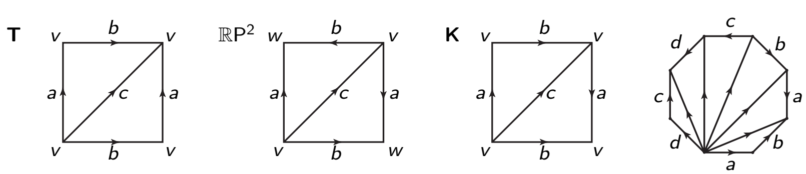
5 HOMOLOGIJA

- Δ-kompleksi
- Simplicijalna homologija
- Singularna homologija
- Homotopska invarijantnost
- Egzaktni nizovi
- Relativne homološke grupe
- Isijecanje
- Prirodnost
- Ekvivalencija simplicijalne i singularne homologije
- Mayer-Vietorisov niz
- Primjene

Rastav ploha na trokute

Δ-kompleksi su mala generalizacija uobičajenijeg pojma *simplicijalni kompleksi* a uveli su ih (pod drugim nazivom) Eilenberg i Zilber 1950.

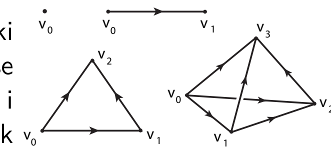
Torus, projektivnu ravninu i Kleinovu bocu možemo dobiti od po dva trokuta odgovarajućom identifikacijom stranica:



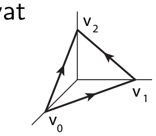
I svaki se poligon može razrezati na trokute, pa se i svaka ploha može sastaviti od trokutova. A i mnogi općenitiji 2-dimenzionalni prostori koji nisu plohe, mogu se sastaviti od trokutova.

Δ-kompleksi su generalizacija ovakvih rastava.

Simpleksi



Konveksna ljuska skupa od $n+1$ geometrijski nezavisnih točaka $v_0, \dots, v_n$ u $\mathbb{R}^m$ naziva se ***n-simpleks***. Za homologiju važan će biti i redoslijed vrhova, pa će „n-simpleks" uvijek značiti „n-simpleks sa zadanim uređajem vrhova", i označivat ćemo ga s $[v_0, \dots, v_n]$.



n-simpleks $\Delta^n := \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_i t_i = 1, t_i \geq 0\}$ nazivamo ***standardni n-simpleks***.

Postoji prirodan linearni homeomorfizam $\Delta^n \xrightarrow{(t_0,\dots,t_n)\mapsto\sum_i t_i v_i} [v_0, \dots, v_n]$.
Koeficijenti t_i su ***baricentričke koordinate*** točke $\sum_i t_i v_i \in [v_0, \dots, v_n]$.
Simplekse razapete nekim podskupom od n vrhova nazivamo ***stranice***.
Uređaj vrhova podsimpleksa je *uvijek* naslijeđen od polaznog simpleksa.
Unija svih (pravih) stranica je ***rub*** od Δ^n, oznaka $\partial\Delta^n$,
a nutrinu $\mathring{\Delta}^n := \Delta^n \setminus \partial\Delta^n$ nazivamo ***otvoreni simpleks***.

Δ-kompleksi

Definicija

Struktura Δ-kompleksa na prostoru X je familija preslikavanja $\sigma_\alpha \colon \Delta^n \to X$ (n ovisi o α) t.d. vrijedi:

(*i*) Restrikcija $\sigma_\alpha | \mathring{\Delta}^n$ je injekcija i svaka točka od X je slika točno jedne takve restrikcije.

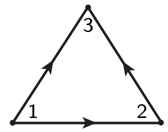
(*ii*) Svaka restrikcija od σ_α na stranicu od Δ^n je jedno od preslikavanja $\sigma_\beta \colon \Delta^{n-1} \to X$.
(Ovdje su stranice od Δ^n identificirane s Δ^{n-1} kanonskim linearnim homeomorfizmom koji čuva uređaj vrhova!)

(*iii*) Skup $A \subseteq X$ je otvoren akko je $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ otvoren u Δ^n za sve σ_α.

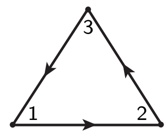
Odavde slijedi da se Δ-kompleks može dobiti od familije disjunktnih simpleksa identifikacijom raznih podsimpleksa razapetim podskupovima vrhova, korištenjem kanonskih linearnih homeomorfizama koji čuvaju uređaj vrhova.

Paziti na orijentaciju!

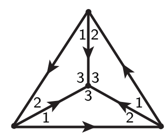
Ako u trokutu identificiramo sve tri stranice uz orijentaciju određenu uređajem vrhova, dobit ćemo Δ-kompleks *Borsukovu šubaru* (*dunce hat*).



Identificiramo li u trokutu stranice u cikličkom uređaju, kvocijentni prostor nema strukturu Δ-kompleksa.



Ali ako trokut podijelimo na manje trokute kao na trećoj slici, pa onda identificiramo stranice velikog trokuta u cikličkom uređaju, dobit ćemo Δ-kompleks.



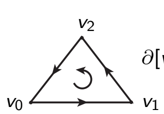
Lako se vidi da su Δ-kompleksi Hausdorffovi prostori. Zbog (*iii*) su restrikcije $\sigma_\alpha|\mathring{\Delta}^n$ homeomorfizmi na sliku, pa je ta slika otvoren simpleks u X. Može se pokazati da su ti otvoreni simpleksi $\sigma_\alpha(\mathring{\Delta}^n)$ ćelije e^n_α CW strukture na X s karakterističnim preslikavanjima σ_α.

Simplicijalna homologija

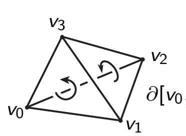
Za Δ-kompleks X neka je $\Delta_n(X)$ slobodna abelova grupa kojoj bazu čine svi otvoreni n simpleksi e^n_α u X. Elemente od $\Delta_n(X)$ zovemo ***n*-lanci** i možemo ih zapisivati kao formalne sume $\sum_\alpha n_\alpha e^n_\alpha$ s koeficijentima $n_\alpha \in \mathbb{Z}$, ili, ekvivalentno, kao $\sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha$, gdje je $\sigma_\alpha \colon \Delta^n \to X$ karakteristično preslikavanje od e^n_α, i čija je slika zatvorenje od e^n_α.

Rub simpleksa $[v_0, \dots, v_n]$ sastoji se od svih stranica $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ (stranica nasuprot v_i). Pokazalo se da je za rub korisnije umjesto sume uzeti alterniranu sumu $\sum_i (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$.

$\partial[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0]$



$\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$



$$\partial[v_0, v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2, v_3] - [v_0, v_2, v_3] + [v_0, v_1, v_3] - [v_0, v_1, v_2]$$

Homomorfizam ruba

Homomorfizam ruba $\partial_n \colon \Delta_n(X) \to \Delta_{n-1}(X)$ zadan je na bazi formulom

$$\partial_n(\sigma_\alpha) := \textstyle\sum_i (-1)^i \sigma_\alpha|_{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]}.$$

Lema 18.1 (osnovno svojstvo homomorfizma ruba)

Kompozicija $\Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \Delta_{n-2}$ *je nul-homomorfizam.*

Dokaz: $\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]}$ pa je

$$\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) = \sum_{j<i} (-1)^i (-1)^j \sigma|_{[v_0,\dots,\hat{v}_j,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]} + \sum_{j>i} (-1)^i (-1)^{j-1} \sigma|_{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,\hat{v}_j,\dots,v_n]}.$$

Zamijenimo li u drugom sumandu $i \leftrightarrow j$, sumandi se pokrate. $\square$

Homologija lančanog kompleksa

Niz abelovih grupa i homomorfizama

$$\mathcal{C} \qquad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

t.d. je $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ za sve n naziva se ***lančani kompleks***.
Elementi podgrupe $\operatorname{Ker} \partial_n$ nazivaju se ***n*-ciklusi** a elementi podgrupe $\operatorname{Im} \partial_{n+1}$ ***n*-rubovi**, a zbog $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ je $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subseteq \operatorname{Ker} \partial_n$.
Kvocijentna grupa $H_n := \operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$ naziva se ***n*-ta homološka grupa** lančanog kompleksa $\mathcal{C}$. Elementi od H_n nazivaju se ***homološke klase***, oznaka $[z]$, $z \in \operatorname{Ker} \partial$, a za dva ciklusa koji pripadaju istoj klasi kaže se da su ***homologni***.

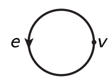
Za Δ-kompleks X, homološke grupe lančanog kompleksa

$$\cdots \longrightarrow \Delta_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Delta_1(X) \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

nazivamo ***simplicijalnim homološkim grupama*** od X, oznaka $H^\Delta_n(X)$.

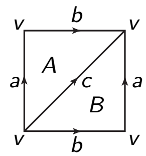
Homologija kružnice i torusa

Kružnica: $X = S^1$ ima Δ-strukturu s jednim vrhom i jednim bridom:



Zato je $\Delta_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \cong \Delta_0(S^1)$, a $\Delta_n(S^1) = 0$ za $n \geq 2$, pa je

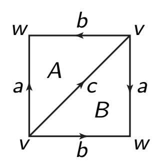
$$H_n^\Delta(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{za } n = 0, 1 \\ 0 & \text{za } n \geq 2 \end{cases} \quad \text{jer je } \partial_1 = 0.$$



Torus: $T = S^1 \times S^1$ ima Δ-strukturu s jednim vrhom v, tri brida a, b i c i dva 2-simpleksa A i B.
Kao i kod kružnice, $\partial_1 = 0$ pa je $H_0^\Delta(T) \cong \mathbb{Z}$.
Kako je $\partial_2(A) = a+b-c = \partial_2(B)$ i jer je $\{a, b, a+b-c\}$ baza grupe $\Delta_1(T)$, to je $H_1^\Delta(T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, i bazu čine klase $[a]$ i $[b]$.
Kako nema 3-simpleksa, to je $H_2^\Delta(T) = \operatorname{Ker} \partial_2 \cong \mathbb{Z}$, generirana s $[A-B]$, jer je $\partial(nA + mB) = (n+m)(a+b-c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n = -m$.
Dakle,

$$H_n^\Delta(T) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{za } n = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{za } n = 0, 2 \\ 0 & \text{za } n \geq 3 \end{cases}$$

Homologija projektivne ravnine i n-sfere



Projektivna ravnina: $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ ima Δ-strukturu s dva vrha v i w, tri brida a, b i c i dva 2-simpleksa A i B.
$\operatorname{Im} \partial_1$ je generirana s $w - v$, pa je $H_0^\Delta(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \cong \mathbb{Z}$ s jednim od vrhova kao generatorom.
Kako je $\partial_2(A) = -a+b+c$ a $\partial_2(B) = a-b+c$, to je ∂_2 injekcija pa je $H_2^\Delta(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = 0$. Nadalje, $\operatorname{Ker} \partial_1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ generirana s $a-b$ i c, a $\operatorname{Im} \partial_2$ je podgrupa od $\operatorname{Ker} \partial_1$ reda 2, jer za bazu u $\operatorname{Ker} \partial_1$ možemo uzeti c i $a-b+c$, a za bazu u $\operatorname{Im} \partial_2$ možemo uzeti $a-b+c$ i $2c = (a-b+c)+(-a+b+c) = \partial_2(B)+\partial_2(A)$, pa je $H_1^\Delta(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \cong \mathbb{Z}_2$.
Za $n \geq 3$ je $H_n^\Delta(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = 0$ jer $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ nema n-simpleksa za $n \geq 3$.

n-sfera: S^n dobije Δ-strukturu od dvije kopije Δ^n kojima su rubovi identificirani identitetom. Tada je $\operatorname{Ker} \partial_n \cong \mathbb{Z}$ generirana razlikom tih dvaju n-simpleksa, pa je $H_n^\Delta(S^n) \cong \mathbb{Z}$ generirana klasom te razlike.
$H_m^\Delta(S^n) = 0$ za $m > n$ (nema simpleksa), a nalaženje ostalih grupa je nešto teže (ali ćemo napraviti kasnije).

itd., ali. . .

Na sličan način mogli bismo odrediti homološke grupe i za mnoge druge Δ-komplekse, npr. za plohe, ali računi postaju sve složeniji kako se broj simpleksa povećava. Posebno u višim dimenzijama.
A odmah se postavljaju i sljedeća pitanja:

- Jesu li grupe $H_n^\Delta(X)$ neovisne o Δ-strukturi, tj. ako su dva Δ-kompleksa homeomorfna imaju li oni izomorfne homološke grupe?
- Općenitije, imaju li oni izomorfne homološke grupe i ako su samo homotopski ekvivalentni?

Za odgovor na ta pitanja i razvoj opće teorije, najelegantnije je napustiti krute simplicijalne strukture i uvesti tzv. singularnu homologiju. Dodatna prednost je da su te grupe definirane za sve topološke prostore. Na kraju treba ipak dokazati da su za Δ-komplekse obje teorije ekvivalentne.

Simplicijalni kompleksi *vs.* Δ-kompleksi

Tradicionalno se simplicijalna homologija definira za ***simplicijalne komplekse***. To su Δ-kompleksi kod kojih je svaki simpleks jedinstveno određen svojim vrhovima. Stoga svaki n-simpleks ima točno $n+1$ *različitih* vrhova i nikoja dva simpleksa nemaju isti skup vrhova.

Ako se u simplicijalnom kompleksu odabere „pogodan" uređaj vrhova, npr. neki dobar uređaj, onda se na tom simplicijalnom kompleksu dobije i struktura Δ-kompleksa.

Obratno, može se pokazati da se svaki Δ-kompleks može subdividirati tako da se dobije simplicijalni kompleks, pa je svaki Δ-kompleks homeomorfan nekom simplicijalnom kompleksu.

Δ-kompleksi imaju tu prednost da su računi s njima jednostavniji. Npr. torus kao simplicijalni kompleks ima najmanje 14 trokutova, 21 brid i 7 vrhova, a za $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ treba najmanje 10 trokuta, 15 bridova i 6 vrhova.

Singularna homologija

Singularni n-simpleks u prostoru X je svako preslikavanje $\sigma\colon \Delta^n \to X$. Slobodnu abelovu grupu kojoj bazu čine svi singularni n-simpleksi, označavamo s $C_n(X)$. Njezini elementi, koje zovemo ***(singularnim) n-lancima***, su formalne konačne sume $\sum_i n_i\sigma_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $\sigma_i\colon \Delta^n \to X$.
Kao i prije, homomorfizam ruba $\partial_n\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ definiran je na bazi s $\partial_n(\sigma) := \sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]}$ (pritom je $[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]$ identificiran s Δ^{n-1} kanonskim linearnim homeomorfizmom koji čuva uređaj vrhova, t.d. na $\sigma|_{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]}$ možemo gledati kao na preslikavanje $\Delta^{n-1} \to X$).
Kao u lemi 18.1, pokazuje se da vrijedi $\partial_n\,\partial_{n+1} = 0$, ili kraće, $\partial^2 = 0$, pa definiramo ***singularne homološke grupe*** $\boldsymbol{H_n(X)} := \operatorname{Ker}\partial_n / \operatorname{Im}\partial_{n+1}$.
Iz definicije je evidentno da su singularne homološke grupe $H_n(X)$ topološke invarijante (za razliku od simplicijalne homologije $H_n^{\Delta}(X)$).
S druge strane, grupe $C_n(X)$ su tako velike, i za sve n su netrivijalne, da čak nije niti jasno jesu li za konačne Δ-komplekse grupe $H_n(X)$ konačno generirane.

Singularni kompleks $S(X)$

Sljedeća konstrukcija pokazuje kako se singularna homologija, koja izgleda mnogo općenitija od simplicijalne homologije, može shvatiti i kao specijalan slučaj simplicijalne homologije.

Za proizvoljan prostor X definira se ***singularni kompleks*** $S(X)$ kao Δ-kompleks s po jednim n-simpleksom Δ^n_σ za svaki singularni n-simpleks $\sigma\colon \Delta^n \to X$, i to tako da je Δ^n_σ na prirodan (očit) način pričvršćen na $(n-1)$-simplekse od $S(X)$ koji su restrikcije od σ na stranice od Δ^n, tj. na $(n-1)$-simplekse od $\partial\Delta^n$.

Iz definicije je jasno da je $H_n^{\Delta}(S(X))$ isto što i $H_n(X)$, pa je singularna homologija od X zapravo simplicijalna homologija singularnog kompleksa $S(X)$.

$S(X)$ je Δ-kompleks model za X, i obično je enormno velik.

Pogledaj u [Hatcher] kako se, barem u malim dimenzijama, na singularne cikluse može gledati kao na preslikavanja orijentiranih mnogostrukosti u prostor X.

Singularna homologija i povezanost putevima

Propozicija 19.1

Neka je $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$ rastav prostora X na komponente povezanosti putevima. Tada je $H_n(X) \cong \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$.

Dokaz: Slike singularnih simpleksa su putevima povezane pa je $C_n(X) = \bigoplus_\alpha C_n(X_\alpha)$. Homomorfizam ruba ∂_n „poštuje” tu dekompoziciju u direktnu sumu, pa se to prenosi i na $\operatorname{Ker}\partial_n$ i $\operatorname{Im}\partial_{n+1}$, pa onda i na njihov kvocijent $H_n(X)$. □

Propozicija 19.2

Za putevima povezan prostor X je $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.
Općenito je, dakle, $H_0(X)$ direktna suma $\mathbb{Z}$-ova — po jedan za svaku komponentu povezanosti putevima.

H_0 „broji” komponente povezanosti putevima

Dokaz: Kako je $\partial_0 = 0$ to je $H_0(X) = C_0(X)/\operatorname{Im}\partial_1$. Neka je $\varepsilon\colon C_0(X) \to \mathbb{Z}$ homomorfizam definiran s $\varepsilon(\sum_i n_i\sigma_i) := \sum_i n_i$.
Ako je X neprazan onda je ε očito epimorfizam.
Tvrdnja: Ako je X putevima povezan onda je $\operatorname{Ker}\varepsilon = \operatorname{Im}\partial_1$,
pa ε inducira izomorfizam $H_0(X) = C_0(X)/\operatorname{Ker}\varepsilon \cong \mathbb{Z}$ (1. tm. o izoφ).

Dokaz tvrdnje: Za svaki singularni 1-simpleks $\sigma\colon \Delta^1 \to X$ je $\varepsilon\partial_1(\sigma) = \varepsilon(\sigma|_{v_1} - \sigma|_{v_0}) = 1 - 1 = 0$, pa je $\operatorname{Im}\partial_1 \subseteq \operatorname{Ker}\varepsilon$.
Obratno, neka je $\varepsilon(\sum_i n_i\sigma_i) = 0$, tj. $\sum_i n_i = 0$.
Simpleksi σ_i su singularni 0-simpleksi, dakle točke u X.
Odaberimo točku $x_0 \in X$ i neka je σ_0 singularni 0-simpleks sa slikom x_0.
Za proizvoljan singularni 0-simpleks σ_i neka je $\tau_i\colon \Delta^1 = [v_0, v_1] \to X$ put od točke x_0 do $\sigma_i(v_0)$. Tada je $\partial\tau_i = \sigma_i - \sigma_0$, pa je

$$\partial(\textstyle\sum_i n_i\tau_i) = \sum_i n_i\sigma_i - (\sum_i n_i)\sigma_0 = \sum_i n_i\sigma_i.$$

To pokazuje da je $\sum_i n_i\sigma_i$ rub, tj. $\operatorname{Ker}\varepsilon \subseteq \operatorname{Im}\partial_1$. □

Homologija točke

Propozicija 19.3

Za jednotočkovni prostor $X = *$ je $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ a $H_n(X) = 0$ za $n > 0$.

Dokaz: Kako je $X = *$ to za svaki n postoji jedinstven singularan n-simpleks $\sigma_n \colon \Delta^n \to X$ — konstantno preslikavanje, i

$$\partial(\sigma_n) = \textstyle\sum_i (-1)^i \sigma_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{za neparan } n \\ \sigma_{n-1} & \text{za paran } n \neq 0 \end{cases}.$$

Dakle, singularni lančani kompleks za $X = *$ izgleda ovako:

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

odakle jednostavno slijedi tvrdnja. □

Reducirane homološke grupe

Često je praktičnije raditi s ponešto modificiranom homologijom za koju su homološke grupe točke trivijalne u *svim* dimenzijama, uključujući $n = 0$. To su ***reducirane homološke grupe $\tilde{H}_n(X)$*** definirane kao homološke grupe ***augmentiranog lančanog kompleksa***

$$\cdots \longrightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

gdje je $\varepsilon(\sum_i n_i \sigma_i) := \sum_i n_i$ ***homomorfizam augmentacije*** kao u dokazu propozicije 19.2.

Kako je $\varepsilon\,\partial_1 = 0$ to je $\varepsilon(\operatorname{Im}\partial_1) = 0$, pa ε inducira homomorfizam $\tilde{\varepsilon} \colon H_0(X) \to \mathbb{Z}$ s jezgrom $\operatorname{Ker}\tilde{\varepsilon} = \operatorname{Ker}\varepsilon / \operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker}\varepsilon / \operatorname{Im}\partial_1 = \tilde{H}_0(X)$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & & \operatorname{Im}\partial_1 \arrow[d, hook] & & \\
 & & & & & 0 \\
 & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] & C_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[ur] & 0 \\
 & & & H_0 \arrow[ur, "\tilde{\varepsilon}"'] \arrow[d] & & \\
 & & \tilde{H}_0 \arrow[ur] & 0 & & \\
 & 0 \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

Stoga je $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.

Za $n > 0$ je očito $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$.

Lančano preslikavanje inducirano neprekidnim preslikavanjem

Za preslikavanje $f \colon X \to Y$ definiraju se inducirani homomorfizmi $f_\# \colon C_n(X) \to C_n(Y)$ t.d. se stavi $f_\#(\sigma) := f\,\sigma \colon \Delta^n \to Y$ i proširi linearno na $C_n(X)$. Za $f_\#$ vrijedi $f_\# \partial = \partial f_\#$ jer je

$$f_\#\partial(\sigma) = f_\#(\textstyle\sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]}) = \sum_i (-1)^i f\sigma|_{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]} = \partial f_\#(\sigma),$$

pa imamo komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_\#"] & C_n(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_\#"] & C_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_\#"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(Y) \arrow[r, "\partial"] & C_n(Y) \arrow[r, "\partial"] & C_{n-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

tj. homomorfizmi $f_\#$ definiraju ***lančano preslikavanje*** singularnih lančanih kompleksa od X i Y.

Inducirani homomorfizmi — funktorijalnost

Zbog $f_\#\partial = \partial f_\#$, tj. zbog komutativnosti dijagrama $(*)$, $f_\#$ preslikavaju cikluse u cikluse i rubove u rubove, pa $f_\#$ induciraju homomorfizme $f_* \colon H_n(X) \to H_n(Y)$. To su ***homomorfizmi inducirani neprekidnim preslikavanjem*** $f \colon X \to Y$.

Ujedno smo dokazali i sljedeću algebarsku tvrdnju:

Propozicija 20.1

Lančano preslikavanje lančanih kompleksa inducira homomorfizme homoloških grupa tih kompleksa. □

Iz definicije neposredno slijedi funktorijalnost:

- Za kompoziciju $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ vrijedi $(g\,f)_* = g_* f_*$.
- $(\mathbb{1}_X)_* = \mathbb{1}_{H_n(X)}$

odakle i formalno slijedi topološka invarijantnost singularne homologije.

Homotopska invarijantnost homologije

Prvi ozbiljan teorem je

Teorem 20.2

Ako su preslikavanja $f, g\colon X \to Y$ homotopna, onda su inducirani homomorfizmi jednaki, $f_* = g_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$, $n \in \mathbb{N}$.

Zbog funktorijalnosti, odavde odmah slijedi

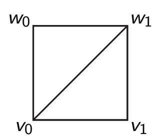
Korolar 20.3

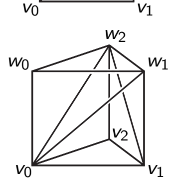
Ako je $f\colon X \to Y$ homotopska ekvivalencija, onda su inducirani homomorfizmi $f_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$ izomorfizmi za sve $n \in \mathbb{N}$. □

Ostaje dokazati teorem.

Rastav prizme na simplekse

Dokaz teorema: Glavna stvar u dokazu je dobar rastav produkta $\Delta^n \times I$ na $(n+1)$-simplekse. Označimo $\Delta \times \{0\} =: [v_0, \ldots, v_n]$ i $\Delta \times \{1\} =: [w_0, \ldots, w_n]$ kao na slici. Tada je $\Delta \times I$ unija $(n+1)$-simpleksa $[v_0, \ldots, v_i, w_i, \ldots, w_n]$ (za detalje vidi [Hatcher]).





Neka je $F\colon X \times I \to Y$ homotopija od f do g. Definiramo ***operatore prizme*** $P\colon C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$ formulom $P(\sigma) := \sum_i (-1)^i F \circ (\sigma \times \mathbb{1}_I)|_{[v_0,\ldots,v_i,w_i,\ldots,w_n]}$.

Naprimjer, za $\sigma = [v_0, v_1, v_2]$ je

$$P(\sigma) = F(\sigma \times \mathbb{1})|_{[v_0,w_0,w_1,w_2]} - F(\sigma \times \mathbb{1})|_{[v_0,v_1,w_1,w_2]} + F(\sigma \times \mathbb{1})|_{[v_0,v_1,v_2,w_2]}$$

Ključno svojstvo operatora prizme

Tvrdnja: $$\partial P = g_\# - f_\# - P\partial \qquad (*)$$

Računamo:

$$\partial P(\sigma) = \sum_{j \le i} (-1)^j (-1)^i F(\sigma \times \mathbb{1})|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_j,\ldots,v_i,w_i,\ldots,w_n]} + \sum_{j \ge i} (-1)^{j+1} (-1)^i F(\sigma \times \mathbb{1})|_{[v_0,\ldots,v_i,w_i\ldots,\hat{w}_j,\ldots,w_n]}\,.$$

Članovi za $i = j \neq 0$ iz prve sume skratit će se s članovima za $i = j \neq n$ iz druge sume (to su članovi u kojima nema ponavljanja indeksa), jer će u prvoj sumi biti ispušten i-ti vrh a u drugoj $(i+1)$-vi vrh (npr. član prve sume za $i = j = 4$ skratit će se s članom druge sume za $i = j = 3$).
Za $i = j = 0$ u prvoj sumi ostaje član $F(\sigma \times \mathbb{1})|_{[\hat{v}_0,w_0,\ldots,w_n]} = g\sigma = g_\#(\sigma)$, a za $i = j = n$ u drugoj ostaje $-F(\sigma \times \mathbb{1})|_{[v_0,\ldots,v_n,\hat{w}_n]} = -f\sigma = -f_\#(\sigma)$.
Članovi sa $i \neq j$ daju upravo $-P\partial(\sigma)$ jer je

$$P\partial(\sigma) = \sum_{i<j} (-1)^i (-1)^j F(\sigma \times \mathbb{1})|_{[v_0,\ldots,v_i,w_i\ldots,\hat{w}_j,\ldots,w_n]} + \sum_{i>j} (-1)^{i-1} (-1)^j F(\sigma \times \mathbb{1})|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_j,\ldots,v_i,w_i,\ldots,w_n]}\,. \checkmark$$

Završetak dokaza

Za proizvoljan n-ciklus $\alpha \in \operatorname{Ker} \partial_n \subseteq C_n(X)$ je
$g_\#(\alpha) - f_\#(\alpha) = \partial P(\alpha) + P\partial(\alpha) = \partial P(\alpha)$ jer je $\partial\alpha = 0$.
Stoga je $g_\#(\alpha) - f_\#(\alpha)$ n-rub, pa su $g_\#(\alpha)$ i $f_\#(\alpha)$ homologni, tj. $g_*([\alpha]) = f_*([\alpha])$. □

Familija homomorfizama P lančanih kompleksa za koje je $\partial P + P\partial = g_\# - f_\#$ naziva se ***lančana homotopija***, pa završetak dokaza prethodnog teorema dokazuje i

Propozicija 20.4

Lančano homotopna preslikavanja lančanih kompleksa induciraju na homologiji iste homomorfizme. □

Inducirani homomorfizmi u reduciranoj homologiji

Lako se vidi da je $\varepsilon f_\# = \varepsilon$, pa neprekidno preslikavanje $f\colon X \to Y$ inducira i lančano preslikavanje augmentiranih lančanih kompleksa

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & C_2(X) & \xrightarrow{\partial} & C_1(X) & \xrightarrow{\partial} & C_0(X) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow f_\# & & \downarrow f_\# & & \downarrow f_\# & & \downarrow \mathbb{1} & \\
\cdots \longrightarrow & C_2(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_1(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_0(Y) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow 0
\end{array}$$

Ako su $g \simeq f\colon X \to Y$ homotopna preslikavanja, onda za singularni 0-simpleks σ u X vrijedi
$\partial P(\sigma) = F(\sigma \times \mathbb{1})|_{[\hat{v}_0, w_0]} - F(\sigma \times \mathbb{1})|_{[v_0, \hat{w}_0]} = g\sigma - f\sigma = g_\#(\sigma) - f_\#(\sigma)$,
tj. $\partial P = g_\# - f_\#$.

Ako lančanu homotopiju P proširimo s $P = 0\colon \mathbb{Z} \to C_0(Y)$, dobit ćemo lančanu homotopiju augmentiranih lančanih kompleksa, što pokazuje da je i $g_* = f_*\colon \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_n(Y)$.

Egzaktni nizovi

Za niz Abelovih grupa i homomorfizama

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

kažemo da je ***egzaktan*** ako je $\operatorname{Im}\alpha_{n+1} = \operatorname{Ker}\alpha_n$ za sve n.
Inkluzija $\operatorname{Im}\alpha_{n+1} \subseteq \operatorname{Ker}\alpha_n$ znači da je $\alpha_n\alpha_{n+1} = 0$, tj. svaki egzaktan niz je lančani kompleks. S druge strane, $\operatorname{Ker}\alpha_n \subseteq \operatorname{Im}\alpha_{n+1}$ znači da su homološke grupe tog lančanog kompleksa trivijalne.
Dakle, na homološke grupe možemo gledati kao na *mjeru neegzaktnosti* lančanog kompleksa.

- $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B$ je egzaktan akko je $\operatorname{Ker}\alpha = 0$, tj. α je monomorfizam;
- $A \xrightarrow{\alpha} B \to 0$ je egzaktan akko je $\operatorname{Im}\alpha = B$, tj. α je epimorfizam;
- $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \to 0$ je egzaktan akko je α izomorfizam;
- $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ je egzaktan akko je α mono, β epi i $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$. Tada β inducira izomorfizam $C \cong B/\operatorname{Im}\alpha$, što, uz identifikaciju $A \equiv \operatorname{Im}\alpha$, pišemo $C \cong B/A$.
Takav se niz naziva ***kratki egzaktni niz***.

Kofibracije i homologija kvocijentnog prostora

Egzaktni nizovi su pravi jezik za izraziti vezu između homologije prostora, potprostora i njihova kvocijenta.

Teorem 21.1

Neka je X prostor a $A \subseteq X$ neprazan zatvoren potprostor koji je okolinski deformacijski retrakt od X. Tada postoji egzaktan niz

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_0(X/A) \longrightarrow 0$$

gdje je $i\colon A \hookrightarrow X$ inkluzija a $j\colon X \to X/A$ je kvocijentno preslikavanje.

Homomorfizam ∂ ćemo konstruirati tijekom dokaza, koji je podugačak. Grubo rečeno, element od $\tilde{H}_n(X/A)$ može se reprezentirati lancem α u X čiji je rub $\partial\alpha$ ciklus u A, pa je $\partial\alpha \in \tilde{H}_{n-1}(A)$ njegova homološka klasa.

Par (X, A) gdje je A zatvoren okolinski deformacijski retrakt od X, pa ima svojstvo proširenja homotopije, zvat ćemo ***dobar par*** ili ***kofibracija***. CW-parovi jesu dobri parovi.

Homološke grupe sfera

Prethodni ćemo teorem moći dokazati istom u § 23, nakon teorema o isijecanju, ali prije negoli ga počnemo dokazivati, evo dvije primjene:

Korolar 21.2 (homološke grupe sfera)

$$\tilde{H}_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{za } i = n \\ 0 & \text{za } i \neq n \end{cases}$$

Dokaz: Za $n > 0$ gledamo par (D^n, S^{n-1}), pa je $D^n/S^{n-1} \cong S^n$.
Kako je D^n kontraktibilan, to je $\tilde{H}_i(D^n) = 0$ za sve i, pa iz egzaktnosti slijedi da su $\tilde{H}_i(S^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1})$ izomorfizmi.
Tvrdnja sada slijedi indukcijom počevši od S^0, za koju tvrdnja vrijedi zbog propozicija 19.1 i 19.3. □

Dakle, nereducirane homološke grupe sfera su

$$H_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{za } i = 0, n \\ 0 & \text{za } i \neq 0, n \end{cases} \text{ ako je } n \neq 0, \text{ a } H_i(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{za } i = 0 \\ 0 & \text{za } i \neq 0 \end{cases}.$$

Brouwerov teorem o fiksnoj točki

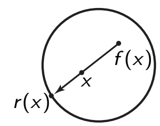
Sada kada znamo homološke grupe sfera, možemo dokazati Brouwerov teorem o fiksnoj točki, čiju smo verziju za $n = 2$, koristeći se fundamentalnom grupom, dokazali u § 8.

Korolar 21.3 (Borsuk-Brouwer)

$S^{n-1} = \partial D^n$ nije retrakt od D^n.
Stoga svako neprekidno preslikavanje $f : D^n \to D^n$ ima fiksnu točku.

Dokaz: Ako je $r : D^n \to \partial D^n$ retrakcija, onda je $r\,i = \mathbb{1}_{\partial D^n}$ gdje je $i : \partial D^n \hookrightarrow D^n$ inkluzija. Tada je kompozicija $\tilde{H}_{n-1}(\partial D^n) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(D^n) \xrightarrow{r_*} \tilde{H}_{n-1}(\partial D^n)$ identiteta grupe $\tilde{H}_{n-1}(\partial D^n) \cong \mathbb{Z}$, što ne može biti jer su i_* i r_* nul-homomorfizmi.

Tvrdnja o fiksnoj točki dokazuje se analogno dokazu teorema 8.3 za $n = 2$. □



Relativne homološke grupe

Želimo definirati homološke grupe koje „ne uzimaju u obzir” lance u podskupu $A \subseteq X$. Definiramo $C_n(X, A) := C_n(X)/C_n(A)$.
To je grupa ***relativnih n-lanaca***.
Njezine ćemo elemente privremeno označivati $\langle\alpha\rangle$, $\alpha \in C_n(X)$.
Za homomorfizam ruba $\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ vrijedi $\partial(C_n(A)) \subseteq C_{n-1}(A)$, pa on inducira ***homomorfizam ruba*** $\partial : C_n(X, A) \to C_{n-1}(X, A)$, i opet vrijedi $\partial^2 = 0$, tj. dobivamo lančani kompleks

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} C_n(X, A) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X, A) \longrightarrow \cdots.$$

Homološke grupe tog lančanog kompleksa su ***relativne (singularne) homološke grupe*** para (X, A), oznaka $\boldsymbol{H_n(X, A)}$.

- Elementi od $H_n(X, A)$ reprezentirani su ***relativnim ciklusima*** tj. n-lancima u X kojima je rub $(n-1)$-lanac u A.
- Relativni ciklus $\langle\alpha\rangle \in \operatorname{Ker} \partial_n \subseteq C_n(X, A)$ je ***relativni rub*** ako je $\alpha = \partial\beta + \gamma$ za neki $\beta \in C_{n+1}(X)$ i neki $\gamma \in C_n(A)$.

Još o relativnim lancima i ciklusima

Napomena: Kako se radi o slobodnim abelovim grupama, na $C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$ možemo gledati i kao na slobodnu abelovu grupu generiranu singularnim n-simpleksima u X čije slike *nisu* sadržane u A. Mana ovakvog gledanja na relativne n-lance je da to nije kompatibilno s homomorfizmom ruba, tj. rub n-lanca u X koji nije u A može biti $(n-1)$-lanac u A. Zato je ipak bolje na $C_n(X, A)$ gledati kao na kvocijent $C_n(X)/C_n(A)$ nego kao na podgrupu od $C_n(X)$.

Sljedeći cilj je pokazati kako za par (X, A) postoji dugi egzaktni niz

$$\cdots \to H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X, A) \to H_{n-1}(A) \to H_{n-1}(X) \to \cdots$$
$$\cdots \to H_0(X, A) \to 0.$$

Kratki egzaktni niz lančanih kompleksa

To, međutim, spada u (uvod u) homološku algebru.
Naime, za svaki n imamo komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_n(A) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & C_n(X) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_n(X, A) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-1}(A) \arrow[r, "i"] & C_{n-1}(X) \arrow[r, "j"] & C_{n-1}(X, A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

gdje su i inkluzije a j kvocijentna preslikavanja, pa su reci kratki egzaktni nizovi. i i j induciraju na homologiji homomorfizme

$$H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A)$$

za koje vrijedi $j_* i_* = 0$, tj. $\operatorname{Im} i_* \subseteq \operatorname{Ker} j_*$. Dakle, treba konstruirati homomorfizam $H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$ i pokazati da je tako dobiven niz grupa i homomorfizama egzaktan.

Algebarski, situacija je sljedeća: imamo kratki egzaktni niz lančanih kompleksa kojemu treba pridružiti dugi egzaktni homološki niz:

Vezni homomorfizam $\partial\colon H_n(\mathcal{C}) \to H_{n-1}(\mathcal{A})$

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_{n+1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_n \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_{n-1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-2} \arrow[r, "i"] & B_{n-2} & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, mapsto, "j"] \arrow[d, mapsto] & {[c]} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] \arrow[dll] & 0 \\
{[a]} \arrow[r, mapsto, "i"] \arrow[d, mapsto] & \partial b \arrow[r, mapsto, "j"] \arrow[d, mapsto] & 0 & \\
\partial a \arrow[r, mapsto, "i"] & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

Neka je $c \in C_n$ ciklus. Kako je j epi, $c = j(b)$ za neki $b \in B_n$. Jer je $j(\partial b) = \partial j(b) = \partial c = 0$, element $\partial b \in B_{n-1}$ leži u $\operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i$, pa, zbog injektivnosti od i, $\exists!\, a \in A_{n-1}$ t.d. je $\partial b = i(a)$. Zbog komutativnosti je $i(\partial a) = \partial i(a) = \partial(\partial b) = 0$, pa je $\partial a \in \operatorname{Ker} i = 0$ jer je i mono, pa je $a \in A_{n-1}$ ciklus. Definiramo $\partial([c]) := [a] \in H_{n-1}(\mathcal{A})$.

Homomorfizam ∂ je dobro definiran: neovisnost o izboru b

- Element a jedinstveno je određen elementom b jer je i monomorfizam.
- Izbor elementa b: Neka je i $b' \in B_n$ t.d. je $j(b') = c$.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_n \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "i"] & B_{n-1} \arrow[r, "j"] & C_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[r, mapsto] & b' - b & \\
 & {b', b} \arrow[r, mapsto, "j"] \arrow[d, mapsto] & c \\
a' = a + \partial\alpha \arrow[r, mapsto, "i"] & \partial b' &
\end{tikzcd}
$$

Tada je $b' - b \in \operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i$, pa postoji $\alpha \in A_n$ t.d. je $b' - b = i(\alpha)$, tj. $b' = b + i(\alpha)$.
No tada je $a' := a + \partial\alpha \in A_{n-1}$ upravo jedinstven izbor za b' jer je $i(a') = i(a+\partial\alpha) = i(a) + i(\partial\alpha) = \partial b + \partial i(\alpha) = \partial(b + i(\alpha)) = \partial b'$.
Dakle, a i a' su homologni, tj. $[a'] = [a] \in H_{n-1}(\mathcal{A})$. ✓

Homomorfizam ∂ je dobro definiran: neovisnost o izboru c

Izbor elementa c: Neka je $c' = c + \partial\gamma$ za neki $\gamma \in C_{n+1}$.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "i"] & B_{n+1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_n \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "i"] & B_{n-1} \arrow[r, "j"] & C_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \beta \arrow[r, mapsto, "j"] \arrow[d, mapsto] & \gamma \\
 & b + \partial\beta \arrow[r, mapsto, "j"] \arrow[d, mapsto] & c' = c + \partial\gamma \\
a \arrow[r, mapsto, "i"] & \partial b &
\end{tikzcd}
$$

Tada postoji $\beta \in B_{n+1}$ t.d. je $\gamma = j(\beta)$, pa je $c' = c + \partial j(\beta) = c + j(\partial\beta) = j(b + \partial\beta)$, što ne utječe na izbor od a jer je $\partial(b + \partial\beta) = \partial b$.

$\partial\colon H_n(\mathcal{C}) \to H_{n-1}(\mathcal{A})$ je homomorfizam: To slijedi neposredno iz definicije preslikavanja ∂, jer svi učinjeni izbori „poštuju" zbrajanja u odgovarajućim grupama. □

Egzaktnost dugog homološkog niza

Teorem 22.1

Dugi homološki niz

$$\cdots \longrightarrow H_n(\mathcal{A}) \xrightarrow{i_*} H_n(\mathcal{B}) \xrightarrow{j_*} H_n(\mathcal{C}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(\mathcal{B}) \longrightarrow \cdots$$

je egzaktan.

(Pisanim slovima $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ označili smo lančane komplekse

$$\mathcal{A} \qquad \cdots \to A_{n+1} \xrightarrow{\partial} A_n \xrightarrow{\partial} A_{n-1} \to \cdots,$$

itd.)

Dokaz: Treba dokazati šest inkluzija:

- $\operatorname{Im} i_* \subseteq \operatorname{Ker} j_*$ i $\operatorname{Ker} j_* \subseteq \operatorname{Im} i_*$
- $\operatorname{Im} j_* \subseteq \operatorname{Ker} \partial$ i $\operatorname{Ker} \partial \subseteq \operatorname{Im} j_*$
- $\operatorname{Im} \partial \subseteq \operatorname{Ker} i_*$ i $\operatorname{Ker} i_* \subseteq \operatorname{Im} \partial$.

Prva slijedi iz činjenice da je $j\,i = 0$. Ostale dokažite za vježbu!
Metoda: „natjeravanje po dijagramu" (diagram chasing)
i „učini što možeš".

Dugi egzaktni homološki niz para (X, A)

Vratimo li se topologiji, prethodni teorem daje

Korolar 22.2

Za svaki par (X, A) topoloških prostora, sljedeći je niz egzaktan:

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow H_0(X, A) \longrightarrow 0.$$

Opis homomorfizma $\partial\colon H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$ je jednostavan: ako je $[\alpha] \in H_n(X, A)$ reprezentiran relativnim ciklusom $\langle\alpha\rangle$ onda je $\partial[\alpha]$ homološka klasa ciklusa $\partial\alpha$ u $H_{n-1}(A)$.

Dakle, relativne grupe $H_n(X, A)$ „mjere razliku" između homoloških grupa prostora X i potprostora A.

Specijalno, ako su za sve n grupe $H_n(X, A)$ trivijalne, onda inkluzija $A \hookrightarrow X$ inducira izomorfizme $H_n(X) \cong H_n(A)$ za sve n.

Lako se vidi da, zbog egzaktnosti, vrijedi i obratno.

Dugi egzaktni niz za reduciranu homologiju

Analogan dugi egzaktni niz postoji i za reducirane homološke grupe para (X, A). Treba samo primijeniti prethodnu mašineriju na kratki egzaktan niz augmentiranih lančanih kompleksa, gdje u dimenziji -1 treba uzeti kratki egzaktni niz $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbb{1}} \mathbb{Z} \to 0 \to 0$.

Specijalno, ako je $A \neq \emptyset$, onda je $\tilde{H}_n(X, A) = H_n(X, A)$ za sve n.

Primjeri

1. U dugom egzaktnom nizu za reduciranu homologiju para $(D^n, \partial D^n)$, sve su grupe $\tilde{H}_i(D^n)$ trivijalne, pa su $H_i(D^n, \partial D^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1})$ izomorfizmi za sve i.

2. Jer je $\tilde{H}_n(*) = 0$ za sve n, za točku $x_0 \in X$, iz dugog egzaktnog niza za reduciranu homologiju para (X, x_0) (točnije, para $(X, \{x_0\})$), dobivamo izomorfizme $H_n(X, x_0) \cong \tilde{H}_n(X)$ za sve n.

Inducirani homomorfizam relativnih grupa

Neprekidno preslikavanje parova $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ inducira homomorfizme $f_\#\colon C_n(X, A) \to C_n(Y, B)$, pa onda i homomorfizme $f_*\colon H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$.

Vrijedi također

Propozicija 22.3

Ako su preslikavanja $f, g\colon (X, A) \to (Y, B)$ homotopna kao preslikavanja parova, onda je $f_* = g_*\colon H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$.

Dokaz: Operator prizme P iz dokaza teorema 20.2 preslikava $C_n(A)$ u $C_{n+1}(B)$, pa inducira relativni operator prizme $P\colon C_n(X, A) \to C_{n+1}(Y, B)$. Prelaskom na kvocijent, i dalje vrijedi $\partial P + P\partial = g_\# - f_\#$, pa su $f_\#$ i $g_\#$ lančano homotopna preslikavanja lančanih kompleksa relativnih singularnih lanaca, pa induciraju iste homomorfizme relativnih homoloških grupa. □

Egzaktan homološki niz trojke

Neka je (X, A, B) ***trojka*** topoloških prostora, tj. $B \subseteq A \subseteq X$. Tada postoji sljedeći dugi ***egzaktni homološki niz trojke:***

$$\cdots \longrightarrow H_n(A, B) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A, B) \longrightarrow \cdots$$

gdje su i_* i j_* inducirani odgovarajućim inkluzijama. To je dugi egzaktni niz dobiven iz kratkog egzaktnog niza lančanih kompleksa singularnih lanaca parova

$$0 \longrightarrow C_n(A, B) \longrightarrow C_n(X, B) \longrightarrow C_n(X, A) \longrightarrow 0.$$

Za $B = \{x_0\}$ egzaktan homološki niz trojke (X, A, x_0) je zapravo egzaktan niz za reduciranu homologiju para (X, A).

Isijecanje

Jedno od fundamentalnih svojstava homologije para (X, A), koje nema pravog analogona u homotopiji, je da se podskup koji se nalazi „dovoljno duboko” u A može odstraniti bez utjecaja na homologiju.

Teorem 23.1 (o isijecanju)

Neka su $Z \subseteq A \subseteq X$ potprostori t.d. je $\overline{Z} \subseteq \operatorname{Int} A$. Tada za sve $n \in \mathbb{N}$, inkluzija $(X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$ inducira izomorfizme

$$H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A).$$

Ekvivalentno, ako su $A, B \subseteq X$ potprostori t.d. je $X = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B$, onda inkluzija $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ inducira izomorfizme $H_n(B, A \cap B) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A)$ za sve n.

Za „prijevod” jedne verzije teorema u drugu treba staviti $B := X \setminus Z$ odnosno $Z := X \setminus B$.

Homologija sa „sitnim” lancima

Dokaz teorema o isijecanju je dugačak i sadrži tehniku baricentričkih subdivizija koja omogućuje određivanje homologije pomoću lanaca koji se sastoje od „malih” simpleksa.

Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ familija podskupova od X čije nutrine pokrivaju X, i neka je $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ podgrupa od $C_n(X)$ koja se sastoji od lanaca $\sum_i n_i \sigma_i$ za koje su slike svakog od singularnih simpleksa σ_i sadržane u nekom članu pokrivača $\mathcal{U}$. Jasno je da homomorfizam ruba $\partial\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ preslikava $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ u $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$, pa grupe $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ čine lančani kompleks. Homološke grupe tog lančanog kompleksa označavat ćemo s $H_n^{\mathcal{U}}(X)$. Ključna je

Propozicija 23.2

Inkluzija $\iota\colon C_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_n(X)$ je lančana homotopska ekvivalencija, tj. postoji lančano preslikavanje $\rho : C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$ t.d. su kompozicije $\iota\rho$ i $\rho\iota$ lančano homotopne identitetama. Stoga ι inducira izomorfizme $H_n^{\mathcal{U}}(X) \cong H_n(X)$ za sve n.

Dokaz nećemo raditi

Dokaz ove propozicije je dugačak, služi se tehnikom baricentričkih subdivizija, i nećemo ga raditi.

Ipak, trebat ćemo nešto iz dokaza:

U dokazu se konstruiraju lančano preslikavanje $\rho\colon C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$ i lančana homotopija $D\colon C_n(X) \to C_{n+1}(X)$ t.d. je $\rho\iota = \mathbb{1}$ i $\partial D + D\partial = \mathbb{1} - \iota\rho$. Osim toga, sva preslikavanja ι, ρ i D preslikavaju lance koji leže u nekom U_α ponovno u lance u istom U_α.

Dokaz teorema o isijecanju

Pomoću prethodne propozicije dokazat ćemo teorem 23.1 o isijecanju. Neka je $X = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B$. Za pokrivač $\mathcal{U} := \{A, B\}$ rabit ćemo sugestivnu oznaku $C_n(A + B) := C_n^{\mathcal{U}}(X)$ jer se radi u sumama lanaca u A i lanaca u B. Iz dokaza prethodne propozicije imamo lančano preslikavanje ρ i lančanu homotopiju D za koje vrijedi $\partial D + D\partial = \mathbb{1} - \iota\rho$ i $\rho\iota = \mathbb{1}$. Sva preslikavanja u tim formulama preslikavaju lance u A ponovno u lance u A, pa kada podijelimo s lancima u A, induciraju preslikavanja na kvocijentima za koja također vrijede obje formule. Stoga inkluzija $C_n(A{+}B)/C_n(A) \hookrightarrow C_n(X)/C_n(A)$ inducira izomorfizam na homologiji. Preslikavanje $C_n(B)/C_n(A \cap B) \to C_n(A + B)/C_n(A)$ inducirano inkluzijom, očito je izomorfizam, jer su obje kvocijentne grupe slobodne abelove grupe generirane singularnim simpleksima u B koji ne leže u A. Kompozicijom dobivamo željeni izomorfizam $H_n(B, A \cap B) \cong H_n(X, A)$ induciran inkluzijom. $\square$

Homologija para i kvocijenta

Neka je (X, A) dobar par, tj. A je deformacijski retrakt neke okoline $V \subseteq X$. Kako bismo dokazali teorem 21.1 da postoji dugi egzaktni niz

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

trebamo u dugom egzaktnom homološkom nizu para (X, A), relativne grupe $H_n(X, A)$ zamijeniti reduciranim grupama $\tilde{H}_n(X/A)$.
U tu svrhu dokažimo sljedeću propoziciju:

Propozicija 23.3

Za dobar par (X, A) kvocijentno preslikavanje $q\colon (X, A) \to (X/A, A/A)$ inducira izomorfizme $q_*\colon H_n(X, A) \to H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$ za sve n.

Dokaz: Neka je $V \subseteq X$ okolina koja se deformacijski retraktira na A.
Imamo sljedeći komutativan dijagram:

Dokaz propozicije

$$\begin{tikzcd}
H_n(X,A) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "q_*"] & H_n(X,V) \arrow[d, "q_*"] & H_n(X-A, V-A) \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[d, "q_*"] \\
H_n(X/A, A/A) \arrow[r, "\beta"] & H_n(X/A, V/A) & H_n(X/A - A/A, V/A - A/A) \arrow[l, "\epsilon"']
\end{tikzcd}$$

Deformacijska retrakcija od V na A daje homotopsku ekvivalenciju parova $(V, A) \simeq (A, A)$, pa je $H_n(V, A) \cong H_n(A, A) = 0$ za sve n.
Zbog toga iz egzaktnog homološkog niza trojke (X, V, A) slijedi da je α izomorfizam.
Deformacijska retrakcija od V na A inducira deformacijsku retrakciju od V/A na A/A, pa na isti način zaključujemo da je i β izomorfizam.

ε i ϵ su izomorfizmi isijecanja.

Desni q_* je izomorfizam jer je induciran restrikcijom kvocijentnog preslikavanja q, a ono je na komplementu od A homeomorfizam.

Da je i lijevi q_* izomorfizam, slijedi sada iz komutativnosti dijagrama. □

Homologija unije dvaju potkompleksa

Evo nekoliko posljedica teorema o isijecanju i prethodne propozicije:

Korolar 23.4

Ako je CW kompleks X unija dvaju potkompleksa A i B, onda inkluzija $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ inducira izomorfizme $H_n(B, A \cap B) \to H_n(X, A)$.

Dokaz: Kako su CW parovi dobri, možemo, prema prethodnoj propoziciji, prijeći na kvocijente $B/(A \cap B)$ i X/A, koji su, ako $A \cap B \neq \emptyset$, homeomorfni. □

Korolar 23.5

Ako su parovi (X_α, x_α) dobri, onda inkluzije $i_\alpha\colon X_\alpha \to \bigvee_\alpha X_\alpha$ induciraju izomorfizme $\bigoplus_\alpha i_{\alpha *}\colon \bigoplus_\alpha \tilde{H}_n(X_\alpha) \to \tilde{H}_n(\bigvee_\alpha X_\alpha)$ za sve n.

Dokaz slijedi iz prethodne propozicije stavimo li $(X, A) = (\bigsqcup_\alpha X_\alpha, \bigsqcup_\alpha \{x_\alpha\})$ i činjenice da je $\tilde{H}_n(X) \cong H_n(X, \{x\})$. □

Brouwerov teorem o invarijantnosti dimenzije

Sada možemo dokazati i klasični ***teorem o invarijantnosti dimenzije*** koji kaže da za $m \neq n$ prostori $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$ nisu homeomorfni.

Teorem 23.6 (Brouwer, $\sim$ 1910.)

Ako su neprazni otvoreni skupovi $U \subseteq \mathbb{R}^m$ i $V \subseteq \mathbb{R}^n$ homeomorfni, onda je $m = n$.

Dokaz: Zbog isijecanja, za $x \in U$ je $H_k(U, U \setminus \{x\}) \cong H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\})$ (uz $Z := \mathbb{R}^m \setminus U$). Iz dugog egzaktnog niza para $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\})$ dobivamo $H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \cong \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{x\})$. Kako se $\mathbb{R}^m \setminus \{x\}$ deformacijski retraktira na S^{m-1}, zaključujemo da je $H_k(U, U \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ za $k = m$ a 0 inače. Na isti način zaključujemo da je $H_k(V, V \setminus \{y\}) \cong \mathbb{Z}$ za $k = n$ a 0 inače.

Kako homeomorfizam $h\colon U \xrightarrow{\cong} V$ inducira izomorfizme $H_k(U, U \setminus \{x\}) \xrightarrow{\cong} H_k(V, V \setminus \{h(x)\})$ za sve k, mora biti $m = n$. □

Prirodnost

Dugi egzaktni nizovi koje smo konstruirali imaju još jedno važno svojstvo koje često biva ključno u mnogim razmatranjima.
To je ***prirodnost***. Naprimjer, reći da je dugi egzaktni homološki niz para *prirodan*, znači da za svako neprekidno preslikavanje $f\colon (X,A)\to(Y,B)$ sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots \longrightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X,A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) & \longrightarrow \cdots \\
& \big\downarrow f_* & & \big\downarrow f_* & & \big\downarrow f_* & & \big\downarrow f_* & \\
\cdots \longrightarrow & H_n(B) & \xrightarrow{i_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_n(Y,B) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(B) & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

I ostali dugi egzaktni nizovi koje smo imali (za kvocijent, za reduciranu homologiju i za homologiju trojke) bili su prirodni.
Sve to slijedi iz opće algebarske činjenice da je dugi homološki niz pridružen kratkom egzaktnom nizu lančanih kompleksa, prirodan.

Veza simplicijalne i singularne homologije

Kao za singularnu, tako i za simplicijalnu homologiju postoji relativna verzija. Neka je X Δ-kompleks a $A\subseteq X$ potkompleks, tj. A je Δ-kompleks koji je unija nekih simpleksa od X. Relativne grupe $H_n^\Delta(X,A)$ definiraju se na isti način kao i singularne grupe, polazeći od relativnih lanaca $\Delta_n(X,A):=\Delta_n(X)/\Delta_n(A)$.
Istom algebarskom argumentacijom dobiva se dugi egzaktni niz za simplicijalnu homologiju.

Postoje kanonski homomorfizmi $\Theta_n\colon H_n^\Delta(X,A)\to H_n(X,A)$ inducirani lančanim preslikavanjima $\Delta_n(X,A)\to C_n(X,A)$, koja svakom n-simpleksu od X pridružuju njegovo karakteristično preslikavanje $\sigma\colon \Delta^n\to X$.

U slučaju $A=\emptyset$ relativni se slučaj svodi na apsolutni.

Ekvivalencija simplicijalne i singularne homologije

Teorem 25.1

Homomorfizmi $\Theta_n\colon H_n^\Delta(X,A)\to H_n(X,A)$ su izomorfizmi za sve n i sve Δ-kompleks parove (X,A).

Dokaz: Dokažimo najprije teorem u slučaju kada je X konačnodimenzionalan i A prazan. k-skelet X^k je unija svih simpleksa dimenzije $\le k$.
Imamo sljedeći komutativni dijagram egzaktnih nizova:

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_{n+1}^\Delta(X^k,X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^k) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^k,X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}^\Delta(X^{k-1}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H_{n+1}(X^k,X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(K^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^k) & \longrightarrow & H_n(X^k,X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{k-1})
\end{array}$$

(Sve vertikalne strelice su odgovarajući homomorfizmi Θ.)

Nastavak dokaza teorema 25.1

Dokažimo najprije da su prva i četvrta vertikalna strelica izomorfizmi.
Za $n\neq k$ je $\Delta_n(X^k,X^{k-1})=0$ jer za $n>k$ nema n-simpleksa a za $n<k$ su svi n-simpleksi već u X^{k-1}, pa je i $H_n^\Delta(X^k,X^{k-1})=0$ za $n\neq k$.
Za $n=k$ je $\Delta_k(X^k,X^{k-1})$ slobodna abelova grupa generirana svim k-simpleksima u X, pa je i $H_k^\Delta(X^k,X^{k-1})$ slobodna abelova grupa generirana homološkim klasama svih k-simpleksa u X.
Preslikavanje $\Phi\colon \bigsqcup_\alpha(\Delta^k_\alpha,\partial\Delta^k_\alpha)\to(X^k,X^{k-1})$ kojeg čine karakteristična preslikavanja $\Delta^k\to X$ svih k-simpleksa u X, inducira homeomorfizam kvocijentnih prostora $\bigsqcup_\alpha\Delta^k_\alpha/\bigsqcup_\alpha\partial\Delta^k_\alpha\to X^k/X^{k-1}$ pa inducira izomorfizme svih reduciranih singularnih homoloških grupa.
Tako dobivamo izomorfizme (prvi i treći zbog propozicije 23.3)

$$H_n\big(\textstyle\bigsqcup_\alpha(\Delta^k_\alpha,\partial\Delta^k_\alpha)\big)\xrightarrow{\cong}\widetilde H_n\big(\bigsqcup_\alpha\Delta^k_\alpha/\bigsqcup_\alpha\partial\Delta^k_\alpha\big)\xrightarrow{\cong}\widetilde H_n(X^k/X^{k-1})\xleftarrow{\cong}H_n(X^k,X^{k-1}).$$

Prema relativnoj verziji propozicije 19.1 je

$$H_n\big(\textstyle\bigsqcup_\alpha(\Delta^k_\alpha,\partial\Delta^k_\alpha)\big)\cong\bigoplus_\alpha H_n(\Delta^k_\alpha,\partial\Delta^k_\alpha)=\begin{cases}0 & ,\ n\neq k\\ \bigoplus_\alpha\mathbb{Z} & ,\ n=k\end{cases}.$$

Nastavak dokaza teorema 25.1

Dakle, za $n \neq k$ je $H_n(X^k, X^{k-1}) = 0$ pa su prva i četvrta vertikalna strelica izomorfizmi. Za $n = k$ je $H_k(X^k, X^{k-1})$ slobodna abelova grupa kojoj, zbog sljedeće leme, bazu čine klase relativnih ciklusa određenih karakterističnim preslikavanjima svih k-simpleksa u X.

Lema 25.2

Generator beskonačne cikličke grupe $H_k(\Delta^k, \partial\Delta^k)$ je klasa identitete $\mathbb{1}_k\colon \Delta^k \to \Delta^k$ shvaćene kao singularni k-simpleks.

Stoga su za $n = k$ prva i četvrta strelica homomorfizmi slobodnih abelovih grupa koji šalju bazu na bazu, pa su i one izomorfizmi.

Indukcijom (početak je jasan) možemo pretpostaviti da su i druga i peta vertikalna strelica izomorfizmi. Zaključak da je tada i srednja strelica $H_n^\Delta(K^k) \to H_n(X^k)$ izomorfizam, slijedi sada iz leme o pet homomorfizama, lema 25.3.

Time je dokaz za konačnodimenzionalan X i $A = \emptyset$ završen.

Nastavak dokaza teorema 25.1

U slučaju kada je X beskonačnodimenzionalan trebat će nam sljedeća

Tvrdnja: Kompaktan podskup Δ-kompleksa X može sijeći samo konačno mnogo otvorenih simpleksa.

Dokaz: Pretpostavimo da kompakt K siječe beskonačno mnogo otvorenih simpleksa. Tada K sadrži niz točaka x_j koje pripadaju različitim otvorenim simpleksima. Skupovi $U_j := X \setminus \bigcup_{i\neq j}\{x_i\}$ su otvoreni jer su im praslike po karakterističnim preslikavanjima svih simpleksa otvoreni skupovi, pa tako čine otvoren pokrivač od K koji se ne može reducirati na konačan potpokrivač.

Završetak dokaza teorema 25.1

$\Theta\colon H_n^\Delta(X) \to H_n(X)$ je surjekcija:

Reprezentirajmo element grupe $H_n(X)$ singularnim n-ciklusom z. To je linearna kombinacija konačnog broja singularnih n-simpleksa čije slike, zbog kompaktnosti, sijeku samo konačno mnogo otvorenih simpleksa u X, pa su sve slike sadržane u X^k za neki k. Pokazali smo da je $H_n^\Delta(X^k) \to H_n(X^k)$ izomorfizam pa je z homologan u X^k, dakle i u X, nekom simplicijalnom ciklusu, tj. Θ je surjekcija.

$\Theta\colon H_n^\Delta(X) \to H_n(X)$ je injekcija:

Slično, ako je singularni n-ciklus z rub nekog singularnog lanca u X, taj lanac ima kompaktan nosač (sliku), pa leži u nekom X^k. Stoga leži u jezgri od $H_n^\Delta(X^k) \to H_n(X^k)$, a kako je taj homomorfizam injektivan, to je z simplicijalni rub u X^k, dakle i u X.

Opći slučaj, X proizvoljan i $A \neq \emptyset$, slijedi iz dokazanog apsolutnog slučaja primjenom leme o pet homomorfizama na kanonsko preslikavanje dugog egzaktnog niza za simplicijalnu homologiju para (X, A) u odgovarajući niz za singularnu homologiju. □

Dokaz leme 25.2

Treba pokazati da je identiteta $\mathbb{1}_k\colon \Delta^k \to \Delta^k$, shvaćena kao singularni k-simpleks, ciklus, čija homološka klasa generira $H_k(\Delta^k, \partial\Delta^k)$. Da je ciklus je jasno jer se radi o relativnoj homologiji. Dokaz provodimo indukcijom. Za $k = 0$ očito $\mathbb{1}_0$ predstavlja generator.

Korak indukcije: Označimo s $\Lambda \subset \partial\Delta^k$ uniju svih $(k-1)$-stranica simpleksa Δ^k osim jedne (rog). Tada imamo izomorfizme

$$H_k(\Delta^k, \partial\Delta^k) \xrightarrow{\cong} H_{k-1}(\partial\Delta^k, \Lambda) \xleftarrow{\cong} H_{k-1}(\Delta^{k-1}, \partial\Delta^{k-1}).$$

Prvi homomorfizam je operator ruba iz dugog egzaktnog niza trojke $(\Delta^k, \partial\Delta^k, \Lambda)$, koji je izomorfizam zbog $H_n(\Delta^k, \Lambda) = 0$ (jer je Λ deformacijski retrakt od Δ^k pa je $(\Delta^k, \Lambda) \simeq (\Lambda, \Lambda)$).
Drugi izomorfizam je posljedica propozicije 23.3 jer inkluzija $(\Delta^{k-1}, \partial\Delta^{k-1}) \hookrightarrow (\partial\Delta^{k-1}, \Lambda)$ inducira homeomorfizam kvocijenata $\Delta^{k-1}/\partial\Delta^{k-1} \xrightarrow{\cong} \partial\Delta^k/\Lambda$.
Induktivni korak sada slijedi iz činjenice da prvi izomorfizam šalje $[\mathbb{1}_k] \in H_k(\Delta^k, \partial\Delta^k)$ u $[\partial(\mathbb{1}_k)] = \pm[\mathbb{1}_{k-1}] \in H_{k-1}(\partial\Delta^{k-1}, \Lambda)$. □

Lema o pet homomorfizama

Lema 25.3 (Lema o pet homomorfizama,)

Ako su u komutativnom dijagramu egzaktnih nizova abelovih grupa

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r, "\ell"] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\ A' \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "j'"] & C' \arrow[r, "k'"] & D' \arrow[r, "\ell'"] & E' \end{tikzcd}$$

homomorfizmi α, β, δ i ε izomorfizmi, onda je i γ izomorfizam.

Dokaz: Trčeći po dijagramu učini što možeš. □

Mayer-Vietorisov niz

To je još jedan koristan dugi egzaktni niz.

Teorem 26.1

Neka su $A, B \subseteq X$ potprostori t.d. je $X = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B$. Tada postoji dugačak egzaktan homološki niz

$$\cdots \longrightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{\Phi} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\Psi} H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A \cap B) \to \cdots$$
$$\cdots \to H_0(X).$$

Dokaz: Kao u dokazu teorema o isijecanju, označimo s $C_n(A+B)$ podgrupu od $C_n(X)$ koju čine lanci koji su sume n-lanaca u A i u B. Operator ruba $\partial\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ preslikava $C_n(A+B)$ u $C_{n-1}(A+B)$ pa grupe $C_n(A+B)$ tvore lančani kompleks.

Mayer-Vietorisov niz — dokaz

Promotrimo kratki egzaktan niz lančanih kompleksa

$$0 \to C_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} C_n(A) \oplus C_n(B) \xrightarrow{\psi} C_n(A+B) \to 0$$

gdje je $\varphi(x) = (x, -x)$ i $\psi(x, y) = x + y$.
Da je φ monomorfizam a ψ epimorfizam je očito.
Isto tako očito vrijedi $\psi\varphi = 0$ pa je $\operatorname{Im}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\psi$.

Obratno, ako je $\psi(x, y) = x + y = 0$ onda je $x = -y$, pa je x lanac i u A i u B (jer $y \in C_n(B) \Rightarrow -y \in C_n(B)$), pa je $x \in C_n(A \cap B)$, te je $(x, y) = (x, -x) = \varphi(x) \in \operatorname{Im}\varphi$.

Pripadni dugi egzaktni homološki niz je upravo Mayer-Vietorisov niz jer prema propoziciji 23.2 inkluzije $C_n(A+B) \hookrightarrow C_n(X)$ induciraju izomorfizme $H_n(A+B) \xrightarrow{\cong} H_n(X)$. □

Postoji relativna verzija Mayer-Vietorisovog niza, verzija za reduciranu homologiju, kao i verzija za slučaj kada je CW kompleks X unija dvaju potkompleksa A i B.

Homologija Kleinove boce

Primjer: Rastavimo Kleinovu bocu na uniju dviju Möbiusovih vrpci slijepljenih po zajedničkom rubu, $K = A \cup B$, i promotrimo sljedeći dio reduciranog Mayer-Vietorisovog niza

$$0 \to H_2(K) \to H_1(A \cap B) \xrightarrow{\Phi} H_1(A) \oplus H_1(B) \to H_1(K) \to 0$$

(A, B i $A \cap B$ su homotopski ekvivalentni kružnici).

$\Phi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ je dan s $\Phi(1) = (2, -2)$ jer rubna kružnica Möbiusove trake (generator od $H_1(A \cap B)$) obilazi centralnu kružnicu (generatore od $H_1(A)$ i $H_1(B)$) dvaput.

Stoga je Φ injektivan pa je $H_2(K) = 0$ a $H_1(K) \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\operatorname{Im}\Phi$.
Za bazu grupe $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ možemo uzeti $(1, 0)$ i $(1, -1)$ pa je $H_1(K) \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\operatorname{Im}\Phi = \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Više homološke grupe Kleinove boce su trivijalne, što slijedi iz dimenzionih razloga ili iz viših članova ovog istog Mayer-Vietorisovog niza.

Homologija komplementa diskova i sfera

Jordanov teorem o jednostavno zatvorenoj krivulji

Dokazat ćemo nekoliko klasičnih teorema topologije i algebre.

Propozicija 27.1

(a) *Za smještenje* $h\colon D^k \to S^n$ *je* $\tilde{H}_j(S^n \setminus h(D^k)) = 0$ *za sve* j.

(b) *Za* $k < n$ *i smještenje* $h\colon S^k \to S^n$ *je* $\tilde{H}_j(S^n \setminus h(S^k)) = \mathbb{Z}$ *za* $j = n - k - 1$, *a* 0 *inače.*

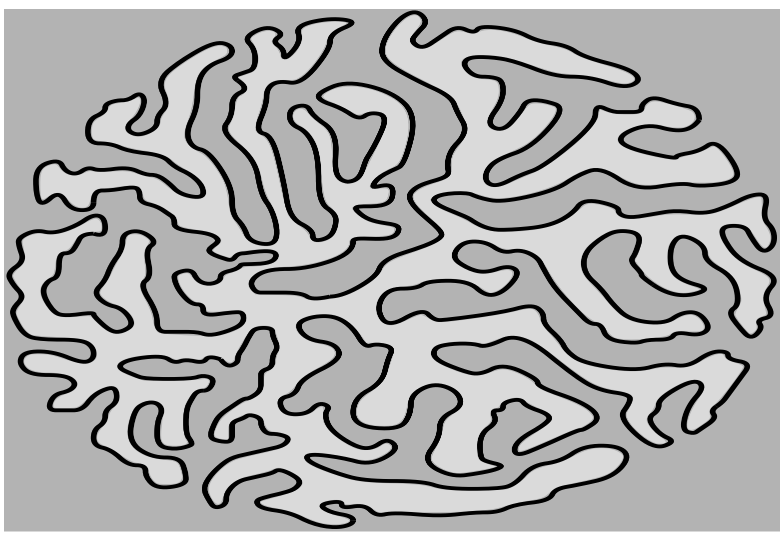
Za $n = 2$ i $k = 1$ tvrdnja (b) daje klasični Jordanov teorem:

Korolar 27.2 (Jordan)

Potprostor sfere S^2 *koji je homeomorfan kružnici* S^1 *dijeli* S^2 *na dva disjunktna otvorena (putevima) povezana skupa.* □

Primijetimo da svaka od tih otvorenih domena ima homologiju točke. Klasično se, umjesto u S^2, govori o homeomorfnoj slici kružnice u $\mathbb{R}^2$.

Jordanov teorem — ilustracija



Poopćeni Jordanov teorem i Schoenfliesov teorem

Tvrdnja (b) prethodne propozicije pokazuje da vrijedi i

Korolar 27.3 (Općenit Jordanov teorem)

Svako smještenje $(n-1)$*-sfere* S^{n-1} *u* S^n *dijeli* S^n *na dvije komplementarne otvorene komponente i svaka od njih ima homologiju točke.* □

Općenito to ipak ne znači da su te komplementarne domene homeomorfne diskovima D^n. Ipak, u dimenziji 2 vrijedi:

Korolar 27.4 (Klasični Schoenfliesov teorem)

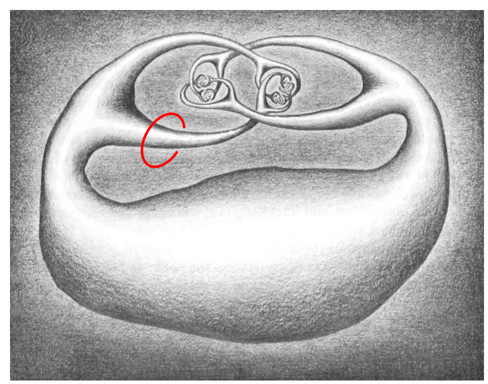
Svaka dva smještenja kružnice S^1 *u sferu* S^2 *(ili u ravninu* $\mathbb{R}^2$*) su ekvivalentna, tj. ekvivalentna standardnom smještenju* $S^1 \hookrightarrow S^2$.

Pritom „ekvivalentan" znači da postoji homeomorfizam $S^2 \xrightarrow{\cong} S^2$ koji prevodi jedno smještenje u drugo.

Alexanderova rogata sfera

Vrijedi li i Schönfliesov teorem u višim dimenzijama, tj. jesu li komplementarna područja smještene $(n-1)$-sfere u $\Sigma^{n-1} \subseteq S^n$ topološki n-diskovi?

NE (James Alexander 1924) (prvo je 1921. mislio da ima dokaz za DA)



„Vanjska" komponenta od $S^3 \setminus \Sigma^2$ nije 1-povezana, tj. fundamentalna grupa $\pi_1(S^3 \setminus \Sigma^2)$ je netrivijalna.

Poopćeni Schönfliesov teorem

(Morton Brown, 1960)

Zatvorenja komplementarnih domena smještene $(n-1)$*-sfere* Σ^{n-1} *u* S^n *su topološki* n*-diskovi ako i samo ako je* Σ^{n-1} *lokalno plosnata.*

Dokaz propozicije 27.1

(a) Za smještenje $h\colon D^k \to S^n$ je $\tilde{H}_j(S^n \setminus h(D^k)) = 0$ za sve j.

Dokaz: Indukcijom po k. Za $k = 0$ tvrdnja je trivijalna jer je $S^n \setminus h(D^0) \cong \mathbb{R}^n$.

Korak: Umjesto D^k gledajmo I^k.

Neka je $A = S^n \setminus h(I^{k-1} \times [0, 1/2])$ i $B = S^n \setminus h(I^{k-1} \times [1/2, 1])$.
$A \cup B = S^n \setminus h(I^{k-1} \times \{1/2\})$ pa je PPI $\tilde{H}_j(A \cup B) = 0$ za sve j.
$A \cap B = S^n \setminus h(I^k)$ pa iz Mayer-Vietorisovog niza dobivamo izomorfizam $\Phi\colon \tilde{H}_j(S^n \setminus h(I^k)) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}(A) \oplus \tilde{H}(B)$.

Obje komponente od Φ su, do na predznak, inducirane inkluzijama od $S^n \setminus h(I^k)$ u A odnosno B, pa ako $\tilde{H}_j(S^n \setminus h(I^k)) \neq 0$, tj. ako postoji ne-nulhomologan ciklus α u $S^n \setminus h(I^k)$ onda je on i ne-nulhomologan u A i/ili B.

„Stezanjem" zadnje koordinate od I^k možemo konstruirati silazan niz segmenata $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ u toj koordinati koji se steže na neku točku p, tako da α nije rub niti u jednom $S^n \setminus h(I^{k-1} \times I_m)$.

Nastavak dokaza propozicije 27.1

Kako je $S^n \setminus h(I^{k-1} \times \{p\}) \cong S^n \setminus h(I^{k-1})$, to je PPI α rub nekog lanca β u $S^n \setminus h(I^{k-1} \times \{p\})$.

Ali, lanac β je konačna linearna kombinacija singularnih simpleksa s kompaktnim slikama u $S^n \setminus h(I^{k-1} \times \{p\})$. Unija tih slika je pokrivena rastućim nizom otvorenih skupova $S^n \setminus h(I^{k-1} \times I_m)$, pa je zbog kompaktnost β lanac već u $S^n \setminus h(I^{k-1} \times I_m)$ za neki m.

Ta kontradikcija pokazuje da je α nulhomologan u $S^n \setminus h(I^k)$, što dokazuje korak indukcije a time i tvrdnju (a).

(b) Za $k < n$ i smještenje $h\colon S^k \to S^n$ je $\tilde{H}_j(S^n \setminus h(S^k)) = \mathbb{Z}$ za $j = n - k - 1$, a 0 inače.

Dokaz: Indukcijom po k. Trivijalno za $k = 0$ jer je $S^n \setminus h(S^0) \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$.
$S^k = D^k_+ \cup D^k_-$ i $D^k_+ \cap D^k_- = S^{k-1}$. Skupovi $A = S^n \setminus h(D^k_+)$ i $B = S^k \setminus h(D^k_-)$ imaju prema (a) trivijalnu reduciranu homologiju, pa Mayer-Vietoris daje izomorfizam $\tilde{H}_j(S^n \setminus h(S^k)) \xrightarrow{\partial^{-1}} \tilde{H}_{j+1}(S^n \setminus h(S^{k-1}))$. □

Teorem o invarijanciji domene

Brouwerovom teoremu o invarijanciji dimenzije, teorem 23.6, sličan je

Teorem 27.5 (Teorem o invarijanciji domene (Brouwer ∼ 1910.))

Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren podskup a $h\colon U \to \mathbb{R}^n$ smještenje. Tada je skup $h(U)$ otvoren u $\mathbb{R}^n$.

Dokazat ćemo ekvivalentnu tvrdnju da je $h(U)$ otvoren u $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.
Neka je $x \in U$ i neka je $D^n \subseteq U$ (zatvoren) disk s centrom u x. Dovoljno je pokazati da je $h(D^n \setminus \partial D^n)$ otvoren u S^n.

Prema propoziciji 27.1 $S^n \setminus h(\partial D^n)$ ima dvije komponente. To su $h(D^n \setminus \partial D^n)$ i $S^n \setminus h(D^n)$ (jer su to disjunktni skupovi od kojih je prvi putevima povezan jer je homeomorfan skupu $D^n \setminus \partial D^n$, a drugi je putevima povezan prema propoziciji). Kako je $S^n \setminus h(\partial D^n)$ otvoren u S^n, njegove su komponente isto što i komponente putevne povezanosti. Komponente prostora s konačno mnogo komponenata su otvorene, pa je $h(D^n \setminus \partial G^n)$ otvoren u $S^n \setminus h(\partial D^n)$, pa je otvoren i u S^n. □

Posljedice

Korolar 27.6

Neka su M i N dvije n-mnogostrukosti, $U \subseteq M$ otvoren podskup i $h\colon U \to N$ smještenje. Tada je $h(U)$ otvoren podskup od N.

Dokaz: Otvorenost je lokalno svojstvo a lokalno se radi o euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$. □

Korolar 27.7

Neka je M kompaktna n-mnogostrukost a N povezana n-mnogostrukost. Tada je svako smještenje $h\colon M \to N$ surjektivno, dakle i homeomorfizam.

Dokaz: Zbog kompaktnosti i činjenice de je N Hausdorffov prostor, $h(M)$ je zatvoren podskup od N, a zbog prethodnog korolara je i otvoren podskup od N. Zbog povezanosti je $h(M) = N$. □

Algebre s dijeljenjem

Konačnodimenzionalna ***algebra*** nad $\mathbb{R}$ je vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ na kojem je definirano množenje $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ koje je distributivno prema zbrajanju i dobro se ponaša prema množenju skalarima, tj. $\lambda(a\,b) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$.

Ne pretpostavlja se asocijativnost, komutativnost niti postojanje jedinice. Algebra A je ***algebra s dijeljenjem*** ako jednadžbe $a\,x = b$ i $x\,a = b$ imaju rješenje čim je $a \neq 0$, tj. linearna preslikavanja $x \mapsto a\,x$ i $x \mapsto x\,a$ su surjektivna, dakle imaju trivijalne jezgre, tj. u A nema divizora nule.

Klasični primjeri su $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$.

Frobenius (1877): $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$ su jedine *asocijativne* konačnodimenzionalne algebre s dijeljenjem.

Hurwitz (1898): $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$ su jedine konačnodimenzionalne algebre s dijeljenjem t.d. vrijedi $|a\,b| = |a| \cdot |b|$.

Bott&Milnor, Kervaire (1958): Konačnodimenzionalne algebre s dijeljenjem postoje samo u dimenzijama 1, 2, 4 i 8.

Komutativne algebre s dijeljenjem koje imaju jedinicu

Navedeni rezultati su duboki i netrivijalni. Mi ćemo dokazati jedan skromniji rezultat. Ova upotreba homoloških grupa potječe od Hopfa.

Teorem 27.8

$\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ su jedine konačnodimenzionalne algebre s dijeljenjem koje su komutativne i imaju jedinicu.

Dokaz: Neka je $\mathbb{R}^n$ komutativna algebra s dijeljenjem. Definirajmo preslikavanje $f\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ s $f(x) = \frac{x^2}{|x^2|}$ (u algebri s dijeljenjem je $x^2 \neq 0$ za $x \neq 0$). f je neprekidno jer je množenje, kao bilinearno preslikavanje, neprekidno.

Kako je $f(-x) = f(x)$, f inducira preslikavanje $\overline{f}\colon \mathbb{R}P^{n-1} \to S^{n-1}$.

Tvrdnja: $\overline{f}$ je injekcija.

Odavde slijedi da je $\overline{f}$ smještenje (kompaktnost i Hausdorffovost), pa za $n > 1$ iz korolara 27.7 slijedi da je $\overline{f}\colon \mathbb{R}P^{n-1} \to S^{n-1}$ homeomorfizam, što je za $n > 2$ nemoguće jer im se, npr. homološke grupe razlikuju.

Dokaz prethodne tvrdnje

Dokaz tvrdnje: Ako je $\overline{f}(x) = \overline{f}(y)$, tj. $f(x) = f(y)$, onda je $x^2 = \lambda^2 y^2$ za $\lambda = \sqrt{\frac{|x^2|}{|y^2|}} > 0$. Stoga je $x^2 - \lambda^2 y^2 = 0$, što se zbog komutativnosti i činjenice da je $\lambda \in \mathbb{R}$ faktorizira kao $(x - \lambda y)(x + \lambda y) = 0$. Kako nema divizora nule, zaključujemo da je $x = \pm\lambda y$, a kako su x i y jedinični vektori i λ je realan, mora biti $x = \pm y$, pa x i y određuju istu točku u $\mathbb{R}P^{n-1}$, tj. $\overline{f}$ je injekcija.

Završetak dokaza o algebrama s dijeljenjem

Ostaje dokazati da je 2-dimenzionalna komutativna algebra A s dijeljenjem koja ima jedinicu, izomorfna $\mathbb{C}$.

Neka je $j \in A$ neki element koji nije umnožak jedinice $1 \in A$ s realnim skalarom. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $j^2 = a + b\,j$. Tada je $(j - \frac{b}{2})^2 = a + \frac{b^2}{4} \in \mathbb{R}$, te možemo zamijeniti naš j sa $j - \frac{b}{2}$ pa će biti $j^2 = c$ za neki $c \in \mathbb{R}$. Ako je $c \geq 0$, npr. $c = d^2$ za neki $d \in \mathbb{R}$, onda iz $j^2 = d^2$ slijedi $(j - d)(j + d) = 0$, pa je $j = \pm d$, što se protivi izboru od j (j nije realan jer ako prvotni j nije bio realan onda niti $j - \frac{b}{2}$ ne može biti realan).

Dakle, $j^2 = -d^2$, pa, promjenom skale, možemo uzeti da je $j^2 = -1$, te je A izomorfno kompleksnim brojevima $\mathbb{C}$. $\square$

Stupanj preslikavanja

Za preslikavanje $f\colon S^n \to S^n$, $n > 0$, inducirani homomorfizam $f_*\colon H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ preslikava $\mathbb{Z}$ u $\mathbb{Z}$, pa mora imati oblik $f_*(\alpha) = d\,\alpha$ za neki $d \in \mathbb{Z}$. Taj broj d, koji ovisi o (homotopskoj klasi od f) naziva se ***stupanj preslikavanja*** f, oznaka $\deg f$.
Osnovna svojstva stupnja preslikavanja su:

- $\deg \mathbb{1}_{S^n} = 1$
- Ako f nije surjekcija onda je $\deg f = 0$.
- $f \simeq g \Rightarrow \deg f = \deg g$. Obrat je netrivijalan Hopfov rezultat iz 1925.
- $\deg(g \circ f) = \deg g \cdot \deg f$
- Za antipodno preslikavanje $x \mapsto -x$ je $\deg f = (-1)^{n+1}$.
- Ako $f\colon S^n \to S^n$ nema fiksne točke onda je $\deg f = (-1)^{n+1}$.

Vektorska polja na sferi

Pokazat ćemo nekoliko primjena stupnja preslikavanja.

Teorem 27.9

Na S^n postoji neprekidno nigdje iščezavajuće tangencijalno vektorsko polje ako i samo ako je n neparan.

Dokaz: Neka je $x \mapsto v(x)$ tangencijalno vektorsko polje na $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ t.d. je $v(x) \neq 0$ za sve x. Normiranjem možemo postići da je $\|v(x)\| = 1$ za sve x, pa su x i $v(x)$ međusobno okomiti jedinični vektori. Vektori $(\cos t)x + (\sin t)v(x)$, leže na jediničnoj kružnici u ravnini razapetoj vektorima x i $v(x)$, pa je s $f_t(x) := (\cos t)x + (\sin t)v(x)$, $0 \leq t \leq \pi$ definirana homotopija od identitete $\mathbb{1}$ na S^n do antipodnog preslikavanja $-\mathbb{1}$, pa je $\deg -\mathbb{1} = \deg \mathbb{1}$.
Dakle $(-1)^{n+1} = 1$ pa je n neparan.

Obratno, za $n = 2k-1$ definiramo $v(x) := (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2k}, x_{2k-1})$. To je tangencijalno vektorsko polje na S^n i $\|v(x)\| = 1$ za sve x. □

Slobodno djelovanje na sferi

Za djelovanje grupe G na prostor X kažemo da je ***slobodno*** ako jedino homeomorfizam pridružen neutralnom elementu $1 \in G$, dakle identiteta $\mathbb{1}_X$, ima fiksnu točku (i za nju su sve točke fiksne).

Propozicija 27.10

Za paran n jedino grupa $\mathbb{Z}_2$ može slobodno djelovati na sferi S^n.

Dokaz: Stupanj homeomorfizma mora biti ± 1 pa djelovanje grupe G definira preslikavanje $d\colon G \to \{1, -1\}$, i to je homomorfizam jer je $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$. Kako je djelovanje slobodno, netrivijalni elementi $g \in G$ nemaju fiksne točke, pa je po zadnjem od navedenih svojstava stupnja preslikavanja, $d(g) = (-1)^{n+1}$. Stoga, za paran n je $d(g) = -1$ pa je jezgra homomorfizma d trivijalna, tj. $G \subseteq \mathbb{Z}_2$. □

Još jedan Borsukov teorem

Preslikavanje $f\colon S^n \to S^n$ takvo da za sve x vrijedi $f(-x) = f(x)$ naziva se ***parno*** preslikavanje, a ako vrijedi $f(-x) = -f(x)$ naziva se ***neparno*** preslikavanje.

Propozicija 27.11

(a) *Ako je $f\colon S^n \to S^n$ parno preslikavanje onda je stupanj $\deg f$ paran. (Zapravo je $\deg f = 0$.)*

(b) *Ako je $f\colon S^n \to S^n$ neparno preslikavanje onda je stupanj $\deg f$ neparan.*

Dokaz nećemo provoditi. Tvrdnja (a) se dokazuje relativno jednostavno, a za tvrdnju (b) treba jedan dugi egzaktan homološki niz s koeficijentima $\mathbb{Z}_2$ za dvoslojno natkrivanje $p\colon \tilde{X} \to X$

$$\cdots \longrightarrow H_n(X;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau_*} H_n(\tilde{X};\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_*} H_n(X;\mathbb{Z}_2) \to H_{n-1}(X;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \cdots$$

gdje je τ_* specijalan slučaj tzv. *transfer homomorfizma*. □

Borsuk-Ulamov teorem

Kao korolar dobivamo

Korolar 27.12 (Borsuk-Ulamov teorem)

Za svako preslikavanje $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ postoji točka $x \in S^n$ takva da je $f(x) = f(-x)$.

Dokaz: Preslikavanje $g: S^n \to \mathbb{R}^n$ definirano s $g(x) := f(x) - f(-x)$ je neparno. Pokažimo da postoji x takav da je $g(x) = 0$. Pretpostavimo da je $g(x) \neq 0$ za sve x. Tada je preslikavanje $h: S^n \to S^{n-1}$ definirano s $h(x) = \frac{g(x)}{\|g(x)\|}$ također neparno. Prema prethodnoj propoziciji, restrikcija preslikavanja h na ekvator S^{n-1} ima neparan stupanj. Ali ta je restrikcija nulhomotopna preko restrikcije od h na npr. gornju polusferu od S^n, pa bi stupanj trebao biti nula. $\square$