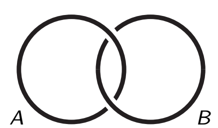
2 FUNDAMENTALNA GRUPA

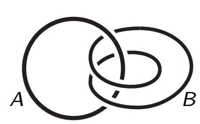
- Motivacija
- Putevi i homotopije
- Fundamentalna grupa kružnice
- Inducirani homomorfizmi

Ulančane kružnice

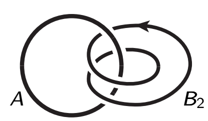
„Znamo" da kružnice A i B na slici ne možemo rastaviti nikakvim stezanjem/rastezanjem, guranjem/povlačenjem i sl. Fundamentalna grupa će omogućiti strog dokaz te činjenice.



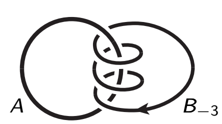
No kružnica B može i više puta obilaziti A, a i orijentacija može biti važna.



Dogovorimo se da je broj obilazaka B oko A *pozitivan* ako B prolazi „odostrag prema napred" kroz A, negativan ako je obratno, i da je taj broj jednak nuli ako A i B nisu ulančane.



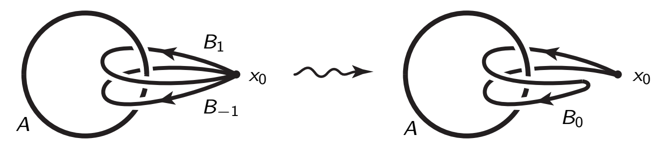
Dakle, svakoj orijentiranoj kružnici B pridružen je neki cijeli broj, i obratno za svaki $n \in \mathbb{Z}$ imamo kružnicu B_n koja n puta obilazi A.



Ali, htjeli bismo više, jer cijeli brojevi nisu samo skup — oni se mogu zbrajati, čine grupu.

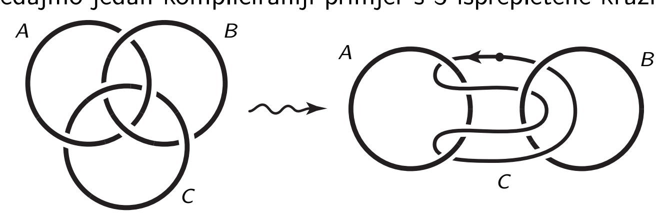
„Zbrajanje" petlji

Na orijentiranu kružnicu možemo gledati kao na petlju — put s istim početkom i završetkom, a petlje iz iste točke x_0 možemo „zbrajati" nadovezivanjem.
Npr. ako su B_1 i B_1' dvije petlje koje jednom obilaze A, njihov zbroj $B_1 + B_1'$ obilazi A dva puta, kao i petlja B_2 na koju se $B_1 + B_1'$ može deformirati. Slično se petlja $B_1 + B_{-1}$ deformira u petlju B_0 koja uopće ne obilazi A (nije „zapetljana" s A).



Borromeovi[2] prsteni

Pogledajmo jedan kompliciraniji primjer s 3 isprepletene kružnice:

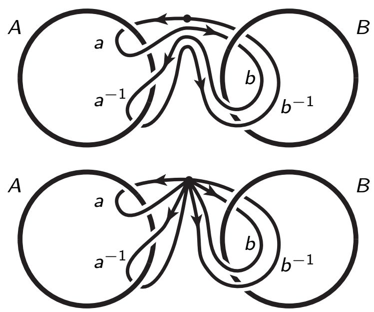


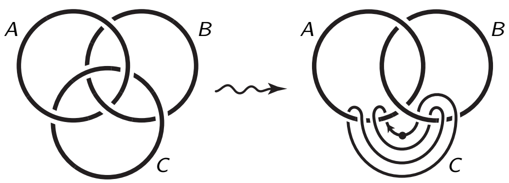
Kao i ranije, na jednu od kružnica, C, gledamo kao na petlju u komplementu ostale dvije. Možemo li ju „otpetljati"? Najprije „odvučemo" A od B. Krenemo li duž C od istaknute točke u označenom smjeru prolazimo „napred" kroz A, „napred" kroz B, „natrag" kroz A, „natrag" kroz B. Mjerimo li obilazak oko kružnica A i B s dva cijela broja, za svaku od njih ti su brojevi jednaki 0, što reflektira činjenicu da C nije zapetljana niti s A niti s B zasebno.

[2] Vitaliano Borromeo (1620–1690), talijanski arhitekt

Nekomutativnost

Označimo svaki prolaz petlje C kroz A i B slovima a i b ako je „napred”, odnosno a^{-1} i b^{-1} ako je „natrag”. C možemo deformirati u sumu (produkt) $a\,b\,a^{-1}b^{-1}$ od 4 petlje, tj. komutator od a i b, i činjenica da se C ne da „raspetljati” od $A \cup B$ znači da taj komutator nije trivijalan, tj. dobivena grupa nije komutativna (i obratno).

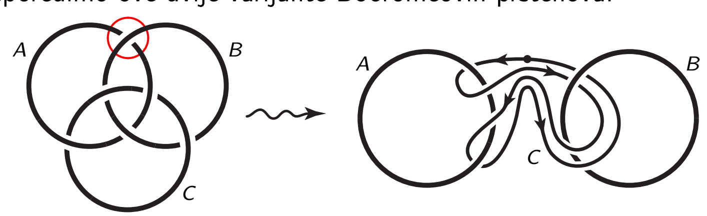


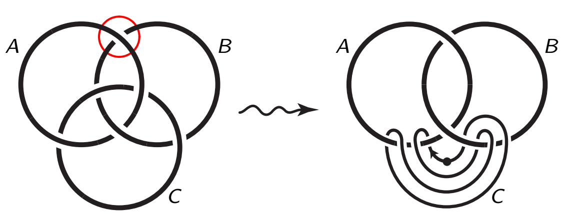


Ovo je jedna varijanta Booromeovih prstenova. I tu je C komutator „prolaza” petlji a i b kroz A i B, ali je sada taj komutator trivijalan.

Usporedba

Usporedimo ove dvije varijante Booromeovih prstenova:



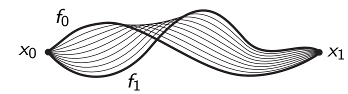


U čemu je razlika? Samo u jednom podvožnjaku/nadvožnjaku.

Putevi i homotopije

Put u prostoru X je preslikavanje $f\colon I \to X$, $I = [0,1]$.

Homotopija puteva je familija preslikavanja $f_t\colon I \to X$, $0 \le t \le 1$ t.d. je



(1) $f_t(0) = x_0$, $f_t(1) = x_1$ za sve t, i

(2) Pridruženo preslikavanje $F\colon I \times I \to X$ definirano s $F(s,t) = f_t(s)$ je neprekidno.

Kažemo da su putevi f_0 i f_1 ***homotopni*** i pišemo $f_0 \simeq f_1$, ili $f_0 \overset{f_t}{\simeq} f_1$ ako želimo naznačiti i sâmu homotopiju.

U $\mathbb{R}^n$ svaka su dva puta sa zajedničkim krajevima homotopna ***linearnom homotopijom*** $f_t(s) = (1-t)\,f_0(s) + t\,f_1(s)$.
To isto vrijedi i u svakom konveksnom potprostoru od $\mathbb{R}^n$.
Put f za koji je $f(0) = f(1) = x_0$ naziva se ***petlja*** u x_0.

Svaka je petlja u (konveksnom potprostoru od) $\mathbb{R}^n$ ***nul-homotopna***, tj. homotopna konstantnoj petlji.

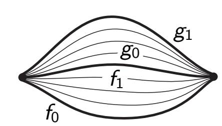
Homotopske klase

Propozicija 7.1

Homotopnost puteva sa zajedničkim krajevima je relacija ekvivalencije.

Klasu ekvivalencije puta f nazivamo njegovom ***homotopskom klasom*** i označavamo $[f]$.

Dokaz: *Tranzitivnost*: Ako je $f_0 \overset{f_t}{\simeq} f_1$ i $f_1 = g_0 \overset{g_t}{\simeq} g_1$, onda je $f_0 \overset{h_t}{\simeq} g_1$, gdje je $h_t := \begin{cases} f_{2t} & , 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g_{2t-1} & , \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$.

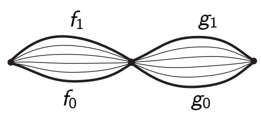


Refleksivnost i simetrija su očite. □

Produkt puteva

Za puteve $f, g \colon I \to X$ za koje je $f(1) = g(0)$ definira se **produktni put** $f \bullet g$ formulom $(f \bullet g)(s) := \begin{cases} f(2s) & , 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ g(2s-1) , & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$.

Produkt puteva „dobro se ponaša" prema homotopijama, tj. ako su $f_0 \overset{f_t}{\simeq} f_1$ i $g_0 \overset{g_t}{\simeq} g_1$ i $f_0(1) = g_0(0)$ t.d. je produkt $f_0 \bullet g_0$ definiran, onda $f_t \bullet g_t$ definira homotopiju $f_0 \bullet g_0 \simeq f_1 \bullet g_1$.



Fundamentalna grupa

Neka je X prostor, $x_0 \in X$ fiksirana **bazna točka**, i promatrajmo samo puteve u X koji počinju i završavaju u x_0, dakle petlje u x_0. Označimo s $\pi_1(X, x_0)$ skup svih homotopskih klasa $[f]$ petlji u x_0.

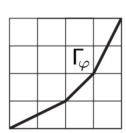
Propozicija 7.2

$\pi_1(X, x_0)$ je grupa s obzirom na množenje $[f]\,[g] := [f \bullet g]$.
*To je **fundamentalna grupa** prostora X u baznoj točki x_0.*

Dokaz: ***Reparametrizacija*** puta f je kompozicija $f\varphi$ gdje je $\varphi \colon I \to I$ bilo koje preslikavanje t.d. je $\varphi(0) = 0$ i $\varphi(1) = 1$.

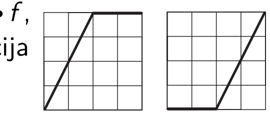
Očito je uvijek $f\varphi \overset{f\varphi_t}{\simeq} f$, gdje je $\varphi_t(s) = (1-t)\,\varphi(s) + t\,s$.

Asocijativnost: Neka su $f, g, h \colon I \to X$ putevi t.d. je $f(1) = g(0)$ i $g(1) = h(0)$ pa su definirani produkti $(f \bullet g) \bullet h$ i $f \bullet (g \bullet h)$. Tada je put $f \bullet (g \bullet h)$ reparametrizacija puta $(f \bullet g) \bullet h$ pomoću po dijelovima linearne funkcije φ kao na slici.



$\pi_1(X, x_0)$ je grupa

Neutralni element: Neka je $f \colon I \to X$ put od x_0 do x_1 a $c_{x_1} \colon I \to X$ neka je konstantan put u x_1. Tada je $f \bullet c_{x_1}$ reparametrizacija puta f funkcijom čiji je graf na prvoj slici. Slično, put $c_{x_0} \bullet f$, gdje je c_{x_0} konstantan put u x_0, je reparametrizacija puta f funkcijom čiji je graf na drugoj slici. Dakle, $[c_{x_0}]$ je neutralni element u $\pi_1(X, x_0)$.



Inverz: Za put f od x_0 do x_1 ***inverzni put*** $\overline{f}$ je put od x_1 do x_0 definiran kao $\overline{f}(s) := f(1-s)$.

Neka je $i \colon I \to I$ identiteta, dakle put u I od 0 do 1, a $c_0 \colon I \to I$ neka je konstantan put u 0. Tada je $i \bullet \overline{i} \simeq c_0$ jer je I konveksan, pa je

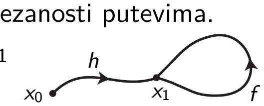
$$f \bullet \overline{f} = (f \circ i) \bullet (f \circ \overline{i}) = f \circ (i \bullet \overline{i}) \simeq f \circ c_0 = c_{x_0}.$$

Slično se vidi da je $\overline{f} \bullet f \simeq c_{x_1}$, pa je, kada se radi o petljama, $[\overline{f}] = [f]^{-1}$. □

Primjer: Za svaki konveksan $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i svaku točku $x_0 \in X$ je $\pi_1(X, x_0) = 0$.

Ovisnost o baznoj točki

Ovisi li fundamentalna grupa o izboru bazne točke? Očito da. Jasno je da se možemo nadati nekoj vezi između $\pi_1(X, x_0)$ i $\pi_1(X, x_1)$ jedino ako x_0 i x_1 leže u istoj komponenti povezanosti putevima.
Za put $h \colon I \to X$ od x_0 do x_1 i petlju f u x_1 definirajmo $\beta_h([f]) := [h \bullet f \bullet \overline{h}]$.



Propozicija 7.3

$\beta_h \colon \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$ je izomorfizam grupa.

Dokaz: Ako je f_t homotopija petlji u x_1 onda je $h \bullet f_t \bullet \overline{h}$ homotopija petlji u x_0 pa je β_h dobro definirano.

Nadalje, $\beta_h([f \bullet g]) = [h \bullet f \bullet g \bullet \overline{h}] = [h \bullet f \bullet \overline{h} \bullet h \bullet g \bullet \overline{h}] = \beta_h([f])\,\beta_h([g])$, pa je β_h homomorfizam.

Konačno, $\beta_h\,\beta_{\overline{h}}([f]) = \beta_h([\overline{h} \bullet f \bullet h]) = [h \bullet \overline{h} \bullet f \bullet h \bullet \overline{h}] = [f]$, i slično je $\beta_{\overline{h}}\,\beta_h([f]) = [f]$, pa je β_h izomorfizam s inverzom $\beta_{\overline{h}}$. □

Jednostavno povezani prostori

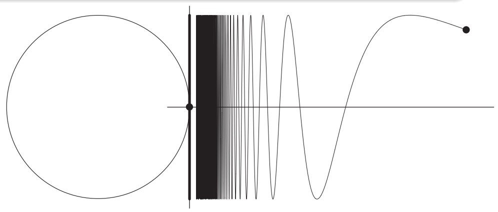
Dakle, ako je prostor X putevima povezan onda je grupa $\pi_1(X, x_0)$, do na izomorfizam, neovisna o baznoj točki x_0, pa se često označava jednostavno $\pi_1(X)$ ili samo $\pi_1 X$.

Za prostor X kažemo da je ***jednostavno povezan*** ili ***1-povezan*** ako je putevima povezan i $\pi_1(X) = 0$. Očito vrijedi

Propozicija 7.4

X je jednostavno povezan akko za svake dvije točke postoji jedinstvena homotopska klasa puteva koji povezuju te točke. □

Primjer povezanog (ne putevima povezanog) prostora kod kojeg fundamentalna grupa ovisi o baznoj točki



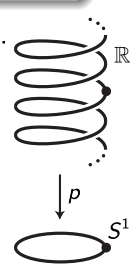
Fundamentalna grupa kružnice

Označimo s $\omega_n \colon I \to S^1$ petlju $s \mapsto (\cos 2\pi n s, \sin 2\pi n s)$ u točki $(1,0) \in S^1$, i neka je $\Phi \colon \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1)$ definirano s $\Phi(n) := [\omega_n]$.

Teorem 8.1

Preslikavanje $\Phi \colon \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1)$ je izomorfizam grupa.

Dokaz: Označimo s $p \colon \mathbb{R} \to S^1$ preslikavanje $s \mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$. Tada je $\omega_n = p\,\widetilde{\omega}_n$ gdje je $\widetilde{\omega}_n \colon I \to \mathbb{R}$ definirano s $\widetilde{\omega}_n(s) := ns$. Kaže se da je put $\widetilde{\omega}_n$ ***podizanje*** petlje ω_n. Zbog konveksnosti prostora $\mathbb{R}$ je $\Phi(n) = [p \circ \tilde{f}]$ za bilo koji put $\tilde{f}$ u $\mathbb{R}$ od 0 do n, jer je $\tilde{f} \simeq \widetilde{\omega}_n$ za svaki takav put.



Neka je $\tau_m \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ translacija $\tau_m(x) := x + m$. Tada je $\widetilde{\omega}_m \bullet (\tau_m \circ \widetilde{\omega}_n)$ put u $\mathbb{R}$ od 0 do $m+n$, pa je

$$\begin{aligned}\Phi(m+n) &= [p \circ (\widetilde{\omega}_m \bullet (\tau_m \circ \widetilde{\omega}_n))] = [(p \circ \widetilde{\omega}_m) \bullet (p \circ \tau_m \circ \widetilde{\omega}_n)] \\ &= [(p \circ \widetilde{\omega}_m) \bullet (p \circ \widetilde{\omega}_n)] = \Phi(m)\,\Phi(n).\end{aligned}$$

tj. Φ je homomorfizam. ✓

Φ je izomorfizam

Kako bismo dokazali da je Φ izomorfizam, dokazat ćemo:

(a) Za svaki put $f \colon I \to S^1$ iz točke $x_0 \in S^1$ i svaku točku $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, postoji jedinstveno podizanje $\tilde{f} \colon I \to \mathbb{R}$ s početkom u $\tilde{x}_0$.

(b) Za svaku homotopiju $f_t \colon [0,1] \to S^1$ puteva s početkom u x_0 i svaku točku $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, postoji jedinstvena homotopija puteva $\tilde{f}_t \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ s početkom u $\tilde{x}_0$ koja podiže f_t.

Pokažimo najprije kako iz ovih dviju tvrdnji slijedi teorem:

Surjektivnost: Za $[f] \in \pi_1(S^1) = \pi_1(S^1, (1,0))$ neka je $\tilde{f} \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ podizanje od f s početkom u $0 \in \mathbb{R}$.
Tada je $\tilde{f}(1) = n \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ za neki n, i $\Phi(n) = [p \circ \tilde{f}] = [f]$. ✓

Injektivnost: Neka je $\Phi(m) = \Phi(n)$, tj. $f_0 := \omega_m \simeq \omega_n =: f_1$. Neka je $\widetilde{f}_t$ podizanje te homotopije s početkom u $0 \in \mathbb{R}$. Zbog jedinstvenosti podizanja je $\widetilde{f}_0 = \widetilde{\omega}_m$ i $\widetilde{f}_1 = \widetilde{\omega}_n$. Jer je $\widetilde{f}_t$ homotopija puteva, krajevi miruju, pa je $m = \widetilde{\omega}_m(1) = \widetilde{f}_0(1) = \widetilde{f}_1(1) = \widetilde{\omega}_n(1) = n$. ✓

Dokaz tvrdnji (a) i (b)

Obje ćemo tvrdnje dobiti kao posljedicu sljedeće tvrdnje:

(c) Za svaku homotopiju $F \colon Y \times I \to S^1$ i podizanje $\widetilde{F}_0 \colon Y \times \{0\} \to \mathbb{R}$ restrikcije $F_0 = F|Y \times \{0\}$, postoji jedinstveno podizanje $\tilde{F} \colon Y \times I \to \mathbb{R}$ od F čija je restrikcija na $Y \times \{0\}$ zadano preslikavanje $\widetilde{F}_0$, tj. $\tilde{F}_0 = \widetilde{F}_0$.

$$\begin{tikzcd} Y \times \{0\} \arrow[r, "\widetilde{F}_0"] \arrow[d, hook] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dotted, "\tilde{F}"] & S^1 \end{tikzcd}$$

Odavde slijedi tvrdnja (a) za $Y = *$, a tvrdnja (b) dobije se ovako:
Neka je $Y = [0,1]$. Homotopiji f_t u (b) pridruženo je preslikavanje $F \colon [0,1] \times I \to S^1$ definirano s $F(s,t) := f_t(s)$.
Jedinstveno podizanje $\widetilde{F}_0 \colon [0,1] \times \{0\} \to \mathbb{R}$ dobije se primjenom (a).
Tada (c) daje jedinstveno podizanje $\tilde{F} \colon [0,1] \times I \to \mathbb{R}$.
Restrikcije $\tilde{F}|\{0\} \times I$ i $\tilde{F}|\{1\} \times I$ su podizanja konstantnih puteva u S^1, pa su to, zbog jedinstvenosti u (a), konstantni putevi u $\mathbb{R}$.
Znači, $\tilde{f}_t(s) := \tilde{F}(s,t)$ je homotopija puteva, i $\tilde{f}_t$ je podizanje od f_t jer je $p \circ \tilde{F} = F$. ✓

Dokaz tvrdnje (c)

Za dokaz (c) rabit ćemo sljedeće svojstvo preslikavanja $p\colon \mathbb{R} \to S^1$:

> Postoji otvoren pokrivač $\{U_\alpha\}$ od S^1 t.d. se za svaki α, skup $p^{-1}(U_\alpha)$ sastoji od disjunktne unije otvorenih podskupova u $\mathbb{R}$ t.d. je restrikcija od p na svakog od njih, homeomorfizam na U_α. $(*)$

Najprije ćemo za proizvoljnu točku $y \in Y$ konstruirati podizanje $\tilde{F}_y\colon N_y \times I \to \mathbb{R}$ za neku okolinu $N_y \ni y$. Za svaki t, točka $(y,t) \in Y \times I$ ima produktnu okolinu $N_t \times \langle a_t, b_t\rangle$ t.d. je $F(N_t \times \langle a_t, b_t\rangle) \subseteq U_\alpha$ za neki α. Zbog kompaktnosti, konačno mnogo takvih okolina pokriva $\{y\} \times I$. Stoga postoji okolina $N \ni y$ i $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ t.d. je za svaki i, $F(N \times [t_i, t_{i+1}])$ sadržan u nekom U_α, kojeg ćemo označiti U_i.

Nastavak dokaza tvrdnje (c)

Pretpostavimo induktivno da smo već konstruirali $\tilde{F}$ na $N \times [0, t_i]$. Kako je $F(N \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$, prema $(*)$ postoji otvoren skup $\tilde{U}_i \subseteq \mathbb{R}$ kojeg p homeomorfno preslikava na U_i, t.d. je $\tilde{F}(y, t_i) \in \tilde{U}_i$.
Možemo postići da je $\tilde{F}(N \times \{t_i\}) \subseteq \tilde{U}_i$, jer ako nije onda zamijenimo $N \times \{t_i\}$ s presjekom $(N \times \{t_i\}) \cap \tilde{F}^{-1}(\tilde{U}_i)$ t.j. smanjimo N tako da bude $\tilde{F}(N \times \{t_i\}) \subseteq \tilde{U}_i$.
Sada možemo definirati $\tilde{F}$ i na $N \times [t_i, t_{i+1}]$ kao kompoziciju preslikavanja F i homeomorfizma $(p|\tilde{U}_i)^{-1}\colon U_i \to \tilde{U}_i$.
Nakon konačno mnogo koraka dobivamo podizanje $\tilde{F}_y\colon N_y \times I \to \mathbb{R}$ za neku okolinu $N_y \ni y$. ✓

Jedinstvenost podizanja u slučaju $Y = *$

Dokažimo sada jedinstvenost podizanja u specijalnom slučaju kada je Y samo jedna točka. U tom slučaju ne trebamo Y niti pisati, pa pretpostavimo da su $\tilde{F}, \tilde{F}'\colon I \to \mathbb{R}$ dva podizanja preslikavanja $F\colon I \to S^1$ t.d. je $\tilde{F}(0) = \tilde{F}'(0)$. Kao ranije, odaberimo $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ t.d. je za sve i, $F([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$.
Pretpostavimo induktivno da je $\tilde{F} = \tilde{F}'$ na $[0, t_i]$.
Zbog povezanosti, cijeli skup $\tilde{F}([t_i, t_{i+1}])$ mora ležati u jednom od disjunktnih otvorenih skupova $\tilde{U}_i$ koji se homeomorfno projiciraju na U_i.
Zbog istog razloga i jer je $\tilde{F}'(t_i) = \tilde{F}(t_i)$, mora biti i $\tilde{F}'([t_i, t_{i+1}]) \subseteq \tilde{U}_i$.
Kako je $p|\tilde{U}_i$ injekcija i $p \circ \tilde{F}' = p \circ \tilde{F}$, mora biti $\tilde{F}' = \tilde{F}$ na $[t_i, t_{i+1}]$, odakle indukcijom slijedi tražena jedinstvenost. ✓

Kraj dokaza tvrdnje (c) i teorema 8.1

Dakle, oko svake točke $y \in Y$ postoji okolina N_y i podizanje $\tilde{F}_y\colon N_y \times I \to \mathbb{R}$, i zbog dokazane jedinstvenosti, ta se podizanja podudaraju na $\{y\} \times I$ kad god je $y \in N_{y'} \cap N_{y''}$. Tako dobivamo dobro definirano jedinstveno podizanje $\tilde{F}$ na cijelom $Y \times I$.

Podizanje $\tilde{F}$ je neprekidno jer je neprekidno na svakom $N_y \times I$, a skupovi $N_y \times I$ su otvoreni i pokrivaju $Y \times I$. □

Napomena: Preslikavanje $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ definirano s $p(s) := (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$ iz dokaza teorema 8.1 obično se naziva eksponencijalno preslikavanje. Naime, ako na S^1 gledamo kao na jediničnu kružnicu u kompleksnoj ravnini, onda je $p(s) = e^{2\pi i s}$.

Primjena: osnovni teorem algebre

Teorem 8.2 (Osnovni teorem algebre)

Svaki nekonstantni polinom s kompleksnim koeficijentima ima nultočku u $\mathbb{C}$.

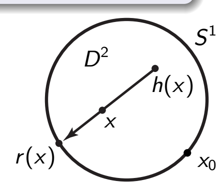
Dokaz: Pretpostavimo da $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ nema nultočke u $\mathbb{C}$.
Tada je za svaki $r \geq 0$ formulom $f_r^{(p)}(s) := \frac{p(r\,e^{2\pi i s})/p(r)}{|p(r\,e^{2\pi i s})/p(r)|}$, $s \in [0,1]$, definirana petlja u S^1 bazirana u 1. Variranjem r unutar $[0,r]$ vidimo da su sve te petlje homotopne petlji $f_0^{(p)}$, koja je konstantna petlja u 1, pa je $[f_r^{(p)}] = 0 \in \pi_1(S^1)$ za sve r.
Neka je $r > \max\{1, |a_1| + \cdots + |a_n|\}$. Tada za $|z| = r$ vrijedi
$|z^n| = r^n = r \cdot r^{n-1} > (|a_1| + \cdots + |a_n|)\,|z^{n-1}| \geq |a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n|$.
Zbog $|z^n| > |a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n|$, $p_t(z) := z^n + t(a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n)$ nema za $t \in [0,1]$ nultočaka na kružnici $|z| = r$. Familija $f_r^{(p_t)}$ je homotopija od petlje $f_r^{(p_0)}(s) = e^{2\pi i n s} = \omega_n(s)$ do $f_r^{(p)}$, pa je $[\omega_n] = [f_r^{(p)}] = 0$, tj. $n = 0$. □

Primjena: Brouwerov teorem o fiksnoj točki u dimenziji 2

Teorem 8.3 (Brouwer ∼ 1910.)

Svako neprekidno preslikavanje $h\colon D^2 \to D^2$ ima fiksnu točku.

Dokaz: Pretpostavimo da je $h(x) \neq x$ za sve $x \in D^2$.
Neka je $r(x)$ presjek sa $S^1 = \partial D^2$, zrake iz $h(x)$ kroz x. Time je definirana retrakcija $r\colon D^2 \to S^1$.



Pokažimo da takva retrakcija ne može postojati:
Neka je f_0 bilo koja petlja u S^1 bazirana u $x_0 \in S^1$.
U D^2 postoji homotopija petlje f_0 do konstantne petlje u x_0, pa će kompozicija retrakcije r s tom homotopijom dati homotopiju u S^1 od f_0 do konstantnog preslikavanja u x_0, što bi značilo da je svaka petlja u S^1 nulhomotopna, u kontradikciji s $\pi_1(S^1) \neq 0$. □

Primjena: Borsuk-Ulamov teorem u dimenziji 2

Teorem 8.4 (Borsuk-Ulam)

Za svako neprekidno preslikavanje $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ postoji par antipodnih točaka x i $-x$ t.d. je $f(x) = f(-x)$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $f(x) \neq f(-x)$ za sve x. Tada je s $g(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{|f(x)-f(-x)|}$ dobro definirano preslikavanje $g\colon S^2 \to S^1$. Petlja $\eta(s) := (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0)$ jednom obilazi ekvator od $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, i neka je $h := g \circ \eta\colon I \to S^1$.
Zbog $g(-x) = -g(x)$ i $\eta(s + \frac{1}{2}) = -\eta(s)$, vrijedi

$$h(s+\tfrac{1}{2}) = g(\eta(s+\tfrac{1}{2})) = g(-\eta(s)) = -g(\eta(s)) = -h(s) \text{ za sve } s \in [0, \tfrac{1}{2}].$$

Neka je $\tilde{h}\colon I \to \mathbb{R}$ podizanje petlje h. Tada je $\tilde{h}(s + \frac{1}{2}) = \tilde{h}(s) + \frac{q}{2}$ za neki neparan broj q (jer se $\tilde{h}(s+\frac{1}{2})$ i $\tilde{h}(s)$ projiciraju u dijametralne točke).
Zbog neprekidnosti, q ne ovisi o s, pa je specijalno $\tilde{h}(1) = \tilde{h}(\frac{1}{2}) + \frac{q}{2} = \tilde{h}(0) + q$.
Znači h predstavlja q-struki generator od $\pi_1(S^1)$, a kako je q neparan, $h \not\simeq 0$.
Ali h je kompozicija $I \xrightarrow{\eta} S^2 \xrightarrow{g} S^1$ i očito je $\eta \simeq 0$, pa mora biti $h \simeq 0$. □

Rastav sfere S^2 na tri zatvorena skupa

Korolar 8.5

Neka je $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ gdje su skupovi A_1, A_2, A_3 zatvoreni. Tada barem jedan od njih sadrži par antipodnih točaka.

Dokaz: Za $x \in S^2$ neka je $d_i(x) := d(x, A_i)$, $i = 1, 2, 3$.
Preslikavanje $x \mapsto (d_1(x), d_2(x))$ je neprekidno preslikavanje $S^2 \to \mathbb{R}^2$ pa, prema Borsuk-Ulamovu teoremu, postoji x t.d. je $d_1(x) = d_1(-x)$ i $d_2(x) = d_2(-x)$. Ako je jedan od tih brojeva jednak 0, onda x i $-x$ leže u $\overline{A_1} = A_1$ ili oba leže u $\overline{A_2} = A_2$.
Ako su pak oba broja pozitivna, onda niti x niti $-x$ ne leže niti u A_1 niti u A_2, pa oba moraju ležati u A_3. □

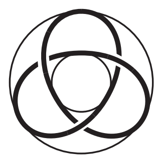
Fundamentalna grupa produkta

Propozicija 8.6

Ako su X i Y putevima povezani prostori onda je
$$\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y).$$

Dokaz: Svaka je petlja $f = (g, h)\colon I \to X \times Y$ ekvivalentna dvjema petljama: jednoj u X i jednoj u Y. Isto je tako svaka homotopija f_t petlji u $X \times Y$ ekvivalentna dvjema homotopijama petlji u X odnosno Y. Tako dobivamo bijekciju
$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$
danu s $[f] \mapsto ([g], [h])$, koja je očito izomorfizam grupa. □

Primjer: Fundamentalna grupa torusa. Prema propoziciji je $\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Paru $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ odgovara petlja $\omega_{pq} = (\omega_p, \omega_q)$ koja obilazi p puta oko jednog S^1-faktora i q puta oko drugog. Ta petlja može biti i zauzlana, kao što pokazuje primjer $p = 3$, $q = 2$ na slici.



Inducirani homomorfizmi

Neka je $\varphi\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ preslikavanje punktiranih prostora. Tada φ ***inducira homomorfizam*** $\varphi_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ definiran s $\varphi_*([f]) := [\varphi f]$.

Preslikavanje φ_* dobro je definirano jer ako je $f_0 \overset{f_t}{\simeq} f_1$ onda je $\varphi f_0 \overset{\varphi f_t}{\simeq} \varphi f_1$, pa je $\varphi_*([f_0]) = [\varphi f_0] = [\varphi f_1] = \varphi_*([f_1])$.
Nadalje, φ_* je homomorfizam jer je $\varphi \circ (f \bullet g) = (\varphi \circ f) \bullet (\varphi \circ g)$.

Direktno iz definicije slijedi

Propozicija 9.1

(1) *Za kompoziciju $(X, x_0) \xrightarrow{\varphi} (Y, y_0) \xrightarrow{\psi} (Z, z_0)$ je $(\psi\,\varphi)_* = \psi_*\,\varphi_*$.*

(2) *$\mathbb{1}_* = \mathbb{1}$, tj. identiteta $\mathbb{1}_X\colon X \to X$ inducira identitetu $\mathbb{1}_{\pi_1(X,x_0)}\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.* □

Drugim riječima $\pi_1\colon \mathbf{Top}_0 \to \mathbf{Gp}$ je (kovarijantan) funktor.

Fundamentalna grupa sfera

Odavde, „general nonsense” argumentacijom, slijedi

Korolar 9.2

Ako je $\varphi\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ homeomorfizam onda je $\varphi_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ izomorfizam.
Specijalno, fundamentalna grupa je topološka invarijanta. □

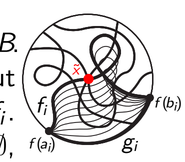
Teorem 9.3

$\pi_1(S^n) = 0$ *za* $n \geq 2$.

Dokaz: Neka je f petlja u S^n bazirana u točki $x_0 \in S^n$. Ako f nije surjekcija, tj. ako postoji točka $x \neq x_0$ koja nije u slici petlje f, onda je f zapravo petlja u $S^n \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^n$ pa je nul-homotopna.
Dakle, kako bismo dokazali teorem, dovoljno je dokazati da je petlja f homotopna nekoj petlji koja nije surjekcija.

„Odmicanje” petlje od neke točke

Neka je $\tilde{x} \neq x_0$ neka točka i $B \subseteq S^n$ kugla oko $\tilde{x}$, dovoljno mala da ne sadrži x_0. Skup $f^{-1}(B)$ sastoji se od, možda beskonačne, familije *disjunktnih* intervala $\langle a_i, b_i \rangle$. Zbog kompaktnosti, $f^{-1}(\tilde{x})$ je sadržan u konačnoj uniji tih intervala. Neka je $\langle a_i, b_i \rangle$ jedan od njih, tj. $\langle a_i, b_i \rangle \cap f^{-1}(\tilde{x}) \neq \emptyset$, i neka je $f_i := f|[a_i, b_i]$.
Put f_i leži u $\overline{B}$ i njegove krajnje točke $f(a_i)$, $f(b_i)$ leže na ∂B.
Za $n \geq 2$ je $\partial B \cong S^{n-1}$ putevima povezan, pa neka je g_i put u $\partial B \subseteq \overline{B}$ od $f(a_i)$ do $f(b_i)$. Kako je $\overline{B} \cong D^n$, to je $g_i \simeq f_i$.
Zamijenimo li f_i s g_i za sve i za koje je $\langle a_i, b_i \rangle \cap f^{-1}(\tilde{x}) \neq \emptyset$, dobit ćemo petlju u x_0 koja ne prolazi točkom $\tilde{x}$, dakle nije surjekcija, a homotopna je zadanoj petlji f. □



Primjer

Za bilo koju točku $x \in \mathbb{R}^n$ je $\mathbb{R}^n \setminus \{x\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$, pa je
$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \cong \pi_1(S^{n-1}) \times \pi_1(\mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}\,, & n = 2 \\ 0\,, & n > 2 \end{cases}.$$

$\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}^n$ za $n \neq 2$

Kao posljedicu dobivamo ovaj „svakom jasan” ali netrivijalan rezultat:

Korolar 9.4

Za $n \neq 2$ prostori $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^n$ nisu homeomorfni.

Dokaz: Pretpostavimo da postoji homeomorfizam $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$.
Tada je i restrikcija $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ homeomorfizam.
Ali, za $n = 1$ prostor $\mathbb{R}^1 \setminus \{f(0)\}$ nije povezan, dok $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ jeste,
a za $n > 2$ je $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = 0$, dok je $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$. □

Koristeći se višim homotopskim ili homološkim grupama, pokazuje se da je $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^m$ za $n \neq m$.

Štoviše, vrijedi tzv. *teorem o invarijanciji domene* da neprazni otvoreni podskupovi od $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ mogu biti homeomorfni jedino kada je $n = m$.

Homomorfizmi inducirani retrakcijom i deformacijskom retrakcijom

Propozicija 9.5

Ako je A retrakt prostora X onda inkluzija $i : A \hookrightarrow X$ inducira monomorfizam $i_*\colon \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.
Ako je A deformacijski retrakt od X onda je i_* izomorfizam.

Dokaz: Zbog $r\,i = \mathbb{1}_A$ je $r_*\,i_* = \mathbb{1}_{\pi_1(A,x_0)}$ pa je i_* monomorfizam.
Zbog $i\,r \simeq \mathbb{1}_X$ je $i_*\,r_* = \mathbb{1}_{\pi_1(X,x_0)}$ pa je i_* epimorfizam. □

Grupovno-teorijski analogon retrakcije je homomorfizam grupe na podgrupu koji je identiteta na podgrupi. Ako je, dakle, potprostor A retrakt od X, onda je podgrupa $\pi_1(A, x_0)$ „retrakt” grupe $\pi_1(X, x_0)$.
Postojanje „retrakcijskog homomorfizma” $\rho\colon G \twoheadrightarrow H$ prilično je jak uvjet na podgrupu H.
Ako je H normalna podgrupa od G, onda je $G = H \times \operatorname{Ker}\rho$.
Ako H nije normalna podgrupa, onda je G tzv. *semidirektni produkt* $G = H \rtimes \operatorname{Ker}\rho$. □

Fundamentalna grupa je homotopska invarijanta

Na isti način kao što smo, rabeći samo funktorijalnost, u korolaru 9.2 pokazali da je π_1 topološka invarijanta, pokazuje se da je π_1 i invarijanta ***punktiranog homotopskog tipa***.
To znači da ako postoji ***punktirana homotopska ekvivalencija*** $\varphi\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$, tj. φ je preslikavanje za koje postoji $\psi\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ t.d. je $\psi\,\varphi \simeq \mathbb{1}_{(X,x_0)}$, tj. $\psi\,\varphi \simeq \mathbb{1}_X \operatorname{rel}\{x_0\}$, i slično za $\varphi\,\psi$, onda je $\varphi_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ izomorfizam.
(To smo zapravo već bili rabili u dokazu prethodne propozicije 9.5.)
Bavljenje baznom točkom je „gnjavaža” pa je korisno znati da vrijedi

Propozicija 9.6

Ako je $\varphi\colon X \to Y$ (slobodna) homotopska ekvivalencija, onda je $\varphi_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ izomorfizam za svaku točku $x_0 \in X$.

Dokažimo najprije jednu lemu:

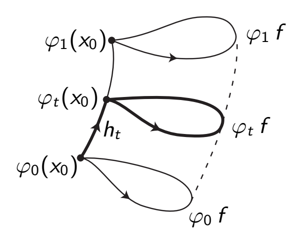
Slobodna homotopija i fundamentalna grupa

Lema 9.7

Neka je $\varphi_t\colon X \to Y$ homotopija a $h(t) := \varphi_t(x_0)$ put koji tom homotopijom opisuje točka $\varphi_0(x_0) \in Y$. Tada je $\varphi_{0*} = \beta_h\,\varphi_{1*}$, tj. desni dijagram komutira.

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y,\varphi_1(x_0)) \arrow[dd, "\beta_h"] \\
\pi_1(X,x_0) \arrow[ur, "\varphi_{1*}"] \arrow[dr, "\varphi_{0*}"'] & = \\
 & \pi_1(Y,\varphi_0(x_0))
\end{tikzcd}$$

Dokaz: Neka je h_t restrikcija puta h na $[0, t]$ ali reparametrizirana t.d. je domena ponovno $[0, 1]$.
Npr. možemo uzeti $h_t(s) := h(t\,s)$.
Neka je f petlja u X iz točke x_0.
Tada je $h_t \bullet (\varphi_t\,f) \bullet \overline{h_t}$ homotopija petlji u $\varphi_0(x_0)$.
Za $t = 0$ to je petlja $c_{x_0} \bullet (\varphi_0\,f) \bullet c_{x_0} \simeq \varphi_0\,f$, a za $t = 1$ to je petlja $h \bullet (\varphi_1\,f) \bullet \overline{h}$, pa je $\varphi_{0*}([f]) = \beta_h(\varphi_{1*}([f]))$. □



Dokaz propozicije 9.6:

Dokaz propozicije 9.6 Neka je $\psi\colon Y \to X$ homotopski inverz za φ, tj. $\psi\,\varphi \simeq \mathbb{1}_X$ i $\varphi\,\psi \simeq \mathbb{1}_Y$. Pogledajmo kompoziciju

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \xrightarrow{\psi_*} \pi_1(X, \psi\varphi(x_0)) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(Y, \varphi\psi\varphi(x_0)). \qquad (*)$$

Kako je $\psi\,\varphi \simeq \mathbb{1}_X$ to je, prema prethodnoj lemi, $\psi_*\,\varphi_* = \beta_h\,\mathbb{1}_{\pi_1(X,x_0)} = \beta_h$ za neki put h od $\psi\varphi(x_0)$ do x_0.

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(X, x_0) \arrow[d, "\beta_h"] \\
\pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "\mathbb{1}"] \arrow[dr, "\psi_*\varphi_*"'] & = \\
 & \pi_1(X, \psi\varphi(x_0))
\end{tikzcd}$$

Kako je β_h izomorfizam, to je $\psi_*\colon \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \to \pi_1(X, \psi\varphi(x_0))$ epimorfizam.

Na isti način zaključujemo da je $\varphi_*\psi_* = \beta_{h'}$ za neki put h' od $\varphi\psi\varphi(x_0)$ do $\varphi(x_0)$, pa je ψ_* monomorfizam. Dakle, ψ_* je izomorfizam pa je i $\varphi_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ izomorfizam. □

Napomena: Uoči da su prvi i drugi φ_* u $(*)$ *različiti* homomorfizmi!