ALGEBARSKA TOPOLOGIJA 2011/12

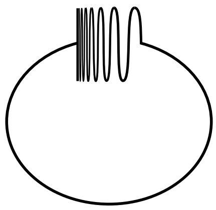
Sedma tjedna zadaća

14. studenoga 2011.

1. Neka su $p\colon \bar{X} \to X$ i $q\colon \bar{Y} \to Y$ natkrivajući prostori. Pokaži da je onda i njihov produkt $p \times q\colon \bar{X} \times \bar{Y} \to X \times Y$ natkrivajući prostor.

2. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^3$ prostor koji se sastoji od sfere $\mathbb{S}^2$ i jednog njezinog dijametra. Konstruiraj jednostavno povezan natkrivajući prostor za X.

3. Neka je $\mathbf{W} \subseteq \mathbb{R}^2$ ***Varšavska kružnica***— potprostor od $\mathbb{R}^2$ koji se sastoji od dijela grafa funkcije $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, segmenta $[-1, 1]$ na osi y i luka koji spaja ta dva komada (vidi sliku).



Stezanjem segmenta $[-1, 1]$ na osi y u točku, dobivamo kvocijentno preslikavanje $q\colon \mathbf{W} \to \mathbb{S}^1$. Pokaži da se preslikavanje q ne može podići do preslikavanja $\bar{q}\colon \mathbf{W} \to \mathbb{R}$ u natkrivajući prostor $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, iako je $\pi_1(W) = 0$. Ne kosi li se to s propozicijom 64.3?

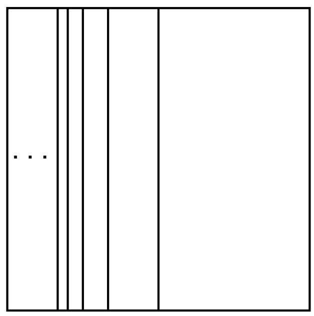
4. Neka je $p\colon \widetilde{X} \to X$ natkrivajuće preslikavanje. Dokaži da je p otvoreno preslikavanje i da X ima kvocijentnu topologiju s obzirom na p.

5. Neka je $p\colon \widetilde{X} \to X$ natkrivajuće preslikavanje a $\varphi\colon \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ neprekidno preslikavanje za koje vrijedi $p \circ \varphi = p$, i neka je prostor $\widetilde{X}$ putevima povezan. Koristeći se samo teoremom o jedinstvenosti podizanja puteva, dokaži da ako postoji točka $x_0 \in \widetilde{X}$ takva da je $\varphi(x_0) = x_0$ onda je $\varphi = \mathbb{1}_{\widetilde{X}}$.

6. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^2$ rub kvadrata $[0, 1] \times [0, 1]$ zajedno s vertikalnim segmentima duljine 1 u točkama $x = {}^1\!/_2, {}^1\!/_3, {}^1\!/_4, \ldots$.

   (*a*) Pokaži da za svako natkrivajuće preslikavanje $p\colon \widetilde{X} \to X$ postoji okolina lijevog ruba od X koja se homeomorfno podiže u $\widetilde{X}$.

   (*b*) Dokaži da ne postoji jednostavno povezano natkrivanje prostora X.



7. Neka su $\widetilde{X}$ i $\widetilde{Y}$ jednostavno povezani natkrivajući prostori putevima povezanih, lokalno putevima povezanih prostora X i Y. Dokaži da ako su prostori X i Y homotopski ekvivalentni, onda su i prostori $\widetilde{X}$ i $\widetilde{Y}$ homotopski ekvivalentni.

8. Neka je X putevima povezan, lokalno putevima povezan prostor takav da je njegova fundamentalna grupa konačna. Dokaži da je tada svako preslikavanje $f\colon X \to \mathbb{S}^1$ nulhomotopno. [*Uputa:* Koristi se natkrivanjem $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$.]

9. Odredi natkrivanje torusa $\mathbf{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ koje je određeno podgrupom $3\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \pi_1(\mathbf{T})$.
   [*Uputa:* Univerzalno natkrivanje torusa je $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbf{T}$ (vidi 1. zadatak).]