

2 FUNDAMENTALNA GRUPA

- Motivacija
- Putevi i homotopije
- Fundamentalna grupa kružnice
- Inducirani homomorfizmi

Ulančane kružnice

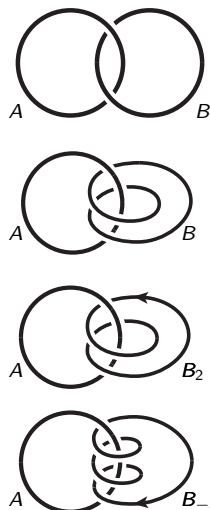
„Znamo” da kružnice A i B na slici ne možemo rastaviti nikakvim stezanjem/rastezanjem, guranjem/povlačenjem i sl. Fundamentalna grupa će omogućiti strog dokaz te činjenice.

No kružnica B može i više puta obilaziti A , a i orijentacija može biti važna.

Dogovorimo se da je broj obilazaka B oko A *pozitivan* ako B prolazi „odostrag prema napred” kroz A , negativan ako je obratno, i da je taj broj jednak nuli ako A i B nisu ulančane.

Dakle, svakoj orijentiranoj kružnici B pridružen je neki cijeli broj, i obratno za svaki $n \in \mathbb{Z}$ imamo kružnicu B_n koja n puta obilazi A .

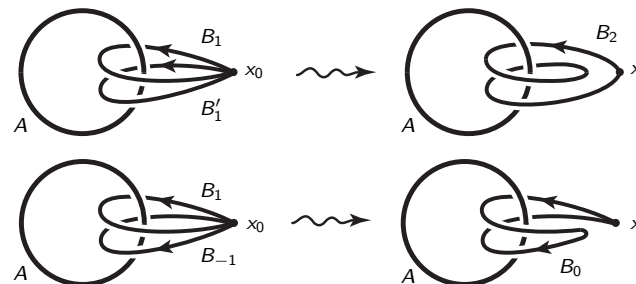
Ali, htjeli bismo više, jer cijeli brojevi nisu samo skup — oni se mogu zbrajati, čine grupu.



„Zbrajanje” petlji

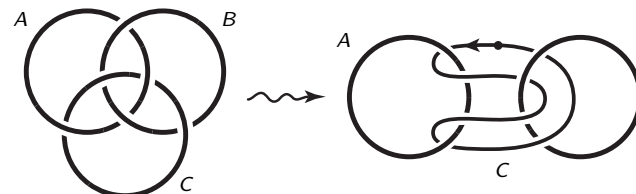
Na orijentiranu kružnicu možemo gledati kao na petlju — put s istim početkom i završetkom, a petlje iz iste točke x_0 možemo „zbrajati” nadovezivanjem.

Npr. ako su B_1 i B'_1 dvije petlje koje jednom obilaze A , njihov zbroj $B_1 + B'_1$ obilazi A dva puta, kao i petlja B_2 na koju se $B_1 + B'_1$ može deformirati. Slično se petlja $B_1 + B_{-1}$ deformira u petlju B_0 koja uopće ne obilazi A (nije „zapatljana” s A).



Borromeovi² prsteni

Pogledajmo jedan kompliciraniji primjer s 3 isprepletene kružnice:

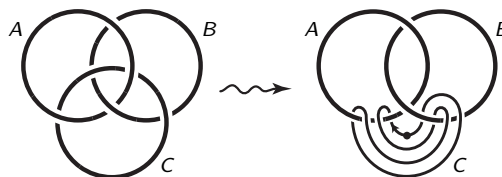
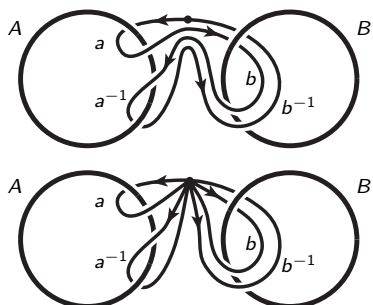


Kao i ranije, na jednu od kružnica, C , gledamo kao na petlju u komplementu ostale dvije. Možemo li ju „otpetljati”? Najprije „odvučemo” A od B . Krenemo li duž C od istaknute točke u označenom smjeru prolazimo „napred” kroz A , „napred” kroz B , „natrag” kroz A , „natrag” kroz B . Mjerimo li obilazak oko kružnica A i B s dva cijela broja, za svaku od njih ti su brojevi jednaki 0, što reflektira činjenicu da C nije zapetljana niti s A niti s B zasebno.

²Vitaliano Borromeo (1620–1690), talijanski arhitekt

Nekomutativnost

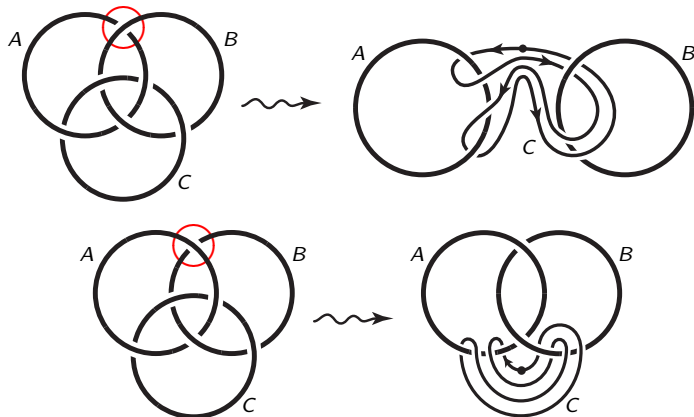
Označimo svaki prolaz petlje C kroz A i B slovima a i b ako je „napred”, odnosno a^{-1} i b^{-1} ako je „natrag”. C možemo deformirati u sumu (produkt) $aba^{-1}b^{-1}$ od 4 petlje, tj. komutator od a i b , i činjenica da se C ne da „raspetljati” od $A \cup B$ znači da taj komutator nije trivijalan, tj. dobivena grupa nije komutativna (i obratno).



Ovo je jedna varijanta Booromeovih prstenova. I tu je C komutator „prolaza” petlji a i b kroz A i B , ali je sada taj komutator trivijalan.

Usporedba

Usporedimo ove dvije varijante Booromeovih prstenova:



U čemu je razlika? Samo u jednom podvožnjaku/nadvožnjaku.

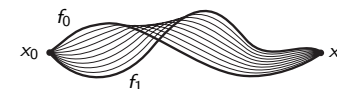
Putevi i homotopije

Put u prostoru X je preslikavanje $f: I \rightarrow X, I = [0, 1]$.

Homotopija puteva je familija preslikavanja $f_t: I \rightarrow X, 0 \leq t \leq 1$ t.d. je

(1) $f_t(0) = x_0, f_t(1) = x_1$ za sve t , i

(2) Pridruženo preslikavanje $F: I \times I \rightarrow X$ definirano s $F(s, t) = f_t(s)$ je neprekidno.



Kažemo da su putevi f_0 i f_1 **homotopni** i pišemo $f_0 \simeq f_1$,

ili $f_0 \stackrel{f_t}{\simeq} f_1$ ako želimo naznačiti i sâmu homotopiju.

U \mathbb{R}^n svaka su dva puta sa zajedničkim krajevima homotopna

linearnom homotopijom $f_t(s) = (1-t)f_0(s) + tf_1(s)$.

To isto vrijedi i u svakom konveksnom potprostoru od \mathbb{R}^n .

Put f za koji je $f(0) = f(1) = x_0$ naziva se **petlja** u x_0 .

Svaka je petlja u (konveksnom potprostoru od) \mathbb{R}^n **nul-homotopna**, tj. homotopna konstantnoj petlji.

Homotopske klase

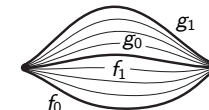
Propozicija 7.1

Homotopnost puteva sa zajedničkim krajevima je relacija ekvivalencije.

Klasu ekvivalencije puta f nazivamo njegovom **homotopskom klasom** i označavamo $[f]$.

Dokaz: *Tranzitivnost:* Ako je $f_0 \stackrel{f_t}{\simeq} f_1$ i $f_1 = g_0 \stackrel{g_t}{\simeq} g_1$,

onda je $f_0 \stackrel{h_t}{\simeq} g_1$, gdje je $h_t := \begin{cases} f_{2t} & , 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_{2t-1} & , \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$.



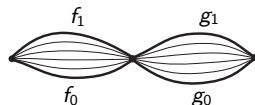
Refleksivnost i simetrija su očite. □

Produkt puteva

Za puteve $f, g: I \rightarrow X$ za koje je $f(1) = g(0)$ definira se

$$\text{produktni put } f \cdot g \text{ formulom } (f \cdot g)(s) := \begin{cases} f(2s) & , 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(2s - 1) & , \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Produkt puteva „dobro se ponaša” prema homotopijama, tj. ako su $f_0 \stackrel{f_t}{\simeq} f_1$ i $g_0 \stackrel{g_t}{\simeq} g_1$ i $f_0(1) = g_0(0)$ t.d. je produkt $f_0 \cdot g_0$ definiran, onda $f_t \cdot g_t$ definira homotopiju $f_0 \cdot g_0 \simeq f_1 \cdot g_1$.



Fundamentalna grupa

Neka je X prostor, $x_0 \in X$ fiksirana **bazna točka**, i promatrajmo samo puteve u X koji počinju i završavaju u x_0 , dakle petlje u x_0 . Označimo s $\pi_1(X, x_0)$ skup svih homotopskih klasa $[f]$ petlji u x_0 .

Propozicija 7.2

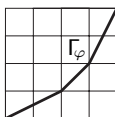
$\pi_1(X, x_0)$ je grupa s obzirom na množenje $[f][g] := [f \cdot g]$.

To je **fundamentalna grupa** prostora X u baznoj točki x_0 .

Dokaz: **Reparametrizacija** puta f je kompozicija $f \circ \varphi$ gdje je $\varphi: I \rightarrow I$ bilo koje preslikavanje t.d. je $\varphi(0) = 0$ i $\varphi(1) = 1$.

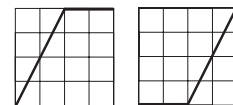
Očito je uvijek $f \circ \varphi \stackrel{f \circ \varphi_t}{\simeq} f$, gdje je $\varphi_t(s) = (1-t)\varphi(s) + ts$.

Asocijativnost: Neka su $f, g, h: I \rightarrow X$ putevi t.d. je $f(1) = g(0)$ i $g(1) = h(0)$ pa su definirani produkti $(f \cdot g) \cdot h$ i $f \cdot (g \cdot h)$. Tada je put $f \cdot (g \cdot h)$ reparametrizacija puta $(f \cdot g) \cdot h$ pomoću po dijelovima linearne funkcije φ kao na slici.



$\pi_1(X, x_0)$ je grupa

Neutralni element: Neka je $f: I \rightarrow X$ put od x_0 do x_1 a $c_{x_1}: I \rightarrow X$ neka je konstantan put u x_1 . Tada je $f \cdot c_{x_1}$ reparametrizacija puta f funkcijom čiji je graf na prvoj slici. Slično, put $c_{x_0} \cdot f$, gdje je c_{x_0} konstantan put u x_0 , je reparametrizacija puta f funkcijom čiji je graf na drugoj slici. Dakle, $[c_{x_0}]$ je neutralni element u $\pi_1(X, x_0)$.



Inverz: Za put f od x_0 do x_1 **inverzni put** \bar{f} je put od x_1 do x_0 definiran kao $\bar{f}(s) := f(1-s)$.

Neka je $i: I \rightarrow I$ identiteta, dakle put u I od 0 do 1, a $c_0: I \rightarrow I$ neka je konstantan put u 0. Tada je $i \cdot \bar{i} \simeq c_0$ jer je I konveksan, pa je

$$f \cdot \bar{f} = (f \circ i) \cdot (f \circ \bar{i}) = f \circ (i \cdot \bar{i}) \simeq f \circ c_0 = c_{x_0}.$$

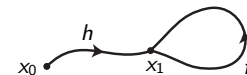
Slično se vidi da je $\bar{f} \cdot f \simeq c_{x_1}$, pa je, kada se radi o petljama, $[\bar{f}] = [f]^{-1}$. \square

Primjer: Za svaki konveksan $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i svaku točku $x_0 \in X$ je $\pi_1(X, x_0) = 0$.

Ovisnost o baznoj točki

Ovisi li fundamentalna grupa o izboru bazne točke? Očito da. Jasno je da se možemo nadati nekoj vezi između $\pi_1(X, x_0)$ i $\pi_1(X, x_1)$ jedino ako x_0 i x_1 leže u istoj komponenti povezanosti putevima.

Za put $h: I \rightarrow X$ od x_0 do x_1 i petlju f u x_1 definirajmo $\beta_h([f]) := [h \cdot f \cdot \bar{h}]$.



Propozicija 7.3

$\beta_h: \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ je izomorfizam grupa.

Dokaz: Ako je f_t homotopija petlji u x_1 onda je $h \cdot f_t \cdot \bar{h}$ homotopija petlji u x_0 pa je β_h dobro definirano.

Nadalje, $\beta_h([f \cdot g]) = [h \cdot f \cdot g \cdot \bar{h}] = [h \cdot f \cdot \bar{h} \cdot h \cdot g \cdot \bar{h}] = \beta_h([f]) \beta_h([g])$, pa je β_h homomorfizam.

Konačno, $\beta_h \beta_{\bar{h}}([f]) = \beta_h([\bar{h} \cdot f \cdot h]) = [h \cdot \bar{h} \cdot f \cdot h \cdot \bar{h}] = [f]$, i slično je $\beta_{\bar{h}} \beta_h([f]) = [f]$, pa je β_h izomorfizam s inverzom $\beta_{\bar{h}}$. \square

Jednostavno povezani prostori

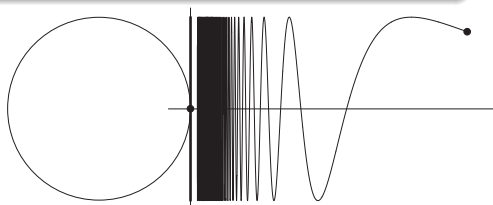
Dakle, ako je prostor X putevima povezan onda je grupa $\pi_1(X, x_0)$, do na izomorfizam, neovisna o baznoj točki x_0 , pa se često označava jednostavno $\pi_1(X)$ ili samo $\pi_1 X$.

Za prostor X kažemo da je **jednostavno povezan** ili **1-povezan** ako je putevima povezan i $\pi_1(X) = 0$. Očito vrijedi

Propozicija 7.4

X je jednostavno povezan akko za svake dvije točke postoji jedinstvena homotopska klasa puteva koji povezuju te točke. \square

Primjer povezanog (ne putevima povezanog) prostora kod kojeg fundamentalna grupa ovisi o baznoj točki



Fundamentalna grupa kružnice

Označimo s $\omega_n: I \rightarrow S^1$ petlju $s \mapsto (\cos 2\pi ns, \sin 2\pi ns)$ u točki $(1, 0) \in S^1$, i neka je $\Phi: \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(S^1)$ definirano s $\Phi(n) := [\omega_n]$.

Teorem 8.1

Preslikavanje $\Phi: \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(S^1)$ je izomorfizam grupa.

Dokaz: Označimo s $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ preslikavanje $s \mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$.

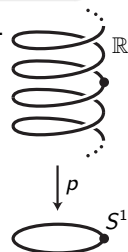
Tada je $\omega_n = p \tilde{\omega}_n$ gdje je $\tilde{\omega}_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ definirano s $\tilde{\omega}_n(s) := ns$. Kaže se da je put $\tilde{\omega}_n$ **podizanje** petlje ω_n . Zbog konveksnosti segmenta $[0, n] \subseteq \mathbb{R}$ je $\Phi(n) = [p \circ \tilde{f}]$ za bilo koji put \tilde{f} u \mathbb{R} od 0 do n , jer je $\tilde{f} \simeq \tilde{\omega}_n$ za svaki takav put.

Neka je $\tau_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ translacija $\tau_m(x) := x + m$.

Tada je $\tilde{\omega}_m \bullet (\tau_m \circ \tilde{\omega}_n)$ put u \mathbb{R} od 0 do $m + n$, pa je

$$\begin{aligned} \Phi(m+n) &= [p \circ (\tilde{\omega}_m \bullet (\tau_m \circ \tilde{\omega}_n))] = [(p \circ \tilde{\omega}_m) \bullet (p \circ \tau_m \circ \tilde{\omega}_n)] \\ &= [(p \circ \tilde{\omega}_m) \bullet (p \circ \tilde{\omega}_n)] = \Phi(m) \Phi(n). \end{aligned}$$

tj. Φ je homomorfizam. \checkmark



Φ je izomorfizam

Kako bismo dokazali da je Φ izomorfizam, dokazat ćemo:

- (a) Za svaki put $f: I \rightarrow S^1$ iz točke $x_0 \in S^1$ i svaku točku $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, postoji jedinstveno podizanje $\tilde{f}: I \rightarrow \mathbb{R}$ s početkom u \tilde{x}_0 .
- (b) Za svaku homotopiju $f_t: [0, 1] \rightarrow S^1$ puteva s početkom u x_0 i svaku točku $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, postoji jedinstvena homotopija puteva $\tilde{f}_t: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ s početkom u \tilde{x}_0 koja podiže f_t .

Pokažimo najprije kako iz ovih dviju tvrdnji slijedi teorem:

Surjektivnost: Za $[f] \in \pi_1(S^1) = \pi_1(S^1, (1, 0))$ neka je $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ podizanje s početkom u $0 \in \mathbb{R}$.

Tada je $\tilde{f}(1) = n \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ za neki n , i $\Phi(n) = [p \circ \tilde{f}] = [f]$. \checkmark

Injektivnost: Neka je $\Phi(m) = \Phi(n)$, tj. $f_0 := \omega_m \simeq \omega_n := f_1$. Neka je \tilde{f} podizanje te homotopije s početkom u $0 \in \mathbb{R}$. Zbog jedinstvenosti podizanja je $\tilde{f}_0 = \tilde{\omega}_m$ i $\tilde{f}_1 = \tilde{\omega}_n$. Jer je \tilde{f}_t homotopija puteva, krajevi miruju, pa je $m = \tilde{\omega}_m(1) = \tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1) = \tilde{\omega}_n(1) = n$. \checkmark

Dokaz tvrdnji (a) i (b)

Obje ćemo tvrdnje dobiti kao posljedicu sljedeće tvrdnje:

- (c) Za svaku homotopiju $F: Y \times I \rightarrow S^1$ i podizanje $Y \times \{0\} \xrightarrow{\tilde{F}_0} \mathbb{R}$, $\tilde{F}_0: Y \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ restrikcije $F_0 = F|_{Y \times \{0\}}$, postoji jedinstveno podizanje $\tilde{F}: Y \times I \rightarrow \mathbb{R}$ od F čija je restrikcija na $Y \times \{0\}$ zadano preslikavanje \tilde{F}_0 , $Y \times I \xrightarrow{F} S^1$ tj. $\tilde{F}_0 = \tilde{F}|_{Y \times \{0\}}$.

Odavde slijedi tvrdnja (a) za $Y = *$, a tvrdnja (b) dobije se ovako: Neka je $Y = [0, 1]$. Homotopiji f_t u (b) pridruženo je preslikavanje $F: [0, 1] \times I \rightarrow S^1$ definirano s $F(s, t) := f_t(s)$.

Jedinstveno podizanje $\tilde{F}_0: [0, 1] \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dobije se primjenom (a). Tada (c) daje jedinstveno podizanje $\tilde{F}: [0, 1] \times I \rightarrow \mathbb{R}$.

Restrikcije $\tilde{F}|_{\{0\} \times I}$ i $\tilde{F}|_{\{1\} \times I}$ su podizanja konstantnih puteva u S^1 , pa su to, zbog jedinstvenosti u (a), konstantni putevi u \mathbb{R} .

Znači, $\tilde{f}_t(s) := \tilde{F}(s, t)$ je homotopija puteva, i \tilde{f}_t je podizanje od f_t jer je $p \circ \tilde{F} = F$. \checkmark

Dokaz tvrdnje (c)

Za dokaz (c) rabit ćemo sljedeće svojstvo projekcije $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$:

Postoji otvoren pokrivač $\{U_\alpha\}$ od S^1 t.d. se za svaki α , skup $p^{-1}(U_\alpha)$ sastoji od disjunktne unije otvorenih podskupova u \mathbb{R} t.d. je restrikcija od p na svakog od njih, homeomorfizam na U_α . (*)

Najprije ćemo za proizvoljnu točku $y \in Y$ konstruirati podizanje $\tilde{F}_y: N_y \times I \rightarrow \mathbb{R}$ za neku okolinu $N_y \ni y$. Za svaki t , točka $(y, t) \in Y \times I$ ima produktnu okolinu $N_t \times \langle a_t, b_t \rangle$ t.d. je $F(N_t \times \langle a_t, b_t \rangle) \subseteq U_\alpha$ za neki α . Zbog kompaktnosti, konačno mnogo takvih okolina pokriva $\{y\} \times I$. Stoga postoji okolina $N \ni y$ i $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ t.d. je za svaki i , $F(N \times [t_i, t_{i+1}])$ sadržan u nekom U_α , kojeg ćemo označiti U_i .

Nastavak dokaza tvrdnje (c)

Pretpostavimo induktivno da smo već konstruirali \tilde{F} na $N \times [0, t_i]$. Kako je $F(N \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$, prema (*) postoji otvoren skup $\tilde{U}_i \subseteq \mathbb{R}$ kojeg p homeomorfno preslikava na U_i , t.d. je $\tilde{F}(y, t_i) \in \tilde{U}_i$. Možemo postići da je $\tilde{F}(N \times \{t_i\}) \subseteq \tilde{U}_i$, jer ako nije onda zamijenimo $N \times \{t_i\}$ s presjekom $(N \times \{t_i\}) \cap \tilde{F}^{-1}(\tilde{U}_i)$ t.j. smanjimo N tako da bude $\tilde{F}(N \times \{t_i\}) \subseteq \tilde{U}_i$.

Sada možemo definirati \tilde{F} i na $N \times [t_i, t_{i+1}]$ kao kompoziciju preslikavanja F i homeomorfizma $(p|_{\tilde{U}_i})^{-1}: U_i \rightarrow \tilde{U}_i$.

Nakon konačno mnogo koraka dobivamo podizanje $\tilde{F}_y: N_y \times I \rightarrow \mathbb{R}$ za neku okolinu $N_y \ni y$. ✓

Jedinstvenost podizanja u slučaju $Y = *$

Dokažimo sada jedinstvenost podizanja u specijalnom slučaju kada je Y samo jedna točka. U tom slučaju ne trebamo Y niti pisati, pa pretpostavimo da su $\tilde{F}, \tilde{F}': I \rightarrow \mathbb{R}$ dva podizanja preslikavanja $F: I \rightarrow S^1$ t.d. je $\tilde{F}(0) = \tilde{F}'(0)$. Kao ranije, odaberimo $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ t.d. je za sve i , $F([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$. Pretpostavimo induktivno da je $\tilde{F} = \tilde{F}'$ na $[0, t_i]$.

Zbog povezanosti, cijeli skup $\tilde{F}([t_i, t_{i+1}])$ mora ležati u jednom od disjunktih otvorenih skupova \tilde{U}_i koji se homeomorfno projiciraju na U_i . Zbog istog razloga i jer je $\tilde{F}'(t_i) = \tilde{F}(t_i)$, mora biti i $\tilde{F}'([t_i, t_{i+1}]) \subseteq \tilde{U}_i$. Kako je $p|_{\tilde{U}_i}$ injekcija i $p \circ \tilde{F}' = p \circ \tilde{F}$, mora biti $\tilde{F}' = \tilde{F}$ na $[t_i, t_{i+1}]$, odakle indukcijom slijedi tražena jedinstvenost. ✓

Kraj dokaza tvrdnje (c) i teorema 8.1

Dakle, oko svake točke $y \in Y$ postoji okolina N_y i podizanje $\tilde{F}_y: N_y \times I \rightarrow \mathbb{R}$, i zbog dokazane jedinstvenosti, ta se podizanja podudaraju na $\{y\} \times I$ kad god je $y \in N_{y'} \cap N_{y''}$. Tako dobivamo dobro definirano jedinstveno podizanje \tilde{F} na cijelom $Y \times I$.

Podizanje \tilde{F} je neprekidno jer je neprekidno na svakom $N_y \times I$, a skupovi $N_y \times I$ su otvoreni i pokrivaju $Y \times I$. □

Napomena: Preslikavanje $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ definirano s $p(s) := (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$ iz dokaza teorema 8.1 obično se naziva **eksponencijalno preslikavanje**. Naime, ako na S^1 gledamo kao na jediničnu kružnicu u kompleksnoj ravnini, onda je $p(s) = e^{2\pi i s}$.

Primjena: osnovni teorem algebre

Teorem 8.2 (Osnovni teorem algebre)

Svaki nekonstantni polinom s kompleksnim koeficijentima ima nultočku u \mathbb{C} .

Dokaz: Pretpostavimo da $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ nema nultočke u \mathbb{C} .

Tada je za svaki $r \geq 0$ formulom $f_r^{(p)}(s) := \frac{p(re^{2\pi i s})/p(r)}{|p(re^{2\pi i s})/p(r)|}$, $s \in [0, 1]$,

definirana petlja u S^1 bazirana u 1. Variranjem r unutar $[0, r]$

vidimo da su sve te petlje homotopne petlji $f_0^{(p)}$, koja je

konstantna petlja u 1, pa je $[f_r^{(p)}] = 0 \in \pi_1(S^1)$ za sve r .

Neka je $r > \max\{1, |a_1| + \dots + |a_n|\}$. Tada za $|z| = r$ vrijedi

$|z^n| = r^n = r \cdot r^{n-1} > (|a_1| + \dots + |a_n|) |z^{n-1}| \geq |a_1 z^{n-1} + \dots + a_n|$.

Zbog $|z^n| > |a_1 z^{n-1} + \dots + a_n|$, $p_t(z) := z^n + t(a_1 z^{n-1} + \dots + a_n)$ nema

za $t \in [0, 1]$ nultočaka na kružnici $|z| = r$. Familija $f_r^{(p_t)}$ je homotopija

od petlje $f_r^{(p_0)}(s) = e^{2\pi i n s} = \omega_n(s)$ do $f_r^{(p)}$, pa je $[\omega_n] = [f_r^{(p)}] = 0$,

tj. $n = 0$. □

Primjena: Brouwerov teorem o fiksnoj točki u dimenziji 2

Teorem 8.3 (Brouwer ~ 1910.)

Svako neprekidno preslikavanje $h: D^2 \rightarrow D^2$ ima fiksnu točku.

Dokaz: Pretpostavimo da je $h(x) \neq x$ za sve $x \in D^2$.

Neka je $r(x)$ presjek sa $S^1 = \partial D^2$, zrake iz $h(x)$ kroz x . Time je definirana retrakcija $r: D^2 \rightarrow S^1$.

Pokažimo da takva retrakcija ne može postojati:

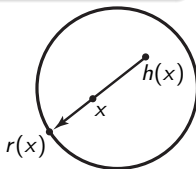
Neka je f_0 bilo koja petlja u S^1 bazirana u $x_0 \in S^1$.

U D^2 postoji homotopija petlje f_0 do konstantne petlje u x_0 , pa će

kompozicija retrakcije r s tom homotopijom dati homotopiju u S^1

od f_0 do konstantnog preslikavanja u x_0 , što bi značilo da je svaka

petlja u S^1 nulhomotopna, u kontradikciji s $\pi_1(S^1) \neq 0$. □



Primjena: Borsuk-Ulamov teorem u dimenziji 2

Teorem 8.4 (Borsuk-Ulam)

Za svako neprekidno preslikavanje $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ postoji par antipodnih točaka x i $-x$ t.d. je $f(x) = f(-x)$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $f(x) \neq f(-x)$ za sve x . Tada je s $g(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{|f(x)-f(-x)|}$

dobro definirano preslikavanje $g: S^2 \rightarrow S^1$. Petlja $\eta(s) := (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0)$

jednom obilazi ekvator od $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, i neka je $h := g \circ \eta: I \rightarrow S^1$. Zbog

$g(-x) = -g(x)$ i $\eta(s + \frac{1}{2}) = -\eta(s)$, vrijedi

$h(s + \frac{1}{2}) = g(\eta(s + \frac{1}{2})) = g(-\eta(s)) = -g(\eta(s)) = -h(s)$ za sve $s \in [0, \frac{1}{2}]$.

Neka je $\tilde{h}: I \rightarrow \mathbb{R}$ podizanje petlje h . Tada je $\tilde{h}(s + \frac{1}{2}) = \tilde{h}(s) + \frac{q}{2}$ za

neki neparan broj q (jer se $\tilde{h}(s + \frac{1}{2})$ i $\tilde{h}(s)$ projiciraju u dijametralne točke).

Zbog neprekidnosti, q ne ovisi o s , pa je specijalno $\tilde{h}(1) = \tilde{h}(\frac{1}{2}) + \frac{q}{2} = \tilde{h}(0) + q$.

Znači h predstavlja q -struki generator od $\pi_1(S^1)$, a kako je q neparan, $h \neq 0$.

Ali h je kompozicija $I \xrightarrow{\eta} S^2 \xrightarrow{g} S^1$ i očito je $\eta \simeq 0$, pa mora biti $h \simeq 0$. □

Rastav sfere S^2 na tri zatvorena skupa

Korolar 8.5

Neka je $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ gdje su skupovi A_1, A_2, A_3 zatvoreni. Tada barem jedan od njih sadrži par antipodnih točaka.

Dokaz: Za $x \in S^2$ neka je $d_i(x) := d(x, A_i)$, $i = 1, 2, 3$.

Preslikavanje $x \mapsto (d_1(x), d_2(x))$ je neprekidno preslikavanje $S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

pa, prema Borsuk-Ulamovu teoremu, postoji x t.d. je $d_1(x) = d_1(-x)$

i $d_2(x) = d_2(-x)$. Ako je jedan od tih brojeva jednak 0, onda x i $-x$

leže u $\overline{A_1} = A_1$ ili oba leže u $\overline{A_2} = A_2$.

Ako su pak oba broja pozitivna, onda niti x niti $-x$ ne leže niti u

A_1 niti u A_2 , pa oba moraju ležati u A_3 . □

Fundamentalna grupa produkta

Propozicija 8.6

Ako su X i Y putevima povezani prostori onda je

$$\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y).$$

Dokaz: Svaka je petlja $f = (g, h) : I \rightarrow X \times Y$ ekvivalentna dvjema petljama: jednoj u X i jednoj u Y . Isto je tako svaka homotopija f_t petlji u $X \times Y$ ekvivalentna dvjema homotopijama petlji u X odnosno Y . Tako dobivamo bijekciju

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

danu s $[f] \mapsto ([g], [h])$, koja je očito izomorfizam grupa. □

Primjer: Fundamentalna grupa torusa. Prema propoziciji je $\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Paru $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ odgovara petlja $\omega_{pq} = (\omega_p, \omega_q)$ koja obilazi p puta oko jednog S^1 -faktora i q puta oko drugog. Ta petlja može biti i zauzlana, kao što pokazuje primjer $p = 3, q = 2$ na slici.



Inducirani homomorfizmi

Neka je $\varphi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ preslikavanje punktiranih prostora. Tada φ **inducira homomorfizam** $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ definiran s $\varphi_*([f]) := [\varphi f]$.

Preslikavanje φ_* dobro je definirano jer ako je $f_0 \stackrel{f_t}{\simeq} f_1$ onda je $\varphi f_0 \stackrel{\varphi f_t}{\simeq} \varphi f_1$, pa je $\varphi_*([f_0]) = [\varphi f_0] = [\varphi f_1] = \varphi_*([f_1])$.

Nadalje, φ_* je homomorfizam jer je $\varphi \circ (f \cdot g) = (\varphi \circ f) \cdot (\varphi \circ g)$.

Direktno iz definicije slijedi

Propozicija 9.1

- (1) Za kompoziciju $(X, x_0) \xrightarrow{\varphi} (Y, y_0) \xrightarrow{\psi} (Z, z_0)$ je $(\psi \varphi)_* = \psi_* \varphi_*$.
- (2) $\mathbb{1}_* = \mathbb{1}$, tj. identiteta $\mathbb{1}_X : X \rightarrow X$ inducira identitetu $\mathbb{1}_{\pi_1(X, x_0)} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. □

Drugim riječima $\pi_1 : \mathbf{Top}_0 \rightarrow \mathbf{Gp}$ je (kovarijantan) funktor.

Fundamentalna grupa sfera

Oдавде, „general nonsense” argumentacijom, slijedi

Korolar 9.2

Ako je $\varphi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ homeomorfizam onda je $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ izomorfizam.

Specijalno, fundamentalna grupa je topološka invarijanta. □

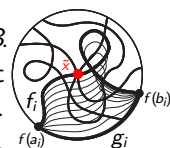
Teorem 9.3

$\pi_1(S^n) = 0$ za $n \geq 2$.

Dokaz: Neka je f petlja u S^n bazirana u točki $x_0 \in S^n$. Ako f nije surjektivna, tj. ako postoji točka $x \neq x_0$ koja nije u slici petlje f , onda je f zapravo petlja u $S^n \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^n$ pa je nul-homotopna. Dakle, kako bismo dokazali teorem, dovoljno je dokazati da je petlja f homotopna nekoj petlji koja nije surjektivna.

„Odmicanje” petlje od neke točke

Neka je $\tilde{x} \neq x_0$ neka točka i $B \subseteq S^n$ kugla oko \tilde{x} , dovoljno mala da ne sadrži x_0 . Skup $f^{-1}(B)$ sastoji se od, možda beskonačne, familije *disjunktnih* intervala $\langle a_i, b_i \rangle$. Zbog kompaktnosti, $f^{-1}(\tilde{x})$ je sadržan u konačnoj uniji tih intervala. Neka je $\langle a_i, b_i \rangle$ jedan od njih, tj. $\langle a_i, b_i \rangle \cap f^{-1}(\tilde{x}) \neq \emptyset$, i neka je $f_i := f|_{[a_i, b_i]}$. Put f_i leži u \bar{B} i njegove krajnje točke $f(a_i), f(b_i)$ leže na ∂B . Za $n \geq 2$ je $\partial B \cong S^{n-1}$ putevima povezan, pa neka je g_i put u $\partial B \subseteq \bar{B}$ od $f(a_i)$ do $f(b_i)$. Kako je $\bar{B} \cong D^n$, to je $g_i \simeq f_i$. Zamijenimo li f_i s g_i za sve i za koje je $\langle a_i, b_i \rangle \cap f^{-1}(\tilde{x}) \neq \emptyset$, dobit ćemo petlju u x_0 koja ne prolazi točkom \tilde{x} , dakle nije surjektivna, a homotopna je zadanoj petlji f . □



Primjer

Za bilo koju točku $x \in \mathbb{R}^n$ je $\mathbb{R}^n \setminus \{x\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$, pa je

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \cong \pi_1(S^{n-1}) \times \pi_1(\mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 2 \\ 0, & n > 2. \end{cases}$$

$\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}^n$ za $n \neq 2$

Kao posljedicu dobivamo ovaj „svakom jasan” ali netrivialan rezultat:

Korolar 9.4

Za $n \neq 2$ prostori \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^n nisu homeomorfni.

Dokaz: Pretpostavimo da postoji homeomorfizam $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$. Tada je i restrikcija $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ homeomorfizam. Ali, za $n = 1$ prostor $\mathbb{R}^1 \setminus \{f(0)\}$ nije povezan, dok $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ jeste, a za $n > 2$ je $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = 0$, dok je $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$. \square

Koristeći se višim homotopskim ili homološkim grupama, pokazuje se da je $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^m$ za $n \neq m$.

Štoviše, vrijedi tzv. **teorem o invarijanciji domene** da neprazni otvoreni podskupovi od \mathbb{R}^n i \mathbb{R}^m mogu biti homeomorfni jedino kada je $n = m$.

Homomorfizmi inducirani retrakcijom i deformacijskom retrakcijom

Propozicija 9.5

Ako je A rekt prostora X onda inkluzija $i: A \hookrightarrow X$ inducira monomorfizam $i_*: \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$.

Ako je A deformacijski rekt od X onda je i_* izomorfizam.

Dokaz: Zbog $ri = \mathbb{1}_A$ je $r_* i_* = \mathbb{1}_{\pi_1(A, x_0)}$ pa je i_* monomorfizam. Zbog $ir \simeq \mathbb{1}_X$ je $i_* r_* = \mathbb{1}_{\pi_1(X, x_0)}$ pa je i_* epimorfizam. \square

Grupovno-teorijski analogon retrakcije je homomorfizam grupe na podgrupu koji je identiteta na podgrupi. Ako je, dakle, potprostor A rekt od X , onda je podgrupa $\pi_1(A, x_0)$ „rekt” grupe $\pi_1(X, x_0)$. Postojanje „retrakcijskog homomorfizma” $\rho: G \rightarrow H$ prilično je jak uvjet na podgrupu H . Ako je H normalna podgrupa od G , onda je $G = H \times \text{Ker } \rho$. Ako H nije normalna podgrupa, onda je G tzv. **semidirektni produkt** $G = H \rtimes \text{Ker } \rho$. \square

Fundamentalna grupa je homotopska invarijanta

Na isti način kao što smo, rabeći samo funktorijalnost, u korolaru 9.2 pokazali da je π_1 topološka invarijanta, pokazuje se da je π_1 i invarijanta **punktiranog homotopskog tipa**.

To znači da ako postoji **punktirana homotopska ekvivalencija** $\varphi: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, tj. φ je preslikavanje za koje postoji $\psi: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ t.d. je $\psi \varphi \simeq \mathbb{1}_{(X, x_0)}$, tj. $\psi \varphi \simeq \mathbb{1}_X \text{ rel } \{x_0\}$, i slično za $\varphi \psi$, onda je $\varphi_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ izomorfizam. (To smo zapravo već bili rabili u dokazu prethodne propozicije 9.5.) Bavljenje baznom točkom je „gnjavaža” pa je korisno znati da vrijedi

Propozicija 9.6

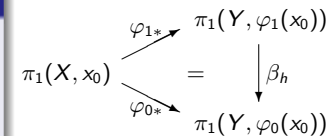
Ako je $\varphi: X \rightarrow Y$ (slobodna) homotopska ekvivalencija, onda je $\varphi_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ izomorfizam za svaku točku $x_0 \in X$.

Dokažimo najprije jednu lemu:

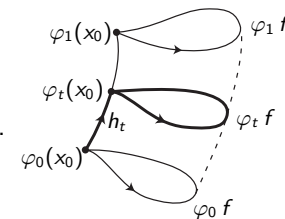
Slobodna homotopija i fundamentalna grupa

Lema 9.7

Neka je $\varphi_t: X \rightarrow Y$ homotopija a $h(t) := \varphi_t(x_0)$ put koji tom homotopijom opisuje točka $\varphi_0(x_0) \in Y$. Tada je $\varphi_{0*} = \beta_h \varphi_{1*}$, tj. desni dijagram komutira.



Dokaz: Neka je h_t restrikcija puta h na $[0, t]$ ali reparametrizirana t.d. je domena ponovno $[0, 1]$. Npr. možemo uzeti $h_t(s) := h(ts)$. Neka je f petlja u X iz točke x_0 . Tada je $h_t \cdot (\varphi_t f) \cdot \bar{h}_t$ homotopija petlji u $\varphi_0(x_0)$. Za $t = 0$ to je petlja $c_{x_0} \cdot (\varphi_0 f) \cdot c_{x_0} \simeq \varphi_0 f$, a za $t = 1$ to je petlja $h \cdot (\varphi_1 f) \cdot \bar{h}$, pa je $\varphi_{0*}([f]) = \beta_h(\varphi_{1*}([f]))$. \square



Dokaz propozicije 9.6:

Dokaz propozicije 9.6 Neka je $\psi: Y \rightarrow X$ homotopski inverz za φ ,

tj. $\psi\varphi \simeq \mathbb{1}_X$ i $\varphi\psi \simeq \mathbb{1}_Y$. Pogledajmo kompoziciju

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \xrightarrow{\psi_*} \pi_1(X, \psi\varphi(x_0)) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(Y, \varphi\psi\varphi(x_0)). \quad (*)$$

Kako je $\psi\varphi \simeq \mathbb{1}_X$ to je, prema prethodnoj lemi,

$$\psi_*\varphi_* = \beta_h \mathbb{1}_{\pi_1(X, x_0)} = \beta_h$$

za neki put h od $\psi\varphi(x_0)$ do x_0 .

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{1} & \nearrow \\ \pi_1(X, x_0) & & \pi_1(X, x_0) \\ & \searrow \psi_*\varphi_* & \downarrow \beta_h \\ & & \pi_1(X, \psi\varphi(x_0)) \end{array} =$$

Kako je β_h izomorfizam, to je $\psi_*: \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \rightarrow \pi_1(X, \psi\varphi(x_0))$ epimorfizam.

Na isti način zaključujemo da je $\varphi_*\psi_* = \beta_{h'}$ za neki put h' od

$\varphi\psi\varphi(x_0)$ do $\varphi(x_0)$, pa je ψ_* monomorfizam. Dakle, ψ_* je

izomorfizam pa je i $\varphi_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ izomorfizam. \square

Napomena: Uoči da su prvi i drugi φ_* u (*) *različiti* homomorfizmi!