako homeomorfizam $h\colon U \xrightarrow{\cong} V$ inducira izomorfizme $H_k(U, U \setminus \{x\}) \xrightarrow{\cong} H_k(V, V \setminus \{h(x)\})$ za sve $k$, mora biti $m = n$. □

## Prirodnost

Dugi egzaktni nizovi koje smo konstruirali imaju još jedno važno svojstvo koje često biva ključno u mnogim razmatranjima.
To je ***prirodnost***. Naprimjer, reći da je dugi egzaktni homološki niz para *prirodan*, znači da za svako neprekidno preslikavanje $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots \longrightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X,A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) & \longrightarrow \cdots \\
& \big\downarrow f_* & & \big\downarrow f_* & & \big\downarrow f_* & & \big\downarrow f_* & \\
\cdots \longrightarrow & H_n(B) & \xrightarrow{i_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_n(Y,B) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(B) & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

I ostali dugi egzaktni nizovi koje smo imali (za kvocijent, za reduciranu homologiju i za homologiju trojke) bili su prirodni.

Sve to slijedi iz opće algebarske činjenice da je dugi homološki niz pridružen kratkom egzaktnom nizu lančanih kompleksa, prirodan.



## Ekvivalencija simplicijalne i singularne homologije

Kao za singularnu, tako i za simplicijalnu homologiju postoji relativna verzija. Neka je $X$ $\Delta$-kompleks a $A \subseteq X$ potkompleks, tj. $A$ je $\Delta$-kompleks koji je unija nekih simpleksa od $X$. Relativne grupe $H_n^\Delta(X,A)$ definiraju se na isti način kao i singularne grupe, polazeći od relativnih lanaca $\Delta_n(X,A) := \Delta_n(X)/\Delta_n(A)$.
Istom algebarskom argumentacijom dobiva se dugi egzaktni niz za simplicijalnu homologiju.

Postoji kanonski homomorfizam $H_n^\Delta(X,A) \to H_n(X,A)$ induciran lančanim preslikavanjem $\Delta_n(X,A) \to C_n(X,A)$, koje svakom $n$-simpleksu od $X$ pridružuje njegovo karakteristično preslikavanje $\sigma\colon \Delta^n \to X$. U slučaju $A = \emptyset$ relativni se slučaj svodi na apsolutni.

**Teorem 25.1**

*Homomorfizmi $H_n^\Delta(X,A) \to H_n(X,A)$ su izomorfizmi za sve $n$ i sve $\Delta$-kompleks parove $(X,A)$.*