7 POTPUNI METRIČKI I FUNKCIJSKI PROSTORI

- Potpuni metrički prostori
- Peanovo preslikavanje
- Kompaktnost u metričkim prostorima
- Konvergencija po točkama i konvergencija po kompaktima
- Ascolijev teorem

Potpunost

Sve ovo manje-više znamo iz analize:

Definicija

Metrički prostor (X, d) je ***potpun*** ako svaki Cauchyjev niz konvergira.

Lema 43.1

(X, d) je potpun ako i samo ako svaki Cauchyjev niz u X ima gomilište, tj. ima konvergentan podniz. □

Teorem 43.2

$\mathbb{R}^n$ je potpun i u standardnoj i u kvadratičnoj metrici. □

Kao i u $\mathbb{R}^n$ vrijedi

Lema 43.3

Niz $\mathbf{x}_n$ u produktu $X = \prod_\alpha X_\alpha$ konvergira k $\mathbf{x}$ ako i samo ako $\pi_\alpha(\mathbf{x}_n) \to \pi_\alpha(\mathbf{x})$ za sve α. □

$\mathbb{R}^\omega$ je potpun

Teorem 43.4

Na $\mathbb{R}^\omega$ (s produktnom topologijom) postoji potpuna metrika.

Dokaz: Produktna topologija na $\mathbb{R}^\omega$ inducirana je metrikom $D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sup_i \frac{\overline{d}(x_i, y_i)}{i}$, gdje je $\overline{d}(a, b) = \min\{|a - b|, 1\}$ standardna omeđena metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $\mathbf{x}_n$ Cauchyjev niz u $(\mathbb{R}^\omega, D)$.
Kako za $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^\omega$ vrijedi $\overline{d}(\pi_i(\mathbf{x}), \pi_i(\mathbf{y})) \le i\, D(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, to je za svaki i niz $(\pi_i(\mathbf{x}_n))_n$ Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$, pa konvergira.
Stoga i niz $\mathbf{x}_n$ konvergira u produktnoj, tj. D-topologiji na $\mathbb{R}^\omega$. □

Potpunost uniformne metrike

Neprebrojiv produkt $\mathbb{R}^J$ nije metrizabilan (u produktnoj topologiji), ali sjetimo se uniformne topologije:

Definicija

Neka je (Y, d) metrički prostor a $\bar{d}$ pripadna standardna omeđena metrika. ***Uniformna metrika*** $\bar{\rho}$ na Y^J određena metrikom d definira se kao $\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sup_\alpha \bar{d}(x_\alpha, y_\alpha)$.

Ako elemente produkta Y^J zapisujemo kao funkcije s J u Y, a ne kao J-torke, onda je $\bar{\rho}(f, g) = \sup_\alpha \bar{d}(f(\alpha), g(\alpha))$.

Teorem 43.5

Ako je prostor (Y, d) potpun onda je i $(Y^J, \bar{\rho})$ potpun metrički prostor.

Dokaz je isti kao u Analizi. □

Prostori neprekidnih i omeđenih funkcija

I ovaj teorem znamo iz analize:

Teorem 43.6

Neka je X topološki a (Y, d) metrički prostor. U uniformnoj metrici na Y^X su prostori $\mathcal{C}(X, Y)$ i $\mathcal{B}(X, Y)$ neprekidnih odnosno omeđenih funkcija, zatvoreni potprostori.
Ako je (Y, d) potpun onda su i ti potprostori potpuni. □

Za skup X i metrički prostor (Y, d) može se na skupu $\mathcal{B}(X, Y)$ definirati i ***sup-metrika*** $\rho(f, g) := \sup_x d(f(x), g(x))$.
Veza sup-metrike ρ i uniformne metrike $\bar{\rho}$ je sasvim jednostavna: $\bar{\rho}(f, g) = \min\{\rho(f, g), 1\}$, što se lako provjeri.
Kada je X kompaktan, sve su neprekidne funkcije omeđene, pa ako je (Y, d) potpun onda je i prostor $(\mathcal{C}(X, Y), \bar{\rho})$ potpun, te je i $(\mathcal{C}(X, Y), \rho)$ potpun. Stoga se često na $\mathcal{C}(X, Y)$ rabi sup-metrika ρ umjesto uniformne metrike $\bar{\rho}$.

Smještavanje u $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \rho)$

Teorem 43.7

Svaki se metrički prostor (X, d) može izometrički smjestiti u potpun metrički prostor.

Dokaz: Fiksirajmo $x_0 \in X$, i za svaki $a \in X$ definirajmo funkciju $\phi_a \colon X \to \mathbb{R}$ s $\phi_a(x) := d(x, a) - d(x, x_0)$.
Tvrdnja: $\phi_a \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. (za to nam je trebalo oduzeti $d(x, x_0)$).
Iz $|d(x, a) - d(x, b)| \leq d(a, b)$, za $b = x_0$ slijedi $|\phi_a(x)| \leq d(a, x_0)$ za sve x. ✓
Sada definiramo $\Phi \colon X \to \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ stavljajući $\Phi(a) := \phi_a$.
Tvrdnja: $\Phi \colon (X, d) \to (\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \rho)$ je izometričko smještenje.
Prema definiciji, za sve $a, b \in X$ je

$$\rho(\phi_a, \phi_b) = \sup_x |\phi_a(x) - \phi_b(x)| = \sup_x |d(x, a) - d(x, b)|$$

pa je $\rho(\phi_a, \phi_b) \leq d(a, b)$. Nejednakost ne može biti stroga jer je $|\phi_a(a) - \phi_b(a)| = d(a, b)$. Dakle, $\rho(\phi_a, \phi_b) = d(a, b)$ pa je Φ izometričko smještenje u potpun metrički prostor $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \rho)$. □

Upotpunjenje metričkog prostora

Rezultat prethodnog teorema i sljedeći pojam važni su u analizi (manje u geometriji).

Definicija

Neka je (X, d) metrički prostor a $h \colon X \to Y$ izometričko smještenje u potpun metrički prostor Y. Tada je potprostor $\overline{h(X)} \subseteq Y$ potpun metrički prostor, i naziva se ***upotpunjenje*** prostora X.

Lako se pokaže da je upotpunjenje jedinstveno do na izometriju.

U nesuglasju s intuicijom

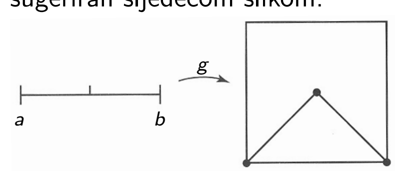
Kao primjenu potpunosti prostora $\mathcal{C}(X, Y)$ opisat ćemo konstrukciju „krivulje koja ispunjava kvadrat" (oznaka: $I := [0, 1]$).

Teorem 44.1

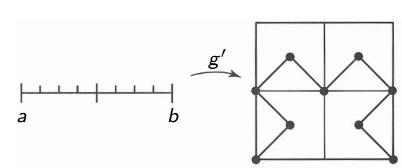
Postoji neprekidna surjekcija $f : [0, 1] \twoheadrightarrow [0, 1]^2$.

Dokaz: 1. korak: Opišimo najprije jednu modifikaciju „trokutastih" puteva:

Za proizvoljan segment $[a, b]$ i proizvoljan kvadrat neka je g put sugeriran sljedećom slikom:

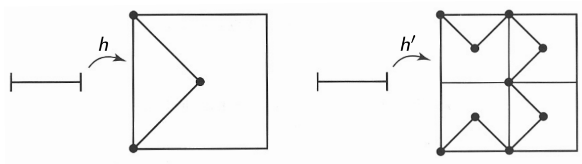


Modificiran put g' sugeriran je tada sljedećom slikom:



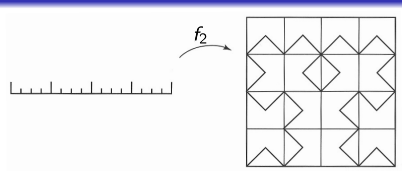
Konstrukcija Peanove krivulje

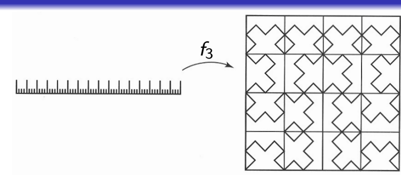
Analogna se modifikacija može napraviti i za ostale trokutaste puteve koji spajaju dva susjedna vrha kvadrata, naprimjer:



2. korak: Sada definiramo niz funkcija $f_n \colon I \to I^2$ ovako:
Funkcija f_0 neka je trokutast put g za $a = 0$ i $b = 1$.
Funkcija f_1 neka je modificirani put g'.
Funkciju f_2 dobijemo tako da na svaki od četiri trokutasta puta koji čine f_1 primijenimo opisane modifikacije, itd.
Općenito, f_n se sastoji od 4^n trokutastih puteva koji svaki leži u kvadratiću stranice $\frac{1}{2^n}$, a f_{n+1} dobijemo tako da svaki od tih trokutastih puteva modificiramo na opisani način, zamjenjujući svaki od njih s četiri manja trokutasta puta.

Peanovo preslikavanje





3. korak: Da dokažemo kako niz $(f_n)_n$ konvergira, zbog potpunosti prostora $(\mathcal{C}(I, I^2), \rho)$, dovoljno je pokazati da je on Cauchyjev. No to slijedi iz konstrukcije, jer kada za $t \in [0,1]$ točka $f_n(t)$ „upadne" u neki kvadratić stranice $\frac{1}{2^n}$, bit će i $f_m(t)$ u tom istom kvadratiću i za sve $m > n$.

4. korak: Kako je $\mathcal{C}(I, I^2)$ potpun, niz f_n konvergira k neprekidnoj funkciji $f \colon [0,1] \to [0,1]^2$. Pokažimo da je f surjekcija. Neka je $\mathbf{x} \in I^2$ proizvoljna točka. Kako $\mathbf{x}$ leži u nekom od kvadratića stranice $\frac{1}{2^n}$, to je $d(\mathbf{x}, f_n(I)) \leq \frac{1}{2^n}$ jer put f_n „ulazi" u svaki takav kvadratić. Stoga za svaki $\varepsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\rho(f, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ i $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, ε-okolina od $\mathbf{x}$ siječe $f(I)$, pa je $\mathbf{x} \in \overline{f(I)} = f(I)$. $\square$

Sljedećih nekoliko stvari važne su za analizu

Najprije nešto što već znamo a onda nešto novo:

Definicija

Metrički prostor (X, d) je ***potpuno omeđen*** ako se za svaki $\varepsilon > 0$ može pokriti s konačno mnogo ε-kugala.

Teorem 45.1

Metrički prostor (X, d) je kompaktan ako i samo ako je potpun i potpuno omeđen. $\square$

Definicija

Neka je X topološki a (Y, d) metrički prostor, i neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$.
Familija funkcija $\mathcal{F}$ je ***ekvikontinuirana u točki*** $x_0 \in X$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji okolina $U \ni x_0$ t.d. je $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ za sve $x \in U$ i sve $f \in \mathcal{F}$.
Familija $\mathcal{F}$ je ***ekvikontinuirana*** ako je ekvikontinuirana u svakoj točki.

Ekvikontinuiranost

Lema 45.2

Neka je X topološki a (Y, d) metrički prostor. Ako je u pripadnoj uniformnoj metrici $\bar{\rho}$ familija $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ potpuno omeđena, onda je $\mathcal{F}$ ekvikontinuirana s obzirom na metriku d.

Dokaz: Neka je $x_0 \in X$, $0 < \varepsilon < 1$, $\delta := \frac{\varepsilon}{3}$ i $\{B_{\bar{\rho}}(f_1, \delta), \dots, B_{\bar{\rho}}(f_n, \delta)\}$ pokrivač od $\mathcal{F}$ otvorenim δ-kuglama u $\mathcal{C}(X, Y)$. Funkcije f_i su neprekidne pa neka je $U \ni x_0$ okolina t.d. je $d(f_i(x), f_i(x_0)) < \delta$ za sve $x \in U$, $i = 1, \dots, n$. Neka je $f \in \mathcal{F}$ proizvoljna funkcija. Tada f pripada nekoj od tih kugala, npr. $f \in B_{\bar{\rho}}(f_i, \delta)$, pa za $x \in U$ vrijedi

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(x_0)) + d(f_i(x_0), f(x_0))$$
$$= \bar{d}(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(x_0)) + \bar{d}(f_i(x_0), f(x_0)) < \varepsilon$$

jer su sva tri sumanda manja od δ, a $\delta < 1$. $\square$

Klasični Ascolijev teorem

Sada bismo, uz pomoć još jedne leme, mogli dokazati klasični Ascolijev teorem

Teorem 45.4

Neka je X kompaktan a $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^n)$ prostor neprekidnih funkcija s X u $\mathbb{R}^n$ s uniformnom metrikom za standardnu ili kvadratičnu metriku d na $\mathbb{R}^n$. Familija $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X,\mathbb{R}^n)$ je ***relativno kompaktna****, tj. ima kompaktno zatvorenje, ako i samo ako je ekvikontinuirana i* ***točkovno omeđena*** *s obzirom na metriku d, tj. skup $\mathcal{F}(a) := \{f(a) : f \in \mathcal{F}\}$ je omeđen za sve $a \in X$.*

Mi ćemo u §47 dokazati opću verziju Ascolijeva teorema, pa ovu, klasičnu verziju nećemo dokazivati.

Topologija konvergencije po točkama

Osim uniformne topologije, na prostorima funkcija postoje i druge zanimljive topologije. Upoznat ćemo tri.

Definicija

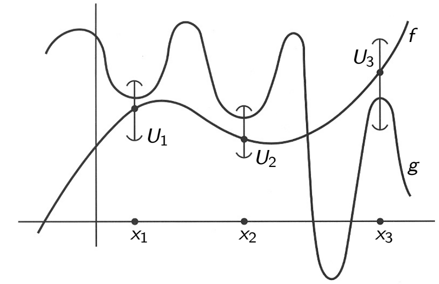
Za $x \in X$ i otvoren skup $U \subseteq Y$ neka je

$$S(x,U) := \{f \in Y^X : f(x) \in U\}.$$

Familija $\{S(x,U) : x \in X, U^{\text{otvoren}} \subseteq Y\}$ je podbaza topologije koju nazivamo ***topologijom konvergencije po točkama*** ili ***točkovno-otvorenom topologijom*** ili ***topologijom obične konvergencije***.

Ova je topologija ***isto što i produktna topologija*** na Y^X jer je $S(x,U) = \pi_x^{-1}(U)$ u „produktnoj" notaciji.
Bazu topologije konvergencije po točkama čine skupovi $S(x_1,\ldots,x_k; U_1,\ldots,U_k) := \{f \in Y^X : f(x_i) \in U_i, i = 1,\ldots,k\}$.
Dakle, u toj je topologiji tipična okolina funkcije f, familija funkcija koje su u konačno mnogo točaka „blizu" funkcije f.

Konvergencija po točkama



Teorem 46.1

U topologiji konvergencije po točkama niz funkcija f_n konvergira k funkciji f akko za svaki $x \in X$ niz $f_n(x)$ konvergira k $f(x)$.

Dokaz je samo reformulacija leme 43.3 konvergencije u produktu, u funkcijskoj notaciji. □
U ovoj topologiji $\mathcal{C}(X,Y)$ ***nije*** općenito zatvoren potprostor od Y^X, tj. limes niza neprekidnih funkcija ne mora biti neprekidan.

Topologija kompaktne konvergencije

Definicija

Neka je X topološki a (Y,d) metrički prostor. Za $f \in Y^X$, kompaktan skup $C \subseteq X$ i broj $\varepsilon > 0$ neka je

$$B_C(f,\varepsilon) := \{g \in Y^X : \sup_{x\in C} d(f(x),g(x)) < \varepsilon\}.$$

Skupovi $B_C(f,\varepsilon)$ čine bazu topologije na Y^X koju nazivamo ***topologijom uniformne konvergencije na kompaktima*** ili ***topologijom kompaktne konvergencije***.

Da skupovi $B_C(f,\varepsilon)$ zaista čine bazu, slijedi iz činjenice da za $g \in B_C(f,\varepsilon)$ i $\delta = \varepsilon - \sup_{x\in C} d(f(x),g(x))$ vrijedi $B_C(g,\delta) \subseteq B_C(f,\varepsilon)$,
(za $h \in B_C(g,\delta)$ i $x \in C$ je
$d(h(x),f(x)) \le d(h(x),g(x)) + d(g(x),f(x)) < \delta + \sup_{x\in C} d(g(x),f(x)) = \varepsilon$)
pa za $g \in B_{C_1}(f_1,\varepsilon_1) \cap B_{C_2}(f_2,\varepsilon_2)$, $C := C_1 \cap C_2$ i
$\delta := \varepsilon - \max\{\sup_{x\in C_1} d(g(x),f_1(x)). \sup_{x\in C_2} d(g(x),f_2(x))\}$,
vrijedi $B_C(g,\delta) \subseteq B_{C_1}(f_1,\varepsilon_1) \cap B_{C_2}(f_2,\varepsilon_2)$.

Topologija lokalno uniformne konvergencije

U topologiji kompaktne konvergencije okolinu funkcije f čine sve funkcije koje su „blizu” f na nekom kompaktnom podskupu. Topologija kompaktne konvergencije ***finija*** je od topologije konvergencije po točkama a grublja je od uniformne topologije.

BOX $>$ UNIFORMNA $>$ KOMPAKTNA $>$ PO TOČKAMA ($=$ produktna)

Očito vrijedi sljedeći teorem, odakle i naziv za ovu topologiju:

Teorem 46.2

Neka je X topološki a (Y, d) metrički prostor. Niz funkcija $f_n \colon X \to Y$ konvergira u topologiji kompaktne konvergencije k funkciji f akko za svaki kompaktan podskup $C \subseteq X$ niz restrikcija $f_n|C$ uniformno konvergira k restrikciji $f|C$. □

Odavde, i iz onoga što smo znamo iz Analize, zaključujemo da ako je X *lokalno kompaktan*, onda je topologija kompaktne konvergencije isto što i ***topologija lokalno uniformne konvergencije***.

Kompaktno generirani prostori

Kao što znamo, u uniformnoj topologiji je limes niza neprekidnih funkcija opet neprekidna funkcija, ali u produktnoj topologiji, tj. topologiji konvergencije po točkama, to nije tako.

A kako je u topologiji kompaktne konvergencije?

Uz jedan, relativno slab uvjet koji „većina” dobrih prostora zadovoljava, i tu će limes niza neprekidnih funkcija biti neprekidan.

Definicija

Prostor X je ***kompaktno generiran*** ako vrijedi sljedeće: $A \subseteq X$ je otvoren akko je $A \cap C$ otvoren u C za sve kompaktne $C \subseteq X$.
Ekvivalentno: $B \subseteq X$ je zatvoren akko je $B \cap C$ zatvoren u C.

Kaže se i da X ima ***slabu topologiju*** s obzirom na familiju kompaktnih potprostora.

Klasa kompaktno generiranih prostora je „dobra” za algebarsku topologiju.

Lokalno kompaktni su kompaktno generirani

Lema 46.3

Ako je prostor X lokalno kompaktan ili ako X zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti, onda je X kompaktno generiran.

Dokaz: Neka je X lokalno kompaktan i $A \subseteq X$ t.d. je $A \cap C$ otvoren u C za sve kompaktne $C \subseteq X$. Pokažimo da je A otvoren u X.
Za $x \in A$ neka je $U \ni x$ okolina u X koja je sadržana u nekom kompaktnom C, $U \subseteq C$ ($\exists$ zbog lokalne kompaktnosti). Jer je $A \cap C$ otvoren u C, to je $A \cap U$ otvoren u U, pa je otvoren i u X.
Dakle, $x \in A \cap U \subseteq A$, pa je A otvoren u X. ✓
Neka X zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti i neka je $B \subseteq X$ t.d. je $B \cap C$ zatvoren u C za sve kompaktne $C \subseteq X$. Za $x \in \overline{B}$ postoji niz $(x_n)_n$ u B koji konvergira k x (prvi aksiom prebrojivosti!).
Skup $K := \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je kompaktan, pa je $B \cap K$ zatvoren u K.
Ali $(x_n)_n$ je niz u $B \cap K$, koji je zatvoren u K, pa je $x = \lim x_n \in B \cap K \subseteq B$, tj. $\overline{B} \subseteq B$, pa je B zatvoren u X. □

Neprekidnost u slaboj topologiji

Ključnu stvar o kompaktno generiranim prostorima iskazuje sljedeća

Lema 46.4

Neka je X kompaktno generiran. Funkcija $f \colon X \to Y$ je neprekidna akko je restrikcija $f|C$ neprekidna za svaki kompaktan $C \subseteq X$.

Dokaz: Neka je $V \subseteq Y$ otvoren. Za svaki kompaktan $C \subseteq X$ je skup $f^{-1}(V) \cap C = (f|C)^{-1}(V)$ otvoren u C, a jer je X kompaktno generiran, $f^{-1}(V)$ je otvoren u X. □

Analogna tvrdnja vrijedi i u svakoj drugoj situaciji kada je topologija na X *slaba topologija* s obzirom na neku familiju potprostora. Takvu topologiju ćemo imati npr. za CW-komplekse.

Neprekidnost limesa u topologiji konvergencije po kompaktima

Teorem 46.5

Neka je X kompaktno generiran a (Y, d) metrički prostor. Tada je u topologiji kompaktne konvergencije $\mathcal{C}(X, Y) \subseteq Y^X$ zatvoren potprostor.

Dokaz: Neka je $f \in Y^X$ gomilište od $\mathcal{C}(X, Y)$. Za dokaz neprekidnosti od f dovoljno je pokazati da je restrikcija $f|C$ neprekidna za svaki kompaktan $C \subseteq X$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$, okolina $B_C(f, \frac{1}{n})$ od f siječe $\mathcal{C}(X, Y)$, pa odaberimo $f_n \in \mathcal{C}(X, Y) \cap B_C(f, \frac{1}{n})$. Niz restrikcija $f_n|C \colon C \to Y$ uniformno konvergira k $f|C$, pa je $f|C$ neprekidna. □

Korolar 46.6

Neka je X kompaktno generiran a (Y, d) metrički prostor. Ako niz neprekidnih funkcija $f_n \colon X \to Y$ uniformno po kompaktima konvergira funkciji f, onda je f neprekidna funkcija. □

Tri topologije na prostoru funkcija

U kontekstu neprekidnih funkcija, box topologija se obično ne promatra jer je finija od uniformne topologije, a već uniformni limesi čuvaju neprekidnost. O odnosu ostalih triju topologija koje smo dosada promatrali na prostoru funkcija, govori sljedeći jednostavan teorem:

Teorem 46.7

Neka je X topološki a (Y, d) metrički prostor. Na prostoru funkcija Y^X topologija kompaktne konvergencije grublja je od uniformne a finija je od topologije obične konvergencije.

Ako je X kompaktan onda se topologija kompaktne konvergencije podudara s uniformnom topologijom, a ako je X diskretan, podudara se s topologijom konvergencije po točkama, tj. produktnom topologijom. □

uniformna t. $>$ t. kompaktne konvergencije $>$ t. obične konvergencije

Kompaktno-otvorena topologija

Uniformna i topologija kompaktne konvergencije koriste ***metriku*** na Y. Postoji li i općenito na prostoru funkcija topologija koja bi se za metrički Y podudarala s nekom od njih?
Za prostor Y^X *svih* funkcija — ne. Ali ima jedna dobra topologija na $\mathcal{C}(X, Y)$, prostoru *neprekidnih* funkcija, koja se za metrički Y podudara s topologijom kompaktne konvergencije.

Definicija

Neka su X i Y topološki prostori. Za kompaktan $C \subseteq X$ i otvoren $U \subseteq Y$ neka je $S(C, U) := \{f \in \mathcal{C}(X, Y) : f(C) \subseteq U\}$. Skupovi $S(C, U)$ čine podbazu ***kompaktno-otvorene*** topologije na $\mathcal{C}(X, Y)$.

Kompaktno-otvorena topologija očito je *finija* od topologije konvergencije po točkama, tj. produktne topologije.
K-O topologija može se definirati na cijelom prostoru Y^X ali tamo nema dobra svojstva koja ima na $\mathcal{C}(X, Y)$.

Kompaktno-otvorena = topologija kompaktne konvergencije

Teorem 46.8

Neka je X topološki a (Y, d) metrički prostor. Kompaktno-otvorena topologija na $\mathcal{C}(X, Y)$ podudara se s topologijom kompaktne konvergencije.

Dokaz: KK>KO. Neka je $f \in S(C, U)$. Skup $f(C)$ je kompaktan pa postoji $\varepsilon > 0$ t.d. je ε-okolina od $f(C)$ sadržana u U.
Tada je $B_C(f, \varepsilon) \subseteq S(C, U)$, tj. $S(C, U)$ otvoren je i u topologiji kompaktne konvergencije. ✓

KO>KK. Dovoljno je u svakom $B_C(f, \varepsilon)$ naći KO-okolinu od f. Za svaki $x \in X$ postoji okolina $V_x \ni x$ t.d. je $f(\overline{V_x})$ sadržano u nekom otvorenom $U_x \subseteq Y$ dijametra $< \varepsilon$ [npr. $V_x := f^{-1}(B(f(x), \frac{1}{4}\varepsilon))$].
C je kompaktan pa neka je pokriven već s $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$. Tada je $f \in S(C_{x_1}, U_{x_1}) \cap \cdots \cap S(C_{x_n}, U_{x_n}) \subseteq B_C(f, \varepsilon)$, gdje je $C_x := \overline{V_x} \cap C$. □

(Ne)ovisnost uniformne topologije o metrici

Korolar 46.9

Neka je X topološki a Y metrički prostor. Topologija kompaktne konvergencije na $\mathcal{C}(X,Y)$ ne ovisi o metrici na Y.

Stoga, ako je X kompaktan onda uniformna topologija na $\mathcal{C}(X,Y)$ ne ovisi o metrici na Y. $\square$

Činjenica da se u definiciji kompaktno-otvorene topologije ne pojavljuje metrika od Y je korisna. Ali vrlo je korisna i činjenica o kojoj govori sljedeći teorem:

Evaluacijsko preslikavanje

Teorem 46.10

Neka je Y topološki a X lokalno kompaktan Hausdorffov prostor. Uz kompaktno-otvorenu topologiju na $\mathcal{C}(X,Y)$ je preslikavanje $e\colon X\times\mathcal{C}(X,Y)\to Y$ definirano s $e(x,f):=f(x)$, neprekidno.

Preslikavanje e naziva se ***evaluacijsko preslikavanje****.*

Dokaz: Neka je $(x,f)\in X\times\mathcal{C}(X,Y)$ i $V\subseteq Y$ okolina od $e(x,f)=f(x)$.
Jer je f neprekidno a X lokalno kompaktan Hausdorffov, postoji otvoren $U\ni x$ t.d. je $\overline{U}$ kompaktan i $f(\overline{U})\subseteq V$.
Skup $U\times S(\overline{U},V)\subseteq X\times\mathcal{C}(X,Y)$ je okolina od (x,f) i $e(U\times S(\overline{U},V))\subseteq V$ jer za $(x',f')\in U\times S(\overline{U},V)$ vrijedi $e(x',f')=f'(x')\in V$. $\square$

Adjungirana preslikavanja

Definicija

Svaka funkcija $f\colon X\times Z\to Y$ definira formulom
$$(F(z))(x):=f(x,z)$$
funkciju $F\colon Z\to Y^X$, i obratno, svaka funkcija $F\colon Z\to Y^X$ formulom
$$f(x,z):=(F(z))(x)$$
definira funkciju $f\colon X\times Z\to Y$.

Kaže se da su funkcije f i F međusobno ***pridružene*** ili ***adjungirane***.

Teorem 46.11

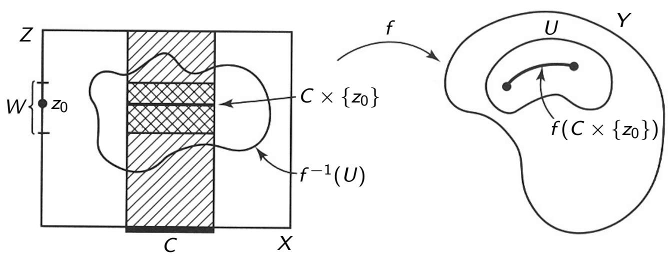
Neka su X i Y prostori a $\mathcal{C}(X,Y)$ neka ima kompaktno-otvorenu topologiju. Ako je preslikavanje $f\colon X\times Z\to Y$ neprekidno onda je i pridruženo preslikavanje $F\colon Z\to\mathcal{C}(X,Y)$ neprekidno.
Ako je X lokalno kompaktan Hausdorffov onda vrijedi i obrat.

Neprekidnost adjungiranih preslikavanja

Dokaz: $\boxed{\Leftarrow}$ Neka je X lokalno kompaktan Hausdorffov i $F\colon Z\to\mathcal{C}(X,Y)$ neprekidno. Preslikavanje f je neprekidno jer je jednako kompoziciji
$$\begin{array}{ccccc} X\times Z & \xrightarrow{1_X\times F} & X\times\mathcal{C}(X,Y) & \xrightarrow{e} & Y\\ (x,z) & \xmapsto{1_X\times F} & (x,F(z)) & \xmapsto{e} & (F(z))(x). \end{array}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Neka je f neprekidno, $z_0\in Z$ i $S(C,U)\ni F(z_0)$ podbazni otvoren skup. Treba nam okolina $W\ni z_0$ t.d. je $F(W)\subseteq S(C,U)$.
$F(z_0)\in S(C,U)$ znači da je $(F(z_0))(x)=f(x,z_0)\in U$ za sve $x\in C$, tj. $f(C\times\{z_0\})\subseteq U$. Jer je f neprekidno, $f^{-1}(U)\subseteq X\times Z$ je okolina skupa $C\times\{z_0\}$, pa je $f^{-1}(U)\cap(C\times Z)$ otvoren u $C\times Z$ i sadrži sloj $C\times\{z_0\}$. Prema lemi 26.8 o cijevi, postoji okolina $W\ni z_0$ t.d. je $C\times W\subseteq f^{-1}(U)$. Dakle, za sve $z\in W$ i sve $x\in C$ je $((F(z))(x)=f(x,z)\in U$, tj. $F(W)\subseteq S(C,U)$. $\square$

Primjena leme o cijevi



Homotopija

Homotopijom ćemo se baviti sljedeći semestar u algebarskoj topologiji, a na ovom mjestu ju samo spominjemo u vezi s kompaktno-otvorenom topologijom.

Preslikavanja $f, g\colon X \to Y$ su ***homotopna*** ako postoji preslikavanje $h\colon X \times [0,1] \to Y$ t.d. je $h(x,0) = f(x)$ i $h(x,1) = g(x)$ za sve $x \in X$. Preslikavanje h naziva se ***homotopijom*** između f i g.

Pridruženo preslikavanje $H\colon [0,1] \to \mathcal{C}(X,Y)$ je neprekidno, pa na homotopiju možemo gledati kao na put u prostoru funkcija od $H(0) = f$ do $H(1) = g$.

Obratno, ako je X lokalno kompaktan Hausdorffov, a $H\colon [0,1] \to \mathcal{C}(X,Y)$ put u prostory funkcija $\mathcal{C}(X,Y)$, onda je pridruženo preslikavanje $h\colon X \times [0,1] \to Y$ homotopija od $H(0)$ do $H(1)$.

Ascolijev teorem

Prisjetimo se: familija $\mathcal{F}$ funkcija s X u metrički prostor (Y,d) je ***ekvikontinuirana*** ako za svaki $x \in X$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji okolina $U_x \ni x$ t.d. je $f(U_x) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$ za sve $f \in \mathcal{F}$.

Teorem 47.1 (Ascolijev teorem)

Neka je X topološki a (Y,d) metrički prostor, te neka je $\mathcal{C}(X,Y)$ snabdjeven topologijom kompaktne konvergencije, tj. kompaktno-otvorenom topologijom, i neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$.

(a) *Ako je $\mathcal{F}$ ekvikontinuirana familija funkcija i skupovi $\mathcal{F}(a) := \{f(a) : f \in \mathcal{F}\} \subseteq Y$ su relativno kompaktni, tj. imaju kompaktna zatvorenja, za sve $a \in X$, onda je familija $\mathcal{F}$ sadržana u nekom kompaktnom potprostoru od $\mathcal{C}(X,Y)$, tj. $\mathcal{F}$ je relativno kompaktan potprostor od $\mathcal{C}(X,Y)$.*

(b) *Ako je X lokalno kompaktan Hausdorffov onda vrijedi i obrat.*

Dokaz Ascolijeva teorema (1. korak)

Dokaz: (a) Prostor Y^X *svih* funkcija neka ima produktnu topologiju, tj. topologiju konvergencije po točkama. Tada je Y^X Hausdorffov a prostor $\mathcal{C}(X,Y)$, koji ima topologiju kompaktne konvergencije, ***nije*** potprostor od Y^X. Neka je $\mathcal{G} := \overline{\mathcal{F}} \subseteq Y^X$.
Dokaz tvrdnje (a) ide u četiri koraka:

1. korak: $\mathcal{G} \subseteq Y^X$ je kompaktan. Za svaki $a \in X$ je $C_a := \overline{\mathcal{F}(a)} \subseteq Y$ kompaktan po pretpostavci, i $\mathcal{F} \subseteq \prod_{a\in X} \mathcal{F}(a) \subseteq \prod_{a \in X} C_a$, jer je $\prod_{a\in X} \mathcal{F}(a)$ skup svih funkcija $g\colon X \to \bigcup_{a\in X} \mathcal{F}(a) \subseteq Y$ t.d. je $g(a) \in \mathcal{F}(a)$ za sve a (definicija produkta!), a za sve $f \in \mathcal{F}$ očito vrijedi $f(a) \in \mathcal{F}(a)$ sa sve $a \in X$.
Prema Tihonovljevu teoremu, produkt $\prod_{a\in X} C_a$ je kompaktan, pa je zatvoren potprostor od Y^X, jer je Y^X Hausdorffov.
Kako je $\mathcal{G} = \overline{\mathcal{F}} \subseteq \prod_{a\in X} C_a$ zatvoren podskup, to je $\mathcal{G}$ kompaktan. ✓

Dokaz Ascolijeva teorema (2. korak)

2. korak: Funkcije $g \in \mathcal{G}$ su neprekidne, tj. $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$.
Štoviše, familija $\mathcal{G}$ je ekvikontinuirana.
$\mathcal{F}$ je ekvikontinuirana pa za $x_0 \in X$ i $\varepsilon > 0$ neka je okolina $U \ni x_0$ t.d. je $d(f(x), f(x_0)) < \frac{1}{3}\varepsilon$ za sve $f \in \mathcal{F}$ i $x \in U$. Tvrdimo da je $d(g(x), g(x_0)) < \varepsilon$ za sve $g \in \mathcal{G}$ i $x \in U$, pa je $\mathcal{G}$ ekvikontinuirana.
Odaberimo $g \in \mathcal{G}$ i $x \in U$. Neka je V_x skup svih funkcija $h \in Y^X$ za koje je $d(h(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ i $d(h(x_0), g(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$, tj.

$$\begin{aligned} V_x &= S(x, B(g(x), \tfrac{\varepsilon}{3})) \cap S(x_0, B(g(x_0), \tfrac{\varepsilon}{3})) \\ &= \pi_x^{-1}(B(g(x), \tfrac{\varepsilon}{3})) \cap \pi_{x_0}^{-1}(B(g(x_0), \tfrac{\varepsilon}{3})). \end{aligned}$$

Kako je $g \in \overline{\mathcal{F}}$ i $V_x \subseteq Y^X$ je otvoren, postoji $f \in V_x \cap \mathcal{F}$. Tada je

$d(g(x), g(x_0)) \le d(g(x), f(x)) + d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), g(x_0)) < \varepsilon$. ✓

Dokaz Ascolijeva teorema (3. korak)

3. korak: Na $\mathcal{G}$ se produktna i topologija kompaktne konvergencije podudaraju.
Topologija kompaktne konvergencije uvijek je finija od produktne.
Dokažimo da na $\mathcal{G}$ vrijedi i obratno. Neka je $g \in B_C(g, \varepsilon)$. Treba nam B, bazni otvoren skup topologije konvergencije po točkama, t.d. je $B \cap \mathcal{G} \subseteq B_C(g, \varepsilon) \cap \mathcal{G}$. Kako je $\mathcal{G}$ ekvikontinuirana i C je kompaktan, možemo odabrati točke $x_1, \ldots, x_n \in C$ i oko njih otvorene skupove $U_1, \ldots, U_n$ koji pokrivaju C, t.d. za sve i vrijedi

$$d(g(x), g(x_i)) < \tfrac{\varepsilon}{3} \text{ za sve } x \in U_i \text{ i } g \in \mathcal{G}.$$

Neka je $B := \{h \in Y^X : d(h(x_i), g(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3},\ i = 1, \ldots, n\}$.
Pokažimo da svaki $h \in B \cap \mathcal{G}$ leži u $B_C(g, \varepsilon)$, tj. da je $d(h(x), g(x)) < \varepsilon$ za sve $x \in C$. Za $x \in C$ neka je i t.d. je $x \in U_i$.
Tada je $d(h(x), h(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$ i $d(g(x), g(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$ jer je $x \in U_i$, $g, h \in \mathcal{G}$, i vrijedi $d(h(x_i), g(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$ jer je $h \in B$. Stoga je

$d(h(x), g(x)) \le d(h(x), h(x_i)) + d(h(x_i), g(x_i)) + d(g(x_i), g(x)) < \varepsilon$. ✓

Dokaz Ascolijeva teorema (4. korak)

4. korak: Završetak dokaza tvrdnje (a).
Pokazali smo da je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$. S obzirom na produktnu topologiju na Y^X, skup $\mathcal{G}$ je kompaktan, a kako se na $\mathcal{G}$ produktna topologija podudara s topologijom kompaktne konvergencije tj. kompaktno-otvorenom topologijom, to je $\mathcal{G}$ kompaktan potprostor od $\mathcal{C}(X, Y)$ koji sadrži $\mathcal{F}$. Stoga je i zatvorenje $\overline{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ kompaktan potprostor, tj. $\mathcal{F}$ je relativno kompaktan u $\mathcal{C}(X, Y)$.
Time je dokazana tvrdnja (a).

Dokaz tvrdnje (b).
Neka je $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ kompaktan potprostor koji sadrži familiju $\mathcal{F}$.
Pokazat ćemo da je familija $\mathcal{H}$ ekvikontinuirana i da su skupovi $\mathcal{H}(a) = \{h(a) : h \in \mathcal{H}\}$ kompaktni za sve $a \in X$.
Odavde će slijediti da je i familija $\mathcal{F}$ ekvikontinuirana, jer je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$, i zatvorenja $\overline{\mathcal{F}(a)}$ su kompaktna za sve $a \in X$, jer je $\mathcal{F}(a) \subseteq \mathcal{H}(a)$.

Dokaz tvrdnje (b) Ascolijeva teorema

$\mathcal{H}(a)$ je kompaktan za svaki $a \in X$.
Promotrimo kompoziciju

$$\mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{j} X \times \mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{e} Y$$

gdje je $j(f) := (a, f)$, a $e(x, f) := f(x)$ je evaluacijsko preslikavanje.
Očito je preslikavanje j neprekidno, a e je neprekidno jer se topologija kompaktne konvergencije na $\mathcal{C}(X, Y)$ podudara s kompaktno-otvorenom topologijom, teorem 46.8, i jer je prostor X lokalno kompaktan Hausdorffov, teorem 46.10.
Za $h \in \mathcal{H}$ je $e(j(h)) = e(a, h) = h(a)$, pa kompozicija $e \circ j$ preslikava $\mathcal{H}$ na $\mathcal{H}(a)$. Kako je $\mathcal{H}$ kompaktan, kompaktan je i $\mathcal{H}(a)$. ✓

Familija $\mathcal{H}$ je ekvikontinuirana u svakoj točki $a \in X$.
Dovoljno je pokazati da oko svake točke $a \in X$ postoji okolina na kojoj je familija restrikcija funkcija iz $\mathcal{H}$ ekvikontinuirana.

Dokaz Ascolijeva teorema (završetak)

Neka je $A \subseteq X$ neki kompaktan skup koji sadrži okolinu točke a. Pokazat ćemo da je familija $\mathcal{R} := \{f|A : f \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{C}(A, Y)$ ekvikontinuirana u a.

Pokažimo najprije da je u topologiji kompaktne konvergencije, *preslikavanje restrikcije* $r : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(A, Y)$ neprekidno. Neka je $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ a $B_C(f|A, \varepsilon) \ni r(f) = f|A$, gdje je C kompaktan podskup od A, bazna okolina u topologiji kompaktne konvergencije na $\mathcal{C}(A, Y)$. C je kompaktan podskup od X, pa je $B_C(f, \varepsilon) \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ okolina točke $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ koju r preslikava u $B_C(f|A, \varepsilon)$. ✓

$\mathcal{H}$ je kompaktan i $r(\mathcal{H}) = \mathcal{R}$, pa je $\mathcal{R}$ kompaktan podskup od $\mathcal{C}(A, Y)$. Ali, jer je A kompaktan, topologija kompaktne konvergencije na $\mathcal{C}(A, Y)$ podudara se s uniformnom topologijom, pa je skup $\mathcal{R}$ potpuno omeđen u uniformnoj metrici na $\mathcal{C}(A, Y)$. Ekvikontinuiranost familije $\mathcal{R}$ sada slijedi iz leme 45.2. □

8 BAIREOVI PROSTORI I TEORIJA DIMENZIJE

Čemu Baireovi[2] prostori?

Definicija Baireovih prostora je sasvim ne-intuitivna i netransparentna. Ali, Baireovo je svojstvo vrlo korisno u primjenama, posebno u analizi i topologiji u dokazima egzistencije.

Dobra vijest je da su svi kompaktni, čak lokalno kompaktni, Hausdorffovi prostori i svi topološki potpuni metrizabilni prostori, Baireovi.

Zato je npr. $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ Baireov (jer je potpun u uniformnoj topologiji), što ćemo, kao ilustraciju, iskoristiti da dokažemo postojanje neprekidnih ali nigdje derivabilnih realnih funkcija.

Druga primjena će biti dokaz kako se svaki n-dimenzionalan kompaktan metrički prostor (npr. kompaktna n-mnogostrukost) može smjestiti u $\mathbb{R}^{2n+1}$.

[2] René-Louis Baire (1874–1932), francuski matematičar

Baireovi prostori

Podskup $A \subseteq X$ ima prazan interior ako je $\operatorname{Int} A = \emptyset$.
Dakle, svaka točka skupa A je gomilište komplementa, $X \setminus A$.
Naprimjer $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ima prazan interior, kao i $[0, 1] \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Definicija

Prostor X je Baireov prostor ako za svaku prebrojivu familiju $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zatvorenih podskupova od X koji svi imaju prazan interior, i njihova unija $\bigcup A_n$ ima prazan interior.

Dakle, u Baireovom prostoru prebrojiva unija „mršavih" zatvorenih skupova ne može biti „debela".

Primjeri

- $\mathbb{Q}$ nije Baireov.
- $\mathbb{N}$ je Baireov.
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *jeste* Baireov (Dokažite!).

Skupovi *prve* i *druge kategorije*

Mnogi rabe sljedeću terminologiju (originalna Baireova):
Podskup $A \subseteq X$ je prve kategorije u X ako je sadržan u nekoj prebrojivoj uniji zatvorenih skupova s praznim interiorom.
U protivnom je A skup druge kategorije u X. U toj terminologiji

X je Baireov prostor ako i samo ako je svaki neprazan otvoren skup u X skup druge kategorije.

Korisnu karakterizaciju Baireovih prostora daje

Lema 48.1 (Baireovo svojstvo pomoću otvorenih skupova)
X je Baireov prostor ako i samo ako je presjek svake prebrojive familije gustih otvorenih podskupova od X, gust u X.

Dokaz: Prijelaz na komplemente i činjenica da skup ima prazan interior akko je njegov komplement gust u X. □

Potpuni metrički i kompaktni Hausdorffovi su Baireovi

Teorem 48.2 (Baireov teorem o kategoriji)
Ako je X kompaktan Hausdorffov ili potpun metrički prostor onda je X Baireov prostor.

Dokaz: Neka su $A_n \subseteq X$ zatvoreni i $\operatorname{Int} A_n = \emptyset$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Treba pokazati da je $\operatorname{Int} \bigcup A_n = \emptyset$, tj. $\forall$ otvoren $U_0 \subseteq X$ je $U_0 \setminus \bigcup A_n \neq \emptyset$.
$\operatorname{Int} A_1 = \emptyset$ pa postoji $y \in U_0 \setminus A_1$. X je regularan pa postoji otvoren skup U_1 t.d. je $y \in U_1 \subseteq \overline{U}_1 \subseteq U_0 \setminus A_1$, tj. $\overline{U}_1 \cap A_1 = \emptyset$.
Ako je X metrički neka je dodatno i $\operatorname{diam} U_1 < 1$.
Induktivno, u otvorenom U_{n-1} postoji točka koja nije u A_n pa odaberemo okolinu U_n te točke t.d. je $\overline{U}_n \subseteq U_{n-1}$, $\overline{U}_n \cap A_n = \emptyset$, i $\operatorname{diam} U_n < \frac{1}{n}$ ako je X metrički.

Tvrdnja: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U}_n \neq \emptyset$.
Iz tvrdnje slijedi teorem, jer za $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U}_n \subseteq U_0$ je $x \notin A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, jer je $\overline{U}_n \cap A_n = \emptyset$, pa je $U_0 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

Završetak dokaza Baireova teorema o kategoriji

Dokaz tvrdnje: 1. slučaj: X je kompaktan Hausdorffov. $\overline{U}_1 \supseteq \overline{U}_2 \supseteq \cdots$ je silazan niz nepraznih zatvorenih skupova, pa je, zbog kompaktnosti prostora X, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U}_n \neq \emptyset$. ✓

2. slučaj: X je potpun metrički prostor.
$\overline{U}_1 \supseteq \overline{U}_2 \supseteq \cdots$ je silazan niz nepraznih zatvorenih skupova kojima dijametri teže k nuli, pa da je presjek neprazan slijedi iz

Lema 48.3 (Cantorov teorem o presjeku)
Neka je $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots$ silazni niz nepraznih zatvorenih skupova u potpunom metričkom prostoru X t.d. $\operatorname{diam} C_n \to 0$. Tada je presjek $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ neprazan i sastoji se od samo jedne točke.

a to smo dokazali u Analizi. □

Neprekidna a nigdje diferencijabilna funkcija

Sljedeći teorem lijepo ilustrira uporabu Baireova svojstva.

Teorem 49.1
Neka je $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji funkcija $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ za koju je $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ za sve x, i t.d. je g neprekidna ali nigdje nije derivabilna.

Strategija dokaza: Prostor $\mathcal{C} := \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ neprekidnih realnih funkcija na $[0,1]$ uz metriku $\rho(f,g) := \max_x |f(x) - g(x)|$, potpun je metrički prostor, pa je Baireov prostor. Za sve $n \in \mathbb{N}$ definirat ćemo skupove $U_n \subseteq \mathcal{C}$ koji su otvoreni i gusti u $\mathcal{C}$, i takvi su da funkcije koje pripadaju presjeku $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ nisu nigdje derivabilne. Kako je $\mathcal{C}$ Baireov prostor, taj presjek je gust u $\mathcal{C}$, odakle slijedi teorem.

Konstrukcija skupova U_n

Neka je $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Za $x \in [0,1]$ i $0 < h \leq \frac{1}{2}$ barem jedan od brojeva $x+h$ i $x-h$ leži u $[0,1]$, pa je definiran barem jedan od kvocijenata $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|$ i $\left|\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right|$. Neka je $\Delta f(x,h)$ onaj koji je veći (ili onaj koji je definiran ako drugi nije).

Napomena: Ako postoji derivacija $f'(x)$ onda je $|f'(x)| = \lim_{h\to 0} \Delta f(x,h)$. Mi tražimo neprekidnu funkciju za koju ovaj limes *ne postoji*. Konstruirat ćemo neprekidnu funkciju f t.d. za svaki x postoji niz $h_n \to 0$ t.d. $\Delta f(x,h_n) \to +\infty$.

Neka je $\Delta_h f := \inf_{x\in[0,1]} \Delta f(x,h)$. Za $n \geq 2$ skup U_n definiramo kao skup svih funkcija f za koje postoji $h \leq \frac{1}{n}$ t.d. je $\Delta_h f > n$.

Ostaje pokazati sljedeće tvrdnje (elementarno, ali ima posla):

(1) Funkcije u presjeku $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ nisu nigdje derivabilne.

(2) Skupovi U_n su otvoreni u $\mathcal{C}$.

(3) Skupovi U_n su gusti u $\mathcal{C}$. (za detalje dokaza vidi [Munkres]) □

Uvod u teoriju dimenzije

Kao još jednu primjenu Baireova teorema dokazat ćemo Menger-Nöbelingov teorem kako se svaki m-dimenzionalan kompaktan metrički prostor može smjestiti u $\mathbb{R}^{2m+1}$. Ali najprije trebamo pojam dimenzije, i to Lebesgueove dimenzije pokrivanja.

Definicija

Za familiju $\mathcal{A}$ podskupova od X kažemo da ima red $m+1$ ako postoji točka koja se nalazi u $m+1$ članu od $\mathcal{A}$, a nikoja se točka ne nalazi u $m+2$ člana. Dakle, nikojih se $m+2$ članova ne siječe, ali postoji $(m+1)$-člana potfamilija od $\mathcal{A}$ koja ima neprazan presjek.

Definicija (Dimenzija pokrivanja)

Prostor X je konačnodimenzionalan ako postoji $m \in \mathbb{N}$ t.d. svaki otvoren pokrivač od X ima otvoreno profinjenje reda $\leq m+1$. Najmanji takav m je topološka dimenzija od X, oznaka $\dim X$.

Primjeri u $\mathbb{R}$

Za svaki kompaktan $X \subseteq \mathbb{R}$ je $\dim X \leq 1$

Definirajmo dvije familije otvorenih intervala:
$\mathcal{A}_1 := \{\langle n, n+1\rangle : n \in \mathbb{Z}\}$ i $\mathcal{A}_0 := \{\langle n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\rangle : n \in \mathbb{Z}\}$.
Familija $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_0$ je otvoren pokrivač od $\mathbb{R}$ reda 2 skupovima dijametra 1.
Neka je $\mathcal{C}$ otvoren pokrivač od X i neka je δ njegov Lebesgueov broj. Preslikavanje $x \mapsto \frac{1}{2}\delta\, x$ je homeomorfizam $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koji otvoren pokrivač $\mathcal{A}$ prevodi u otvoren pokrivač od $\mathbb{R}$ skupovima dijametra $\frac{1}{2}\delta$. Red tog pokrivača je 2 i njegova restrikcija na X profinjuje $\mathcal{C}$.

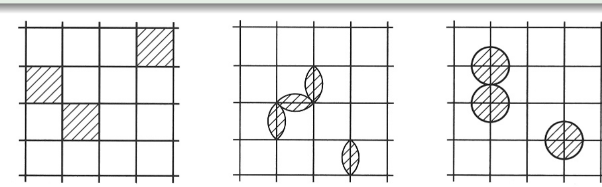
Dimenzija segmenta jednaka je 1

Znamo da je $\dim[0,1] \leq 1$. Pokažimo da je red svakog otvorenog pokrivača $\mathcal{B}$ koji profinjenje $\mathcal{A} := \{[0,1\rangle, \langle 0,1]\}$, barem 2.
$\mathcal{B} > \mathcal{A}$ pa ima barem dva člana. Neka je jedan od njih U i neka je V unija ostalih. Da je red $\mathcal{B} < 1$ bilo bi $[0,1] = U \sqcup V \Rightarrow\!\Leftarrow [0,1]$ povezan. □

Primjer u $\mathbb{R}^2$

Za svaki kompaktan $X \subseteq \mathbb{R}^2$ je $\dim X \leq 2$

Definiramo tri familije disjunktnih otvorenih skupova:
$\mathcal{A}_2 := \{\langle n, n+1\rangle \times \langle m, m+1\rangle : n, m \in \mathbb{Z}\}$; (otvoreni kvadrati)
$\mathcal{A}_1$ je familija disjunktnih otvorenih „pažljivo nadebljanih" intervala oblika $\{n\} \times \langle m, m+1\rangle$ i $\langle n, n+1\rangle \times \{m\}$, $n, m \in \mathbb{Z}$; (srednja slika)
$\mathcal{A}_0$ je familija otvorenih krugova radijusa $\frac{1}{2}$ oko (n,m), $n, m \in \mathbb{Z}$.
S familijom $\mathcal{A} := \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_0$ radimo isti trik kao ranije u $\mathbb{R}$, samo s homeomorfizmom $(x,y) \mapsto \frac{1}{3}\delta\,(x,y)$ prostora $\mathbb{R}^2$.



$\mathcal{A}_2$ $\mathcal{A}_1$ $\mathcal{A}_0$

Dimenzija kompaktnih podskupova od $\mathbb{R}^m$

Više-manje je jasno na koji način treba poopćiti konstrukciju iz prethodnih primjera kako bi se dokazao općenit teorem.

Teorem 50.6

Za svaki kompaktan potprostor $X \subseteq \mathbb{R}^m$ je $\dim X \leq m$.

Detalje dokaza vidi u [Munkres].

Dimenzija zatvorenog potprostora

Dokažimo sada nekoliko osnovnih činjenica o dimenziji.

Teorem 50.1

Ako je X konačnodimenzionalan onda je svaki njegov zatvoren potprostor $Y \subseteq X$ konačnodimenzionalan i $\dim Y \leq \dim X$.

Dokaz: Neka je $\dim X = m$ i neka je $\mathcal{A}$ pokrivač od Y otvorenim podskupovima od Y. Za svaki $A \in \mathcal{A}$ neka je A' otvoren podskup od X t.d. je $A = A' \cap Y$, i neka je $\mathcal{A}' := \{A' : A \in \mathcal{A}\} \cup \{X \setminus Y\}$. Neka je $\mathcal{B}$ otvoren pokrivač od X koji profinjuje $\mathcal{A}'$ i reda je $\leq m+1$. Tada je familija $\{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ traženi pokrivač od Y koji profinjuje $\mathcal{A}$ i reda je $\leq m+1$. □

Dimenzija unije

Teorem 50.2

Neka je $X = Y \cup Z$ gdje su Y i Z zatvoreni konačnodimenzionalni potprostori od X. Tada je $\dim X = \max\{\dim Y, \dim Z\}$.

Dokaz: Neka je $m := \max\{\dim Y, \dim Z\}$. Dokazat ćemo da je $\dim X \leq m$, pa će iz prethodnog teorema slijediti $\dim X = m$.

1. korak. Pokažimo da svaki otvoren pokrivač $\mathcal{A}$ od X ima otvoreno profinjenje koje je u točkama od Y reda $\leq m+1$, tj. svaka točka iz Y leži u najviše $m+1$ članova tog profinjenja.

Familija $\{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$ je otvoren pokrivač od Y, pa ima otvoreno profinjenje $\mathcal{B}$ reda $\leq m+1$. Za svaki $B \in \mathcal{B}$ odaberimo B' otvoren u X t.d. je $B = B' \cap Y$ i odaberimo $A_B \in \mathcal{A}$ t.d. je $B \subseteq A_B$. Tada je familija $\mathcal{C} := \{B' \cap A_B : B \in \mathcal{B}\} \cup \{A \setminus Y : A \in \mathcal{A}\}$ traženi otvoren pokrivač od X. ✓

Dokaz teorema o dimenziji unije

2. korak: $\dim X \leq m$. Neka je $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač od X i neka je $\mathcal{B}$ otvoren pokrivač od X koji profinjuje $\mathcal{A}$ i u točkama od Y ima red $\leq m+1$. Sada odaberemo otvoren pokrivač $\mathcal{C}$ od X koji profinjuje $\mathcal{B}$ i u točkama od Z ima red $\leq m+1$. Za svaki $C \in \mathcal{C}$ odaberimo $B_C \in \mathcal{B}$ t.d. je $C \subseteq B_C$, i neka je $D(B) := \bigcup\{C \in \mathcal{C} : B_C = B\} \subseteq B$.

Tvrdnja: $\mathcal{D} := \{D(B) : B \in \mathcal{B}\}$ je otvoren pokrivač od X koji profinjuje $\mathcal{A}$.

$\mathcal{D}$ profinjuje $\mathcal{A}$ jer je $D(B) \subseteq B$ za sve $B \in \mathcal{B}$, a $\mathcal{B}$ profinjuje $\mathcal{A}$. ✓

$\mathcal{D}$ pokriva X jer $\mathcal{C}$ pokriva X, a $C \subseteq D(B_C)$ za sve $C \in \mathcal{C}$. ✓

Tvrdnja: red od $\mathcal{D}$ je $\leq m+1$. Neka je $x \in D(B_1) \cap \cdots \cap D(B_k)$, gdje su skupovi $D(B_i)$ međusobno različiti, pa su onda i B_i međusobno različiti (definicija skupova $D(B)$!). Za svaki i odaberimo $C_i \in \mathcal{C}$ t.d. je $x \in C_i$ i $B_{C_i} = B_i$. Skupovi C_i su međusobno različiti jer su B_i takvi, i $x \in C_1 \cap \cdots \cap C_k \subseteq D(B_1) \cap \cdots \cap D(B_k) \subseteq B_1 \cap \cdots \cap B_k$. Ako je $x \in Y$ onda je $k \leq m+1$ jer je $\mathcal{B}$ reda $\leq m+1$ u točkama od Y. Ako je $x \in Z$ onda je $k \leq m+1$ jer je $\mathcal{C}$ reda $\leq m+1$ u točkama od Z. □

U teoremu o uniji zatvorenost je potrebna!

Korolar 50.3

Neka je $X = Y_1 \cup \cdots \cup Y_k$ gdje su svi Y_i konačnodimenzionalni zatvoreni potprostori od X. Tada je $\dim X = \max\{\dim Y_1, \ldots, \dim Y_k\}$.

U prethodnom teoremu i korolaru zatvorenost potprostora je potrebna

$\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ su 0-dimenzionalni potprostori od $\mathbb{R}$, dok je prostor $\mathbb{R}$ 1-dimenzionalan.

Dimenzija kompaktnih mnogostrukosti

Dimenzije kompaktnih 1- i 2-mnogostrukosti

- Svaka kompaktna 1-mnogostrukost je konačna unija segmenata, pa je 1-dimenzionalna.
- Svaka kompaktna 2-mnogostrukost je konačna unija zatvorenih krugova, pa je dimenzije ≤ 2.
  Da je dimenzije točno 2 — mnogo je teže dokazati.

Jednako tako, iz teorema 50.6, čiji smo dokaz ranije opisali, i teorema o dimenziji unije, tj. korolara 50.3, dobivamo

Korolar 50.7

Svaka kompaktna m-mnogostrukost ima dimenziju $\leq m$. □

Zapravo, dimenzija svake kompaktne m-mnogostrukosti jednaka je m, ali je to mnogo teže dokazati.

Geometrijska nezavisnost i opći položaj

Za dokaz glavnog cilja ovog paragrafa, teorema o smještavanju m-dimenzionalnih kompakata u $\mathbb{R}^{2m+1}$, trebamo još neke stvari.

Definicija

Skup točaka $\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k\} \subseteq \mathbb{R}^N$ je geometrijski nezavisan ako su vektori $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0$ linearno nezavisni, tj. vrijedi da ako je $\sum_{i=0}^k \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ i $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 0$ onda je $\alpha_i = 0$ za sve i.

Definicija

Skup točaka $A \subseteq \mathbb{R}^N$ je u općem položaju u $\mathbb{R}^N$ ako je svaki podskup od A koji se sastoji od najviše $N+1$ točke, geometrijski nezavisan.

Dakle, nikoje tri točke iz A nisu kolinearne, nikoje četiri nisu komplanarne, itd. sve do $N+1$.

Lema o općem položaju

Lema 50.4

Neka je $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ konačan skup. Tada za svaki $\delta > 0$ postoji skup $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ točaka u općem položaju u $\mathbb{R}^N$ t.d. je $|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i| < \delta$ za sve i.

Dokaz: Neka je $\mathbf{y}_1 := \mathbf{x}_1$. Induktivno, pretpostavimo da već imamo skup $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_j$ točaka u općem položaju. Svaki njegov podskup od najviše N elemenata je geometrijski nezavisan pa razapinje k-ravninu za neki $k < N$. Svaka od tih ravnina ima prazan interior u $\mathbb{R}^N$ pa, jer ih ima samo konačno mnogo, i njihova unija ima prazan interior (jer je $\mathbb{R}^N$ Baireov prostor). Odaberimo točku $\mathbf{y}_{j+1} \in B(\mathbf{x}_{j+1}, \delta)$ koja ne leži niti u jednoj od tih ravnina. Lako se vidi da je tada skup $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{j+1}\}$ u općem položaju u $\mathbb{R}^N$. □

Teorem o smještenju

Teorem 50.5 (Menger, Nöbeling, Pontrjagin-Tolstowa, Lefschetz)

Svaki se kompaktan metrički prostor dimenzije m može smjestiti u $\mathbb{R}^{2m+1}$.

Dokaz koji ćemo prikazati rabi funkcijske prostore i Baireov teorem, a potječe od Witolda Hurewicza.

Neka je $N := 2m+1$. Uzmimo na $\mathbb{R}^N$ kvadratičnu metriku $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \max_i |x_i - y_i|$, i pripadnu sup-metriku na $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$, $\rho(f,g) = \sup_x |f(x) - g(x)|$. Tada je $(\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N), \rho)$ potpun metrički prostor.

(X,d) je kompaktan, pa je za neprekidnu funkciju $f\colon X \to \mathbb{R}^N$ dobro definiran broj $\Delta(f) := \sup_{z\in f(X)} \operatorname{diam} f^{-1}(z)$.

$\Delta(f)$ pokazuje koliko f „odstupa" od injekcije: $\Delta(f) = 0$ ako i samo ako je f injekcija.

Za sve $\varepsilon > 0$ definiramo skupove $U_\varepsilon := \{f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N) : \Delta(f) < \varepsilon\}$.

Dokaz teorema o smještenju

Teorem će biti dokazan ako dokažemo sljedeće dvije tvrdnje:

Tvrdnja 1: U_ε su otvoreni podskupovi od $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N)$.

Tvrdnja 2: U_ε su gusti u $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N)$.

Naime, $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N)$ je potpun metrički, stoga i Baireov prostor, pa odavde slijedi da je i presjek $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{1/n}$ gust u $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N)$, dakle i neprazan. Tada za $f \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{1/n}$ vrijedi $\Delta(f) < \frac{1}{n}$ za sve n, tj. $\Delta(f) = 0$. Zato je f neprekidna injekcija, a jer je X kompaktan, f je smještenje. Time je teorem dokazan.

Ovaj dokaz pokazuje i više. Naime, jer je presjek $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{1/n}$ ne samo neprazan, već i gust u $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N)$, to se u svakoj okolini neprekidne funkcije $X \to \mathbb{R}^N$ nalazi i smještenje, tj. vrijedi

Teorem (*Pravi* teorem o smještenju)

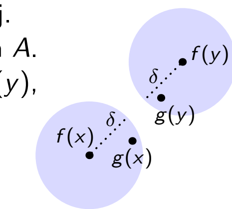
Neka je X kompaktan metrički prostor dimenzije m. Tada za svako neprekidno preslikavanje $f\colon X \to \mathbb{R}^{2m+1}$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji smještenje $g\colon X \to \mathbb{R}^{2m+1}$ t.d. je $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ za sve $x \in X$.

Dokažimo sada navedene tvrdnje

1. $U_\varepsilon \subseteq \mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N)$ je otvoren. Neka je $f \in U_\varepsilon$. Odaberimo $b \in \mathbb{R}$ t.d. je $\Delta(f) < b < \varepsilon$. Ako je $f(x) = f(y) =: z$, onda su $x, y \in f^{-1}(z)$, pa je $d(x,y) \leq \Delta(f) < b$. Stoga je funkcija $(x,y) \mapsto |f(x) - f(y)|$ pozitivna na skupu $A := \{(x,y) : d(x,y) \geq b\}$. Skup $A \subseteq X \times X$ je zatvoren, onda i kompaktan, pa neka je $\delta := \frac{1}{2}\min_{(x,y)\in A} |f(x) - f(y)| > 0$.

Tvrdnja: $B_\rho(f,\delta) \subseteq U_\varepsilon$, pa je U_ε otvoren.

Neka je $g \in B_\rho(f,\delta)$, tj. $\rho(f,g) < \delta$. Za $(x,y) \in A$ je $|f(x) - f(y)| \geq 2\delta$, pa je $|g(x) - g(y)| > 0$, tj. funkcija $(x,y) \mapsto |g(x) - g(y)|$ je pozitivna na A. Stoga, ako su točke $x, y \in X$ t.d. je $g(x) = g(y)$, tj. $|g(x) - g(y)| = 0$, onda $(x,y) \notin A$, pa je $d(x,y) < b$. Zbog toga je $\Delta(g) \leq b < \varepsilon$, tj. $g \in U_\varepsilon$. ✓



Dokaz tvrdnje 2

2. U_ε je gust u $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N)$, tj. za $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N)$ i $\delta > 0$ treba naći $g \in U_\varepsilon$ t.d. je $\rho(g,f) < \delta$.

Pokrijmo X s konačno mnogo otvorenih skupova $V_1, \ldots, V_n$ t.d. je

(1) $\operatorname{diam} V_i < \frac{\varepsilon}{2}$,

(2) $\operatorname{diam} f(V_i) < \frac{\delta}{2}$,

(3) red pokrivača $\{V_1, \ldots, V_n\}$ je $\leq m+1$,

i neka je $\{\phi_i\}$ particija jedinice podređena pokrivaču $\{V_i\}$. Za svaki i odaberimo točku $x_i \in V_i$, i zatim odaberimo točke $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^N$ t.d. je $|\mathbf{z}_i - f(x_i)| < \frac{\delta}{2}$ i da je skup točaka $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n\}$ u općem položaju u $\mathbb{R}^N$. Definirajmo $g\colon X \to \mathbb{R}^N$ formulom

$$g(x) := \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)\,\mathbf{z}_i.$$

Tvrdnja: g je tražena funkcija.

Dokaz tvrdnje 2 (nastavak)

$\rho(f,g) < \delta$: Za svaki $x \in X$ vrijedi

$$g(x) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)\,\mathbf{z}_i - \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)\,f(x),$$

pa je

$$g(x) - f(x) = \sum \phi_i(x)(\mathbf{z}_i - f(x_i)) + \sum \phi_i(x)(f(x_i) - f(x)).$$

Prvi sumand je $< \frac{\delta}{2}$ jer je $|\mathbf{z}_i - f(x_i)| < \frac{\delta}{2}$ za sve i, a $\sum \phi_i(x) = 1$.
Drugi je sumand $< \frac{\delta}{2}$ jer ako je i takav da je $\phi_i(x) \neq 0$, onda je $x \in V_i$, a kako je $\operatorname{diam} f(V_i) < \frac{\delta}{2}$ to je $|f(x_i) - f(x)| < \frac{\delta}{2}$.
Stoga za svaki $x \in X$ vrijedi $|g(x) - f(x)| < \delta$ pa je i $\rho(g,f) < \delta$. ✓

Završetak dokaza teorema o smještenju

$g \in U_\varepsilon$, tj. $\Delta(g) < \varepsilon$:
Neka su $x, y \in X$ t.d. je $g(x) = g(y)$, tj. $\sum_{i=1}^{n} (\phi_i(x) - \phi_i(y))\,\mathbf{z}_i = \mathbf{0}$.
Pokrivač $\{V_i\}$ je reda $\leq m+1$ pa je najviše $m+1$ brojeva $\phi_i(x) \neq 0$, i isto tako za $\phi_i(y)$. Dakle, u sumi

$$\sum_{i=1}^{n} (\phi_i(x) - \phi_i(y))\,\mathbf{z}_i \qquad (*)$$

najviše je $2m+2$ sumanada različito od 0.
Točke $\mathbf{z}_i$ su u općem položaju u $\mathbb{R}^N$ pa je svaki skup od najviše $N+1 = 2m+2$ od tih točaka, geometrijski nezavisan.
Kako je suma koeficijenata u $(*)$ jednak nuli, zbog geometrijske nezavisnosti svi su koeficijenti jednaki nuli, tj $\phi_i(x) = \phi_i(y)$ za sve i.
Za neki i je $\phi_i(x) > 0$, pa je $x \in V_i$. Ali tada je i $\phi_i(y) > 0$ pa je i $y \in V_i$. Stoga je $d(x,y) \leq \operatorname{diam} V_i < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, pa je $\Delta(g) < \varepsilon$. □

Što zasad još ne možemo dokazati?

Kao neposredne posljedice teorema o smještenju, dobivamo

Korolar 50.8

Svaka se kompaktna m-mnogostrukost može smjestiti u $\mathbb{R}^{2m+1}$. □

Korolar 50.9

Kompaktan metrizabilan prostor X može se smjestiti u neki euklidski prostor $\mathbb{R}^N$ akko je X konačnodimenzionalan. □

Većinu stvari dokazanih u ovom paragrafu nije preteško dokazati i u nekompaktnom slučaju. Ali, što nije lako dokazati je da

- dimenzija m-mnogostrukosti *jednaka* je m, i
- $2m+1$ je najmanja dimenzija euklidskog prostora u koji se može smjestiti *svaka* m-mnogostrukost.

Za obje ove činjenice potrebne su tehnike algebarske topologije.