ALGEBARSKA TOPOLOGIJA 2011/12

Prva tjedna zadaća

12. rujna 2011.

1. Definiraj eksplicite jednu deformacijsku retrakciju prostora $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ na $\mathbb{S}^{n-1}$.

2. Definiraj eksplicite jednu deformacijsku retrakciju torusa bez jedne točke na graf koji se sastoji od dvije kružnice koje se sijeku u jednoj točki (paralela i meridijanska kružnica torusa).

3. Promotrimo sljedeće potprostore od $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} X = &\{(x,y,z) : x^2+y^2=1,\ 0 \le z \le 2\} \cup \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1,\ z=0\} \\ &\cup \{(0, \cos t, 2+\sin t) : 0 \le t \le \pi\} \qquad \text{(hamper, sić)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y = &\{(x,y,z) : x^2+y^2=1,\ 0 \le z \le 2\} \cup \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1,\ z=0\} \\ &\cup \{(0, 1+\cos t, 1+\sin t) : -\pi/2 \le t \le \pi/2\} \qquad \text{(šalica)} \end{aligned}$$

Dokaži da X i Y nisu homeomorfni ali da imaju isti homotopski tip.

4. (*a*) Pokaži da je kompozicija homotopskih ekvivalencija $X \to Y$ i $Y \to Z$ homotopska ekvivalencija $X \to Z$, pa zaključi kako je homotopska ekvivalencija zaista jedna relacija ekvivalencije.

   (*b*) Pokaži kako je „biti homotopan” relacija ekvivalencije u skupu svih preslikavanja $X \to Y$.

   (*c*) Pokaži kako je preslikavanje koje je homotopno homotopskoj ekvivalenciji i samo homotopska ekvivalencija.

5. ***Slaba deformacijska retrakcija*** prostora X u potprostor A je homotopija $h_t\colon X \to X$ takva da je $f_0 = \mathbb{1}_X$, $f_1(X) \subseteq A$ i $f_t(A) \subseteq A$ za sve t. Dokaži da ako je A slabi deformacijski retrakt od X onda je inkluzija $A \hookrightarrow X$ homotopska ekvivalencija.

6. Pokaži da ako se prostor X deformacijski retraktira na točku $x_0 \in X$, onda za svaku okolinu U točke x_0 postoji okolina $V \subseteq U$ od x_0 takva da je inkluzija $V \hookrightarrow U$ nulhomotopna.

7. (*a*) Pokaži da je svaki retrakt kontraktibilnog prostora kontraktibilan.

   (*b*) Pokaži da ako X ima svojstvo fiksne točke i A je retrakt od X onda i A ima svojstvo fiksne točke.

8. (*a*) Dokaži da je prostor X kontraktibilan ako i samo ako je svako preslikavanje $X \to Y$, za proizvoljan prostor Y, nulhomotopno.

   (*b*) Dokaži da je prostor X kontraktibilan ako i samo ako je svako preslikavanje $Y \to X$, za proizvoljan prostor Y, nulhomotopno.

9. Neka je $f\colon X \to Y$ preslikavanje. Dokaži da ako postoje preslikavanja $g, h\colon Y \to X$ takva da je $hf \simeq \mathbb{1}_X$ i $fg \simeq \mathbb{1}_Y$, onda je f homotopska ekvivalencija.

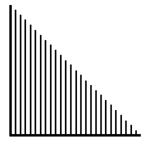
   Općenitije, pokaži da je f homotopska ekvivalencija i u slučaju kada su kompozicije hf i fg samo homotopske ekvivalencije.

10. Pokaži kako homotopska ekvivalencija $f\colon X \to Y$ inducira bijekciju među skupovima komponenata putevne povezanosti prostora X i Y, i kako je restrikcija preslikavanja f na svaku komponentu putevne povezanosti od X homotopska ekvivalencija na pridruženu komponentu putevne povezanosti prostora Y.

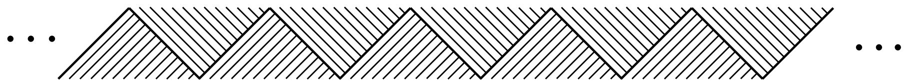
    Dokaži također i odgovarajuću tvrdnju za komponente povezanosti umjesto komponenata putevne povezanosti.

    Zaključi da ako se u prostoru X komponente povezanosti i komponente putevne povezanosti podudaraju, onda isto vrijedi i za svaki prostor Y koji je homotopski ekvivalentan prostoru X.

11. (*a*) Neka je X potprostor od $\mathbb{R}^2$ koji se sastoji od horizontalnog segmenta $[0,1] \times \{0\}$ zajedno s vertikalnim segmentima $\{q\} \times [0, 1-q]$ za sve racionalne brojeve q iz $[0,1]$. Pokaži kako se X deformacijski retraktira na svaku točku segmenta $[0,1] \times \{0\}$, ali ne i na nikoju drugu točku. [*Uputa:* vidi zadatak 6.]

    (*b*) Neka je Y potprostor od $\mathbb{R}^2$ koje je sastavljen od beskonačno mnogo kopija prostora X na način kako je prikazano na slici:

    Pokaži kako je prostor Y kontraktibilan ali se ne može deformacijski retraktirati ni na koju točku.

    (*c*) Neka je Z cik-cak potprostor od Y homeomorfan prostoru $\mathbb{R}$ (na slici označen debljom crtom). Pokaži da postoji slaba deformacijska retrakcija od Y u Z (vidi zadatak 5), ali ne i prava deformacijska retrakcija.