Matematička analiza 4

Šime Ungar

Predgovor

Kažimo nešto o oznakama. Matematičari su tokom stoljeća razvili vrlo sofisticirane oznake. Mnoge su postale standardne i koriste ih svi, ali neke, iz različitih razloga — nisu. U principu, svejedno je kakve oznake koristimo, ali budući same sebi nisu svrha, znatno olakšava čitanje i razumijevanje ako su jednostavne i, još važnije, konzistentne. To znači da se za istovrsne ili slične matematičke objekte koriste slične oznake — ili mala ili velika slova, grčka slova, slova iz istog dijela abecede, isti font, i slično. To naravno nije uvijek moguće, ali mi ćemo nastojati biti što dosljedniji. Tako će $U, V, W, \ldots$ uvijek biti otvoreni skupovi, Ω će uvijek biti otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ ili $\mathbb{C}$ koji je domena promatrane funkcije. Velika pisana slova kao $\mathcal{K}, \mathcal{U}, \ldots$ označavat će familije skupova, $\mathsf{K}, \mathsf{C}, \ldots$ neke specijalne skupove (Kochova krivulja, Cantorov skup, …). Skalarni produkt vektora x i y označavat ćemo sa $(x \mid y)$, uređen par sa (x, y), a otvoren interval sa $\langle x, y \rangle$ (ovdje su naravno x i y realni brojevi). Od oznaka koje nisu u literaturi standardne koristit ćemo naprimjer $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ u značenju '$f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ gdje je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$'. Ova oznaka, matematički govoreći, nije sasvim korektna, jer tu nema nikakve funkcije $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (dakle funkcije koja bi bila definirana na *čitavom* $\mathbb{R}^n$), ali je dovoljno sugestivna da opravdava njeno korištenje. Bolja oznaka za preslikavanje f koje je definirano samo na podskupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je $f\colon \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^m$. Ovu ćemo oznaku također koristiti. U vezi označavanja funkcija (preslikavanja) i *čitanja* označenog, napomenimo i sljedeće: $f\colon X \to Y$ se čita 'preslikavanje (funkcija) f sa X *u* Y', a ne '*na* Y'. Kada se kaže *na*, to znači da je f surjekcija, pa ukoliko nemamo *zaista* posla sa surjektivnim preslikavanjem, treba kazati *u*. Spomenimo također, da oznaka $f\colon X \to Y$ znači da je funkcija f definirana u *svim* točkama skupa X.

Koristit ćemo još jednu oznaku koja je sasvim nestandardna. Ukoliko je $f\colon X \to Y$ preslikavanje i $y \in Y$ točka, sa $f^{\leftarrow}(y)$ označavat ćemo skup točaka $x \in X$ koje f preslikava u y. Dakle, $f^{\leftarrow}(y) := \{\, x \in X : f(x) = y \,\}$ je *original* točke y. To je podskup od X. Uobičajena oznaka za to je $f^{-1}(y)$, ali u ovoj knjizi, jer se radi o udžbeniku, pisat ćemo $f^{\leftarrow}(y)$ da naglasimo da se ne radi o vrijednosti *inverzne fukcije* f^{-1} u točki y, koja u danoj situaciji najčešće i ne postoji, a što studenti često zaborave. Ukoliko inverzna funkcija $f^{-1}\colon X \to Y$ u nekoj situaciji zaista postoji, onda je naravno $f^{\leftarrow}(y) = \{f^{-1}(y)\}$, što se najčešće, iako ne sasvim korektno, piše $f^{\leftarrow}(y) = f^{-1}(y)$ (kao što se gotovo uvijek isto tako nekorektno piše $f(A) = 1$ kada je $f(x) = 1$ za sve $x \in A$, umjesto, kako bi trebalo, $f(A) = \{1\}$. Posve analogno, označavat ćemo s $f^{\leftarrow}(B)$ original skupa $B \subseteq Y$. Dakle, $f^{\leftarrow}(B) := \{\, x \in X : f(x) \in B \,\} \subseteq X$. Ukoliko postoji inverzna funkcija $f^{-1}\colon Y \to X$, onda je naravno $f^{\leftarrow}(B) = f^{-1}(B)$, i ova oznaka *je* korektna.

Sadržaj

Popis oznaka

$\mathbb{R}$ skup realnih brojeva

$\mathbb{R}^*$ skup realnih brojeva različitih od 0

$\mathbb{R}_+$ skup nenegativnih realnih brojeva

$\mathbb{R}_+^*$ skup strogo pozitivnih realnih brojeva

$\mathbb{N}$ skup prirodnih brojeva

$\mathbb{Q}$ skup racionalnih brojeva

$\mathbb{C}$ skup kompleksnih brojeva

$\mathbb{C}^*$ skup kompleksnih brojeva različitih od 0

$\mathbb{Z}$ skup cijelih brojeva

$\mathbb{R}^n$ n-dimenzionalan euklidski prostor

Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ ili $\mathbb{C}$, najčešće domena promatrane diferencijabilne odnosno derivabilne funkcije

$f\colon S \subseteq X \to Y$ preslikavanje $f\colon S \to Y$, gdje je $S \subseteq X$. Najčešće se koristi kao $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Ova oznaka nije sasvim korektna. Bolja je oznaka:

$f\colon X \supseteq S \to Y$ preslikavanje $f\colon S \to Y$, gdje je $S \subseteq X$. Najčešće se koristi kao $f\colon \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$

$K(P_0, r), \overline{K}(P_0, r)$ otvorena, odnosno zatvorena, kugla (krug, ukoliko se radi o ravnini) oko točke P_0 radijusa $r > 0$

$K(z, r), \overline{K}(z, r)$ otvoren, odnosno zatvoren, krug u $\mathbb{C}$ oko z radijusa $r > 0$

$\operatorname{Int} S$ interior skupa S; najveći otvoren skup koji je sadržan u S

$B(X, Y)$ prostor omeđenih funkcija sa X u Y

$C(X, Y)$ prostor neprekidnih funkcija sa X u Y

$BC(X, Y)$ prostor omeđenih neprekidnih funkcija sa X u Y

$\hookrightarrow$ inkluzija

$\twoheadrightarrow$ surjektivno preslikavanje, preslikavanje *na*

$\rightarrowtail$ injektivno preslikavanje, 1–1 preslikavanje

$\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow$ bijektivno preslikavanje, preslikavanje 1–1 i *na*

$f \equiv 0,\ g \equiv 1$ konstantna preslikavanja $f(x) = 0$, $g(x) = 1$ za sve $x \in X$

$[a, b]$ zatvoren *segment* realnih brojeva, $[a, b] = \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$

$\langle a, b\rangle$ otvoren *interval* realnih brojeva, $\langle a, b\rangle = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$

$(x \mid y)$ skalarni produkt vektora x i y

$f^{\leftarrow}(y) := \{\, x \in X : f(x) = y \,\} \subseteq X$ pri čemu je $f\colon X \to Y$ preslikavanje skup originala točke y. Uobičajena je oznaka $f^{-1}(y)$. Ovu oznaku ćemo koristiti kada želimo naglasiti da se *ne radi o inverznom preslikavanju*, koje možda u danoj situaciji i ne postoji.

$f^{\leftarrow}(B) := \{\, x \in X : f(x) \in B \,\} \subseteq X$ original skupa B. Uobičajena je oznaka $f^{-1}(B)$.

$\alpha^\clubsuit$, $\gamma^\clubsuit$ trag (slika) puta α odnosno γ; npr. $\gamma^\clubsuit := \gamma([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^n$, gdje je $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ put u $\mathbb{R}^n$, str. 6

$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_k$ suma puteva $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, str. 7

$\int_\gamma f\, ds$ integral realne funkcije duž puta; integral prve vrste, str. 9

$\int_\gamma F\, d\gamma$ integral vektorskog polja F duž puta γ; integral druge vrste, str. 11

$\int_\gamma \omega$ integral diferencijalne 1-forme ω duž puta γ; integral druge vrste, str. 12

$\oint_\gamma \omega$ integral diferencijalne 1-forme duž *zatvorenog* puta γ, str. 12

ω_ϑ kutna forma, str. 12

$-\gamma$ inverzan put; suprotan put, str. 13

df vanjski diferencijal realne funkcije f shvaćene kao diferencijalne 0-forme, str. 16

$\mathbb{R}^2_\pi := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \leq 0\}$ ravnina $\mathbb{R}^2$ bez negativnog dijela x-osi, tj. bez polupravca koji s pozitivnim dijelom x-osi zatvara kut od π radijana, str. 18

$d\omega = \sum_{i<j} (\partial_i F_j - \partial_j F_i)\, dx_i \wedge dx_j$ vanjski diferencijal diferencijalne 1-forme ω, str. 19

$\rho = \{\, a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{l(\rho)} = b \,\}$ razdioba segmenta $[a, b]$, tj. skup $\{t_0, t_1, \ldots, t_{k(\rho)}\}$ s uređajem $a = t_0 < t_1 < \cdots t_{k(\rho)} = b$, str. 43

$\rho(I)$ skup svih razdioba ρ segmenta I, str. 43

$V(f, \rho)$ varijacija funkcije f s obzirom na razdiobu ρ, str. 43

$V(f)$ totalna varijacija funkcije f, str. 43

$V_a^b(f)$, $V(f, [a, b])$ totalna varijacija funkcije f na segmentu $[a, b]$, str. 43

$S(\gamma)$ singularan skup preslikavanja γ, str. 54

(Γ, γ) parametrizirani skup, str. 54

H havajska naušnica, str. 54

$\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ klase ekvivalencije usporedivih parametrizacija, str. 55

$(\Gamma, \mathcal{G})$ krivulja, str. 55

$\mathcal{G}_o$ orijentacija, str. 59

$(\Gamma, \mathcal{G}_o)$, $\big((\Gamma, \mathcal{G}), \mathcal{G}_o\big)$ orijentirana krivulja, str. 59

$\overset{\frown}{\Gamma}$ orijentirana krivulja, str. 59

$\ell(\Gamma)$ duljina krivulje Γ, str. 60

K Kochova krivulja, str. 61

$|z|$ modul kompleksnog broja z, str. 77

$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ imaginarna jedinica, str. 78

$\overline{z}$ konjugirano kompleksan broj, $\overline{x + \mathrm{i}\, y} = x - \mathrm{i}\, y$, str. 78

$\arg z$ argument kompleksnog broja z; kut između pozitivnog smjera realne osi i radijvektora točke z, str. 78

$f'(z_0)$ derivacija funkcije f u točki z_0, str. 79

$D(\Omega)$ skup svih funkcija derivabilnih na Ω, str. 79

$\mathbb{C}_\pi := \mathbb{C} \setminus \{(x,0) : x \le 0\}$, str. 83

$\mathbb{C}_\vartheta$ komplement polupravca iz ishodišta koji s pozitivnim dijelom realne osi zatvara kut ϑ, str. 85

$\int_\gamma f\,dz$ integral kompleksne funkcije f duž puta γ, str. 86

$H(\Omega)$ skup svih funkcija holomorfnih na Ω, str. 107

$\sum x_n$ red, str. 118

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ suma reda $\sum x_n$, tj. limes $\lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, str. 118

$\limsup \rho_n$ limes superior niza ρ_n, str. 125

$\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n$ dvostrani red; red čiji su članovi indeksirani cijelim brojevima, str. 137

$K^*(z_0, R) := K(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ probušen krug, str. 140

$\operatorname{res}(f, z_0)$ reziduum funkcije f u točki z_0, str. 153

$r(z_0, f)$ red nultočke ili pola funkcije f, str. 156

$N_\Gamma(f)\,, P_\Gamma(f)$ broj nultočaka odnosno polova meromorfne funkcije f koji se nalaze u unutrašnjem području konture Γ, i to računajući njihov red, str. 158

4

Integrali duž putova i krivulja

Do sada smo promatrali integrale tipa $\int_a^b f(t)\,dt$, dakle integrale funkcije realne varijable na segmentu $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, ili integrale funkcije $f\colon I \to \mathbb{R}$, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}^2$ ili $I \subseteq \mathbb{R}^n$ pravokutnik odnosno n-dimenzionalan paralelopiped ili, općenitije, $\int_S f$, gdje je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ neki skup izmjeriv u Jordanovu smislu. Pokazali smo nadalje, da je integral svake omeđene funkcije na skupu površine (ili, općenito, volumena) nula, jednak nuli (korolar 18.6), a da J-izmjeriv skup S ima površinu (odnosno volumen) nula ako i samo ako je $\operatorname{Int} S = \emptyset$ (korolar 17.6). Dakle, integral omeđene funkcije n realnih varijabli po J-izmjerivu skupu $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je mogao biti netrivijalan, tj. različit od nule, samo ako je skup S imao neprazan interior, tj. ako je bio topološki n-dimenzionalan podskup od $\mathbb{R}^n$.[1] Drugim riječima, integrali funkcije n varijabli, kakve smo dosad proučavali, po skupu koji je dimenzije manje od n, tj. manje od broja varijabli, i ako postoji — uvijek je jednak nuli, dakle, u neku ruku, neinteresantan.

Sada ćemo definirati i proučavati netrivijalne integrale funkcija n varijabli upravo po nižedimenzionalnim skupovima. U ovom će poglavlju to biti integrali po krivuljama, dakle nekim jednodimenzionalnim podskupovima od $\mathbb{R}^n$. Kako već sâm pojam krivulje nije jednostavan, počet ćemo jednostavnijim pojmovima — integralima duž puteva.

[1] Vidi npr. teorem 1.8.10 u: R. Engelking. *Dimension Theory*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1978.

§ 22 Vektorske funkcije jedne varijable

Budući da će krivulje biti opisane vektorskim funkcijama jedne varijable, dakle funkcijama $f\colon I \to \mathbb{R}^n$, $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, prisjetimo se osnovnih činjenica o takvim funkcijama.

Vektorska funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ dâna je svojim koordinatnim funkcijama, tj.

$$f(t) = \big(f_1(t), \dots , f_n(t)\big)$$

gdje su $f_i\colon I \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots , n$, realne funkcije. U slučaju malih dimenzija, $n = 2, 3$, piše se, naprimjer, i

$$\begin{aligned} \vec{f}(t) &= f_1(t)\,\vec{\imath} + f_2(t)\,\vec{\jmath} + f_3(t)\,\vec{k} \qquad \text{ili} \\ &= f_x(t)\,\vec{\imath} + f_y(t)\,\vec{\jmath} + f_z(t)\,\vec{k}\,. \end{aligned}$$

Funkcija f je neprekidna ako i samo ako su sve njezine koordinatne funkcije f_i neprekidne.

Kad se radi o vektorskoj funkciji *jedne* varijable, može se govoriti o **derivaciji** u točki $t_0 \in \langle a, b\rangle$. To je vektor

$$f'(t_0) := \lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{R}^n$$

i on postoji ako i samo ako postoje derivacije $f_i'(t_0)$ svih koordinatnih funkcija, i u tom slučaju je $f'(t_0) = \big(f_1'(t_0), \dots , f_n'(t_0)\big)$. Kao i za realne funkcije jedne varijable, i ovdje je postojanje derivacije u t_0 ekvivalentno diferencijabilnosti u t_0, i ***diferencijal*** je dân s

$$\begin{aligned} Df(t_0)(h) &= \big(Df_1(t_0)(h), \dots , Df_n(t_0)(h)\big) \\ &= \big(f_1'(t_0) \cdot h, \dots , f_n'(t_0) \cdot h\big) \\ &= \big(f_1'(t_0), \dots , f_n'(t_0)\big) \cdot h \\ &= f'(t_0) \cdot h\,, \qquad h \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

kao i za realne funkcije.

Ako u krajevima a i b postoje odgovarajući *jednostrani limesi*

$$f'(a+) := \lim_{t\to a+} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \quad \text{i} \quad f'(b-) := \lim_{t\to b-} \frac{f(t) - f(b)}{t - b}\,,$$

njih zovemo *derivacije u krajevima* i označujemo jednostavno s $f'(a)$ odnosno $f'(b)$. To su ujedno *prave* derivacije u točkama a odnosno b bilo kojeg diferencijabilnog proširenja funkcije f na neki interval koji sadrži $[a, b]$.

Za preslikavanje $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ kažemo da je diferencijabilno klase C^1 ili ***glatko*** ako se može proširiti na neku okolinu segmenta $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ do diferencijabilnog preslikavanja klase C^1, tj. ako postoji $\varepsilon > 0$ i diferencijabilno preslikavanje $\overline{f}\colon \langle a - \varepsilon, b + \varepsilon\rangle \to \mathbb{R}^n$ klase C^1 takvo da je $\overline{f}|_{[a,b]} = f$. Analogno se definira diferencijabilnost klase C^k, $k > 1$.

Napomena 22.1 Glatkoću preslikavanja f mogli smo definirati i bez oslanjanja na mogućnost proširenja preslikavanja na neku okolinu segmenta $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Naime, lako se pokazuje da je preslikavanje $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ glatko u smislu prethodne definicije, ako i samo ako je ono neprekidno (na zatvorenom segmentu $[a, b]$), diferencijabilno klase C^1 na otvorenom intervalu $\langle a, b\rangle$, a u krajnjim točkama a i b ima jednostrane derivacije $f'(a+)$ i $f'(b-)$ tako da je funkcija

$$t \mapsto \begin{cases} f'(a+)\,, & t = a \\ f'(t) \quad , & t \in \langle a, b\rangle \\ f'(b-)\,, & t = b \end{cases}$$

neprekidna na $[a, b]$. Međutim, takva je situacija samo za funkcije jedne varijable. Diferencijabilnost je pojam koji je dobro definiran za funkcije kojima je domena otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Ponekad je, međutim, potrebna diferencijabilnost i glatkoća funkcija koje su definirane na skupu koji nije otvoren. Općenito, kaže se da je funkcija $f\colon S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilna (klase C^k) ako postoji njezino proširenje $\overline{f}\colon U \to \mathbb{R}^m$ na neku okolinu $U \supseteq S$, koje je diferencijabilno (klase C^k). Takvo proširenje, i ako postoji, nije općenito jedinstveno, pa čak i diferencijal tog proširenja u nekoj točki $P \in S$ može ovisiti o tome koje se proširenje uzme. Za funkcije jedne varijable, točnije za funkcije $[a, b] \to \mathbb{R}^n$ situacija je jednostavnija utoliko što, iako proširenje do diferencijabilnog preslikavanja na neku okolinu nije jedinstveno, diferencijal, i derivacije, u rubnim točkama a i b su neovisni o odabranom proširenju, pa vrijedi karakterizacija s početka ove napomene.

Napomena 22.2 Ako je $T \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f\colon I \to T$ funkcija, onda kažemo da je f neprekidna, diferencijabilna, klase C^k, ... ako je kompozicija $I \xrightarrow{f} T \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^n$ takva, pri čemu je s $i\colon T \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ označena inkluzija.

Popišimo osnovne činjenice u vezi s derivacijom vektorskih funkcija jedne varijable.

Propozicija 22.1

(*i*) *Ako je* $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ *konstantna funkcija, onda je* $f'(t) = 0$, $\forall t \in I$.

(*ii*) *Ako su* $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ *i* $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ *diferencijabilne funkcije, onda je i produkt* $\varphi \cdot f\colon I \to \mathbb{R}^n$ *diferencijabilna funkcija i vrijedi* $(\varphi \cdot f)' = \varphi \cdot f' + \varphi' \cdot f$.

(*iii*) *Ako su* $f, g\colon I \to \mathbb{R}^n$ *diferencijabilne funkcije, onda su i*

$$\begin{aligned} &f + g\colon I \to \mathbb{R}^n \\ &(f \mid g)\colon I \to \mathbb{R} \qquad \textit{(skalarni produkt),} \end{aligned}$$

a za $n = 3$ *i*

$$f \times g\colon I \to \mathbb{R}^3 \qquad \textit{(vektorski produkt)}$$

diferencijabilne funkcije, i vrijedi

$$\begin{aligned} (f + g)' &= f' + g' \\ (f \mid g)' &= (f' \mid g) + (f \mid g') \\ (f \times g)' &= f' \times g + f \times g' \qquad \textit{(za } n = 3\textit{)}. \end{aligned}$$

(*iv*) *Ako su funkcije* $u\colon J = [c, d] \to I$ *i* $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ *diferencijabilne, onda je diferencijabilna i njihova kompozicija* $f \circ u\colon J \to \mathbb{R}^n$ *i vrijedi* $(f \circ u)' = (f' \circ u) \cdot u'$. ■

Slično se može govoriti i o ***integralu*** vektorske funkcije $f\colon I \to \mathbb{R}^n$. Ako su naime sve komponente $f_1, \ldots, f_n$ funkcije f, R-integrabilne, onda se može definirati integral

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,dt := \Big(\int_a^b f_1(t)\,dt, \ldots, \int_a^b f_n(t)\,dt\Big).$$

Za $n = 3$ piše se i

$$\int_a^b \vec{f}(t)\,dt = \vec{\imath}\int_a^b f_x(t)\,dt + \vec{\jmath}\int_a^b f_y(t)\,dt + \vec{k}\int_a^b f_z(t)\,dt\,.$$

Ako je $F\colon I \to \mathbb{R}^n$ funkcija takva da je $F'(t) = f(t)$, $t \in I$, onda kažemo da je F ***primitivna funkcija*** funkcije f, i vrijedi Newton-Leibnizova formula:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \qquad \text{(po koordinatama).}$$

Vrijede dvije formule za *parcijalnu integraciju*: uz odgovarajuće pretpostavke na funkcije $f, g\colon I \to \mathbb{R}^n$ i $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$, vrijedi

$$\int_a^b \big(f(t) \mid g'(t)\big)\,dt = \big(f(b) \mid g(b)\big) - \big(f(a) \mid g(a)\big) - \int_a^b \big(f'(t) \mid g(t)\big)\,dt$$

i

$$\int_a^b \varphi(t) \cdot f'(t)\,dt = \varphi(b) \cdot f(b) - \varphi(a) \cdot f(a) - \int_a^b \varphi'(t) \cdot f(t)\,dt\,.$$

Svojstvo monotonosti integrala za vektorske funkcije ima sljedeći oblik:

Lema 22.2 *Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ R-integrabilna funkcija. Tada je*

$$\|\int_a^b f(t)\,dt\,\| \le \int_a^b \|f(t)\|\,dt\,.$$

Dokaz: Kako je f R-integrabilna, to je ona prema Lebesgueovoj karakterizaciji R-integrabilnosti, neprekidna osim možda na skupu (jednodimenzionalne) mjere nula. Stoga je i $\|f\|$ neprekidna osim najviše na skupu mjere nula, pa je i ona R-integrabilna, tj. desna strana u gornjoj formuli ima smisla.

Označimo s $J := \int_a^b f(t)\,dt \in \mathbb{R}^n$. Ako je $\|J\| = 0$, onda nejednakost očito vrijedi. Neka je $\|J\| \neq 0$. Tada je

$$\begin{aligned}\|J\|^2 = (J \mid J) = \Big(J \mid \int_a^b f(t)\,dt\Big) = \int_a^b \big(J \mid f(t)\big)\,dt \overset{\text{Cauchy}}{\le} \\ \le \int_a^b \|J\|\,\|f(t)\|\,dt = \|J\| \int_a^b \|f(t)\|\,dt\,,\end{aligned}$$

odakle dijeljenjem s $\|J\|$ dobivamo traženu nejednakost. ∎

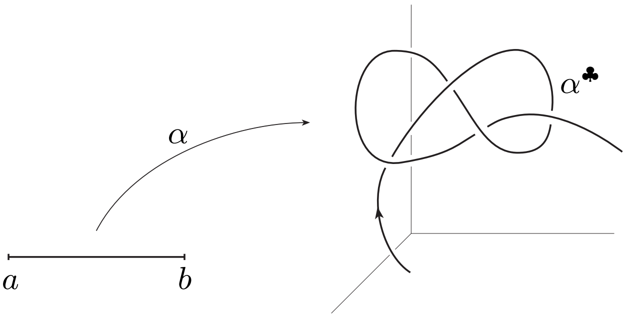
Korolar 22.3 *Za diferencijabilnu funkciju $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, koja je klase C^1, vrijedi $\|f(b) - f(a)\| \le \int_a^b \|f'(t)\|\,dt$.*

Dokaz: Prema Newton-Leibnizovoj formuli i prethodnoj lemi je

$$\|f(b) - f(a)\| = \|\int_a^b f'(t)\,dt\| \le \int_a^b \|f'(t)\|\,dt\,.$$ ∎

§ 23 Glatki putevi u $\mathbb{R}^n$

Putem u metričkom, ili općenito, topološkom prostoru X, nazivamo svako neprekidno preslikavanje $\alpha\colon [a,b] \to X$ nekog segmenta $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ u prostor X. Međutim, takva preslikavanja mogu imati i vrlo neočekivana i neželjena svojstva.



Naprimjer, moguće je da je slika takvog preslikavanja čitav (pun) kvadrat $[0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$.[1] Stoga ćemo se ograničit na glatke i po dijelovima glatke puteve u $\mathbb{R}^n$. Napomenimo kako *putem* nazivamo neprekidno preslikavanje α, a *ne* skup $\alpha^\clubsuit := \alpha([a,b]) \subseteq X$, koji zovemo ***slikom*** ili ***tragom*** puta α. Točka $P_0 := \alpha(a)$ zove se *početna*, a $P_1 := \alpha(b)$ *završna* točka puta α, i govori se da je α put od P_0 do P_1. Injektivan put, tj. takav put α za koji je $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ čim je $t_1 \neq t_2$, naziva se ***luk***. Put α za koji je $\alpha(a) = \alpha(b)$ naziva se ***zatvoren put***, a točku $\alpha(a) = \alpha(b)$ koja je početak a ujedno i kraj zatvorenog puta, nazivamo *istaknutom* ili *baznom* točkom zatvorenog puta α.

Puteve i lukove ćemo označivati malim grčkim slovima $\alpha, \gamma, \eta, \ldots$, a njihove slike $\alpha^\clubsuit, \gamma^\clubsuit, \eta^\clubsuit, \ldots$, ili, ponekad, pripadnim velikim grčkim slovima $\mathrm{A}, \Gamma, \mathrm{H} \ldots$

Definicija 23.1 ***Gladak put*** u prostoru $\mathbb{R}^n$ je svako preslikavanje $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ koje je glatko, tj. koje se može proširiti na neku okolinu od $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ do diferencijabilnog preslikavanja klase C^1 (vidi str. 3).

Za *gladak* put γ kažemo da je ***regularan*** ako je $\gamma'(t) \neq 0$ za sve $t \in [a,b]$.

Često ćemo imati posla s nešto općenitijim putevima.

Definicija 23.2 Za put $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ kažemo da je ***po dijelovima gladak put***, PDG put, ako postoje točke $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ takve da su

[1] Prvi je takvo zanimljivo preslikavanje, neprekidnu surjekciju segmenta realnih brojeva na jedinični kvadrat u ravnini, konstruirao Peano[2] 1890, što je prilično uzdrmalo matematičku zajednicu i srušilo tadašnje shvaćanje pojma dimenzije. Četvrt su stoljeća kasnije Hahn[3] i Mazurkiewicz[4] pokazali da je svaki povezan, lokalno povezan kompaktan metrički prostor neprekidna slika segmenta. (Vidi npr. 9. poglavlje u: C. O. Christenson, W. L. Voxman. *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.)

[2] Giuseppe Peano (1858–1932), talijanski matematičar

[3] Hans Hahn (1879–1934), austrijski matematičar

[4] Stefan Mazurkiewicz (1888–1945), poljski matematičar

restrikcije $\gamma_j := \gamma\big|_{[t_{j-1},t_j]}$, $j = 1,\ldots,k$, glatki putevi. U tom slučaju pišemo $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_k$. Općenito, ako su $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ glatki (ili samo po dijelovima glatki) putevi u $\mathbb{R}^n$ takvi da se početak svakog γ_j podudara s krajem prethodnog γ_{j-1}, $j = 2,\ldots,k$, onda oni definiraju jedan po dijelovima gladak put γ, koji označujemo s $\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_k$, kome je početak jednak početku puta γ_1, a kraj mu je jednak kraju puta γ_k. Put γ nazivamo ***sumom puteva*** $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$.

Točnije, ako su $\gamma_j \colon [a_j, b_j] \to \mathbb{R}^n$, $j = 1,\ldots,k$, putevi takvi da je $\gamma_j(a_j) = \gamma_{j-1}(b_{j-1})$, $j = 2,\ldots,k$, onda je njihova suma $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_k \colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, gdje je $a := a_1$ i $b := a_1 + (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_k - a_k)$, put definiran s

$$\gamma(t) := \gamma_j(t - t_{j-1} + a_j)\,, \quad t \in [t_{j-1}, t_j]\,,\ j = 1,\ldots,k\,,$$

pri čemu je

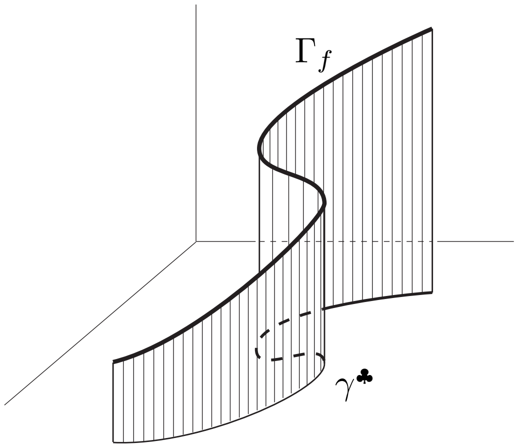
$$\begin{aligned}
t_0 &:= a_1 = a \\
t_1 &:= b_1 = a_1 + (b_1 - a_1) \\
t_2 &:= a_1 + (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) \\
&\ \ \vdots \\
t_k &:= a_1 + (b_1 - a_1) + \cdots + (b_k - a_k) = b\,.
\end{aligned}$$

Za *po dijelovima gladak* put γ kažemo da je ***regularan*** ako postoje regularni glatki putevi $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ takvi da je $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_k$.

§ 24 Integral realne funkcije duž puta — integral prve vrste

Prvi od integrala duž puta koji ćemo promatrati je integral realne funkcije, i definiciju možemo motivirati sljedećim problemom:

Neka je $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2) \colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ gladak put i neka je na njegovoj slici $\gamma^\clubsuit := \gamma([a,b]) \subseteq \mathbb{R}^2$ definirana neprekidna funkcija $f \colon \gamma^\clubsuit \to \mathbb{R}$, koja neka je, za potrebe ovog razmatranja, nenegativna. Zbog jednostavnosti, neka je γ luk, tj. injektivno preslikavanje, pa je korestrikcija $\gamma \colon [a,b] \to \gamma^\clubsuit$ bijekcija, dakle, zbog kompaktnosti, homeomorfizam. Zanima nas površina ispod grafa Γ_f funkcije f, dakle površina „zavjese" na slici.



Ako je preslikavanje γ takvo da savijajući segment $[a, b]$ na skup $\gamma^\clubsuit$ nema nikakva rastezanja ili stezanja (nematematički rečeno, ako γ *savija ravnu žicu* $[a, b]$ *u oblik* $\gamma^\clubsuit$ *bez ikakva rastezanja ili stezanja*), onda će ta površina biti jednaka površini ispod grafa kompozicije $f \circ \gamma$, dakle jednaka integralu $\int_a^b f(\gamma(t))\, dt$. Općenito, međutim, to neće biti tako, pa pokušajmo imitirati definiciju Riemannova integrala realne funkcije na segmentu. Trebalo bi, dakle, rastaviti $\gamma^\clubsuit$ na manje dijelove, što zbog injektivnosti preslikavanja γ odgovara uzimanju neke razdiobe $\rho = \{ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k(\rho)} = b \}$ segmenta $[a, b]$, i gledati, naprimjer, Riemannove sume

$$\sigma(f, \rho; P_1, \ldots, P_{k(\rho)}) = \sum_{j=1}^{k(\rho)} f(P_j)\, \ell(\gamma([t_{j-1}, t_j]))\,, \tag{1}$$

za neki izbor točaka $P_j \in \gamma_j^\clubsuit := \gamma([t_{j-1}, t_j])$, $j = 1, \ldots, k(\rho)$, i gdje je s $\ell(\gamma([t_{j-1}, t_j])) = \ell(\gamma_j^\clubsuit)$ označena duljina dijela $\gamma_j^\clubsuit$. Uzimanjem limesa po svim razdiobama segmenta $[a, b]$ i svim izborima točaka P_j, dobili bismo traženu površinu, tj. integral funkcije f duž puta γ.

Ekvivalentno bismo do istog pojma došli promatrajući gornje i donje Darbouxove sume, i pomoću njih definiranoga gornjeg i donjeg Riemannova integrala.

Međutim, u oba je pristupa problem u tome što mi ne znamo što je *duljina* $\ell(\gamma_j^\clubsuit)$. Intuitivno možemo razmišljati ovako: ako funkcija γ ne čini nagle promjene smjera i brzine, a razdioba ρ je dovoljno fina, onda će duljina $\ell(\gamma_j^\clubsuit)$ biti približno jednaka duljini pripadne tetive, tj. broju

$$\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| = \sqrt{\big(\gamma^1(t_j) - \gamma^1(t_{j-1})\big)^2 + \big(\gamma^2(t_j) - \gamma^2(t_{j-1})\big)^2}\,.$$

Primijenimo li na obje koordinate Lagrangeov teorem srednje vrijednosti, dobivamo točke $\tau_j^1, \tau_j^2 \in \langle t_{j-1}, t_j \rangle$ takve da je

$$\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| = \sqrt{\big(\gamma^{1\prime}(\tau_j^1)\big)^2 + \big(\gamma^{2\prime}(\tau_j^2)\big)^2}\,(t_j - t_{j-1})\,,$$

što je približno jednako $\|\gamma'(\tau_j)\|\,(t_j - t_{j-1})$, za bilo koju točku $\tau_j \in [\tau_j^1, \tau_j^2]$, naprimjer, $\tau_j = \tau_j^1$, ili $\tau_j = \dfrac{\tau_j^1 + \tau_j^2}{2}$ — aritmetička sredina. Odaberemo li još i $P_j := \gamma(\tau_j)$, bit će naša Riemannova suma (1) približno jednaka sumi $\sum\limits_{j=1}^{k(\rho)} f(\gamma(\tau_j))\,\|\gamma'(\tau_j)\|\,(t_j - t_{j-1})$, a to je upravo $\sigma\big((f \circ \gamma)\,\|\gamma'\|, \rho; \tau_1, \ldots, \tau_{k(\rho)}\big)$, tj. Riemannova suma funkcije $(f \circ \gamma)\,\|\gamma'\|$ s obzirom na razdiobu ρ i točke $\tau_1, \ldots, \tau_{k(\rho)}$.

Time je motivirana sljedeća definicija:

Definicija 24.1 Neka je $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ po dijelovima gladak put, a $f\colon \gamma^\clubsuit \to \mathbb{R}$ neprekidna realna funkcija definirana na slici toga puta. Tada broj

$$\int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

zovemo ***integralom realne funkcije*** f ***duž puta*** γ, i označujemo ga s $\int_\gamma f\,ds$. Takav se integral naziva i ***integralom prve vrste duž puta*** γ.

Napomena 24.1 Ako je $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ po dijelovima gladak put, a $f\colon \gamma^\clubsuit \to \mathbb{R}$ konstantna funkcija $f \equiv 1$, tj. $f(P) = 1$ za sve $P \in \gamma^\clubsuit$, onda je vrijednost integrala $\int_\gamma ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$ jednaka duljini slike luka γ, a broj $\|\gamma'(t)\|$ je upravo koeficijent rastezanja koje u času t čini preslikavanje γ savijajući segment $[a, b]$ na skup $\gamma^\clubsuit$.

U § 29 ćemo pojam duljine precizno fundirati i pokazati da se za po dijelovima glatke puteve zaista dobije broj $\int_\gamma ds$.

Osnovna svojstva integrala realne funkcije duž puta, dâna su sljedećom propozicijom, a jednostavno se dokazuju koristeći se odgovarajućim svojstvima integrala realne funkcije definirane na segmentu.

Propozicija 24.1

(i) *Integral* $\int_\gamma$ *je monoton linearan funkcional na vektorskom prostoru neprekidnih realnih funkcija definiranih na slici* $\gamma^\clubsuit$ *po dijelovima glatkog puta* γ.

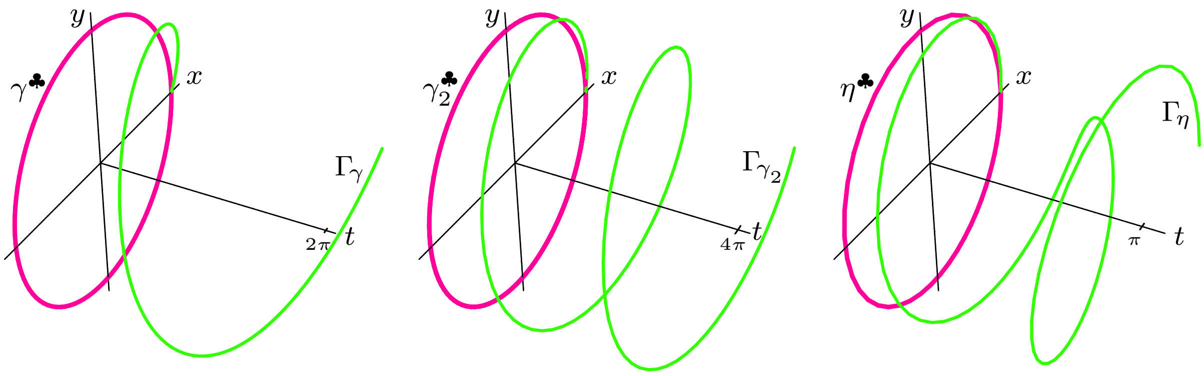
(*ii*) *Integral realne funkcije duž puta aditivna je funkcija puta, tj. ako su* $\gamma_1 \colon [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^n$ *i* $\gamma_2 \colon [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^n$ *dva po dijelovima glatka puta takva da je* $\gamma_2(a_2) = \gamma_1(b_1)$, *a* $f \colon \gamma_1^\clubsuit \cup \gamma_2^\clubsuit \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija definirana na uniji njihovih slika, onda je* $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f\,ds = \int_{\gamma_1} f\,ds + \int_{\gamma_2} f\,ds$. ■

Primjer 24.1 Neka je $r > 0$ neki pozitivan broj, i promotrimo sljedeća tri glatka puta:

(*i*) $\gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiran s $\gamma(t) := (r\cos t, r\sin t)$;

(*ii*) $\gamma_2 \colon [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiran s $\gamma_2(t) := (r\cos t, r\sin t)$;

(*iii*) $\eta \colon [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ definiran s $\eta(t) := (r\cos(2\pi\sin t), r\sin(2\pi\sin t))$.



Za integrale konstantne funkcije $f \equiv 1$ duž tih puteva, dakle za duljine slika tih puteva, nalazimo:

$$\int_\gamma ds = 2r\pi\,; \qquad \int_{\gamma_2} ds = 4r\pi\,; \qquad \int_\eta ds = 4r\pi\,,$$

što odgovara našoj predodžbi, jer put γ obilazi kružnicu radijusa r jednom, a duljina kružnice je, kao što „znamo”, jednaka $2r\pi$; put γ_2 obilazi tu istu kružnicu, ali dvaput, pa je taj put i dvostruko dulji; dok put η također obilazi tu kružnicu dvaput, ali jednom u jednom, a drugi put u drugom smjeru[1].

Primijetimo da je $\gamma_2 = \gamma + \gamma$, i takav se put često označuje s 2γ, i slično $n\gamma$, za $n \in \mathbb{N}$.

[1] Iako je slika sva tri puta kružnica radijusa r kojoj je stvarna duljina $2r\pi$, kad govorimo o duljini puta, onda dio koji se višestruko prolazi i brojimo višestruko.

§ 25 Integral vektorskog polja i diferencijalne 1-forme duž puta — integral druge vrste

Neka je $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ po dijelovima gladak put, i neka je zadana neprekidna vektorska funkcija $f = (f_1, \dots, f_m)\colon \gamma^\clubsuit \to \mathbb{R}^m$. Tada možemo promatrati integral $\int_\gamma f\,ds := (\int_\gamma f_1\,ds, \dots, \int_\gamma f_m\,ds)$. Tako dobivamo vektor prostora $\mathbb{R}^m$ kome je svaka komponenta običan integral realne funkcije duž puta γ, dakle kvalitativno ne dobivamo ništa novo.

Novi tip integrala možemo, međutim, definirati ako je na skupu $\gamma^\clubsuit \subseteq \mathbb{R}^n$ definirana funkcija $F = (F_1, \dots, F_n)\colon \gamma^\clubsuit \to \mathbb{R}^n$. Uočimo da se radi o istoj dimenziji n, pa zato tu funkciju i označujemo velikim slovom, kako bismo istakli tu posebnost. Takva se funkcija često naziva ***vektorsko polje***. Ovakva se situacija pojavljuje, naprimjer, u fizici: materijalna točka giba se putem γ u (vektorskom) polju sila F, a traži se rad koji se tim gibanjem obavlja. Kako radu pridonosi samo komponenta sile F u smjeru gibanja, to u točki $P = \gamma(t)$ treba gledati skalarni produkt $(F(P) \mid \gamma'(t))$, i takve doprinose treba „zbrojiti" duž puta γ.

Definicija 25.1 Neka je $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ po dijelovima gladak put a $F\colon \gamma^\clubsuit \to \mathbb{R}^n$ neprekidno vektorsko polje na $\gamma^\clubsuit$. Tada se broj $\int_a^b \big(F(\gamma(t)) \mid \gamma'(t)\big)\,dt$ naziva ***integral vektorskog polja*** F ***duž puta*** γ, i označuje s $\int_\gamma F\,d\gamma$ ili $\int_\gamma (F \mid d\gamma)$. Dakle

$$\int_\gamma F\,d\gamma := \int_a^b \big(F(\gamma(t)) \mid \gamma'(t)\big)\,dt\,.$$

Takav se integral naziva i ***integral druge vrste duž puta***.

Često se koordinatne funkcije po dijelovima glatkog puta γ označuju s x_i, tj. $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, pa se uz te oznake onda piše

$$F\,d\gamma = (F \mid d\gamma) = \sum_{i=1}^n F_i\,x_i'\,dt = \sum_{i=1}^n F_i\,\frac{dx_i}{dt}\,dt = \sum_{i=1}^n F_i\,dx_i\,,$$

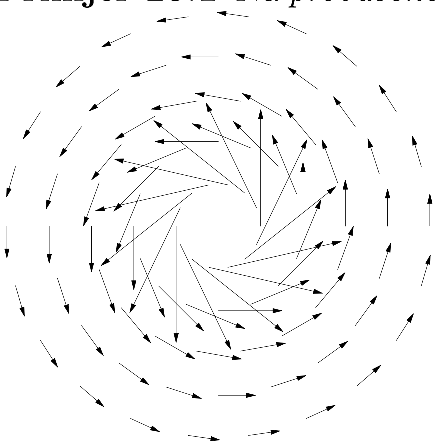
te se, pogotovo kad je F neka konkretno zadana funkcija, i integral vektorskog polja F duž puta γ označuje s $\int_\gamma F_1\,dx_1 + F_2\,dx_2 + \cdots + F_n\,dx_n$.

Izraz $\omega := F_1\,dx_1 + F_2\,dx_2 + \cdots + F_n\,dx_n$, gdje su $F_i\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, realne funkcije na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, naziva se ***diferencijalna*** 1-***forma*** na Ω. Za diferencijalnu 1-formu ω kažemo da je neprekidna, diferencijabilna, klase C^1, ... , ako su funkcije $F_1, \dots, F_n$ neprekidne, diferencijabilne, klase C^1, ... Naše će forme uvijek biti barem neprekidne, pa to nećemo posebno isticati. Broj $\int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t))\,(\gamma^i)'(t)\,dt$, gdje je $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^n)\colon [a, b] \to \Omega$ po dijelovima gladak put, naziva se ***integralom diferencijalne* 1*-forme* ω *duž puta*** γ, i označuje $\int_\gamma \omega$.

Dakle, na n realnih funkcija $F_1, \dots, F_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$ možemo gledati kao na vektorsko polje $F = (F_1, \dots, F_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, ili kao na diferencijalnu 1-formu $\omega = F_1\,dx_1 + F_2\,dx_2 + \cdots + F_n\,dx_n$. U prvom slučaju, za PDG put $\gamma\colon [a, b] \to \Omega$, broj $\int_a^b \big(F(\gamma(t)) \mid \gamma'(t)\big)\,dt$ zovemo integralom vektorskog polja F duž puta γ, i označujemo s $\int_\gamma F\,d\gamma$, a u drugom slučaju, taj isti broj $\int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t))\,(\gamma^i)'(t)\,dt$ zovemo integralom diferencijalne 1-forme ω duž puta γ, i označujemo s $\int_\gamma \omega$.

Ako je put γ zatvoren, tj. $\gamma(a) = \gamma(b)$, tada se, da bi se to naglasilo, integral duž γ često označuje $\oint_\gamma F\,d\gamma$, odnosno $\oint_\gamma \omega$.

Primjer 25.1 Na *probušenoj ravnini* $\mathbb{R}^{2^*} := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ promotrimo diferencijalnu 1-formu



$$\omega_\vartheta(x, y) := \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} \ ,$$

tj. vektorsko polje $F_\vartheta\colon \mathbb{R}^{2^*} \to \mathbb{R}^2$ definirano formulom

$$F_\vartheta(x, y) := \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right),$$

i odredimo integrale 1-forme ω_ϑ (tj. vektorskog polja F_ϑ) duž puteva γ, γ_2 i η iz primjera 24.1.

(*i*) Put $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^{2^*}$ definiran je s $\gamma(t) := (r\cos t, r\sin t)$, pa je

$$\int_\gamma \omega_\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{-r\sin t \cdot (-r\sin t) + r\cos t \cdot r\cos t}{r^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \ .$$

(*ii*) Put $\gamma_2\colon [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^{2^*}$ definiran je s $\gamma_2(t) := (r\cos t, r\sin t)$, pa se kao i u (i) dobiva

$$\int_{\gamma_2} \omega_\vartheta = \int_0^{4\pi} dt = 4\pi\,.$$

(iii) Put $\eta\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^{2^*}$ definiran je s $\eta(t) := (r\cos(2\pi\sin t), r\sin(2\pi\sin t))$, pa je

$$\begin{aligned}\int_\eta \omega_\vartheta &= \int_0^\pi \frac{r^2\sin^2(2\pi\sin t)\,2\pi\cos t + r^2\cos^2(2\pi\sin t)\,2\pi\cos t}{r^2(\cos^2(2\pi\sin t)+\sin^2(2\pi\sin t))}\,dt \\ &= 2\pi\int_0^\pi \cos t\,dt = 0\,.\end{aligned}$$

Uočimo da niti jedan od ovih integrala ne ovisi o r, za razliku od integrala realne funkcije u primjeru 24.1. Nadalje, integrali u (i) i (ii) odnose se kao i u primjeru integrala realne funkcije, dok se integral u (iii) ponaša različito.

Za svaki put $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ definira se njemu ***inverzan*** ili ***suprotan put*** $-\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ formulom $(-\gamma)(t) := \gamma(a+b-t)$. To je put koji prolazi istom slikom, tragom, kao i put γ, samo natraške, tj. u suprotnom smjeru. Njegov početak je točka $(-\gamma)(a) = \gamma(b)$, dakle završetak puta γ, a njegov kraj je točka $(-\gamma)(b) = \gamma(a)$, dakle početak puta γ. Slike obaju puteva su jednake, tj. $(-\gamma)^\clubsuit = \gamma^\clubsuit$.

Napomena 25.1 Diferencijalne 1-forme na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ možemo organizirati u vektorski prostor, koji označujemo s $\Lambda^1(\Omega)$. Za glatke, tj. klase C^1, diferencijalne 1-forme, $\Lambda^1(\Omega)$ je izomorfan prostoru $\underbrace{C^1(\Omega)\oplus\cdots\oplus C^1(\Omega)}_{n \text{ sumanada}}$.
Uočite da $dx_1,\ldots,dx_n$ *ne* čine bazu tog realnoga vektorskog prostora, koji je, usput rečeno, „debelo" beskonačno-dimenzionalan.

Osnovna svojstva integrala druge vrste, koja se također jednostavno dokazuju pomoću poznatih svojstava integrala realne funkcije definirane na segmentu, dana su sljedećom propozicijom:

Propozicija 25.1

(i) *Integral druge vrste,* $\int_\gamma$, *je linearan funkcional na vektorskom prostoru diferencijalnih 1-formi, odnosno prostoru vektorskih polja, definiranih na nekoj okolini skupa* $\gamma^\clubsuit$.

(*ii*) *Integral diferencijalne 1-forme (odnosno vektorskog polja) duž puta, aditivna je funkcija puta, tj. ako su* $\gamma_1\colon [a_1,b_1]\to\Omega$, $\gamma_2\colon [a_2,b_2]\to\Omega$ *dva PDG puta takva da je* $\gamma_2(a_2)=\gamma_1(b_1)$, *a* ω *diferencijalna 1-forma na* Ω, *onda je* $\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2}\omega = \int\limits_{\gamma_1}\omega + \int\limits_{\gamma_2}\omega$.

(*iii*) $\int\limits_{-\gamma}\omega = -\int\limits_{\gamma}\omega$. ∎

Centralno pitanje kojim ćemo se sada baviti je sljedeće:

Neka je $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ otvoren skup a ω diferencijalna 1-forma na Ω. Uz koje uvjete integral $\int_\gamma\omega$ ovisi samo o krajnjim točkama $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$ puta γ, a ne ovisi i o sâmom putu između tih točaka? U takvom se slučaju govori, iako malo netočno, da *integral ne ovisi o putu integracije*.

Nužni i dovoljni uvjeti dani su sljedećim teoremom:

Teorem 25.2 *Neka je* $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ *otvoren skup, a* $\omega = F_1\,dx_1 + F_2\,dx_2 + \cdots + F_n\,dx_n$ *diferencijalna 1-forma na* Ω. *Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(*i*) *Integral 1-forme* ω *ne ovisi o putu, tj.* $\int_\gamma\omega = \int_\eta\omega$ *za svaka dva PDG puta* γ *i* η *u* Ω *koji imaju zajedničke početke i zajedničke krajeve.*

(*ii*) $\int_\gamma\omega = 0$ *za sve PDG zatvorene puteve* γ *u* Ω.

(*iii*) *Postoji glatka realna funkcija* $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ *takva da je* $F_i=\partial_i f$, $i=1,\dots,n$. *U tom je slučaju* $\int_\gamma\omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ *za svaki PDG put* $\gamma\colon [a,b]\to\Omega$.

Dokaz:

$\boxed{(i)\implies(ii)}$ Neka je $\gamma\colon [a,b]\to\Omega$ zatvoren PDG put, neka je $P_0 := \gamma(a)=\gamma(b)$ istaknuta točka, i neka je $\eta\colon [a,b]\to\Omega$ konstantan put u P_0, tj. $\eta(t)=P_0$ za sve $t\in[a,b]$. Zbog (*i*) je $\int_\gamma\omega = \int_\eta\omega$, a integral svake forme po konstantnom putu η jednak je nuli, jer je $\eta'(t)=0$ za sve $t\in[a,b]$.

$\boxed{(ii)\implies(i)}$ Neka su $\gamma\colon [a,b]\to\Omega$ i $\eta\colon [c,d]\to\Omega$ PDG putevi u Ω takvi da je $\gamma(a)=\eta(c)$ i $\gamma(b)=\eta(d)$. Tada je put $\gamma+(-\eta)$ zatvoren put u Ω, pa je integral po njemu jednak nuli, tj.

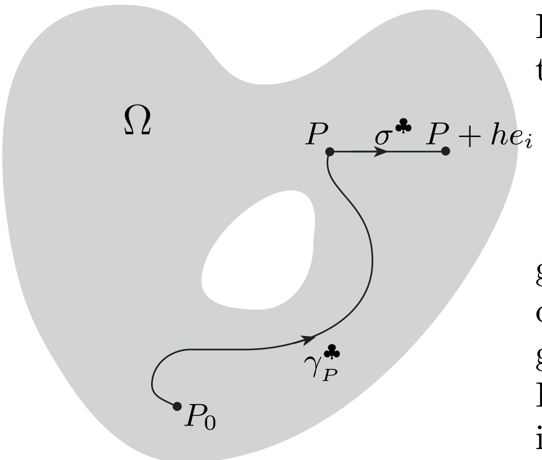
$$\int_\gamma\omega - \int_\eta\omega = \int_\gamma\omega + \int_{-\eta}\omega = \int_{\gamma+(-\eta)}\omega = 0\,.$$

$\boxed{(iii) \Longrightarrow (i)}$ Neka je $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ PDG put a $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1 takva da je $\partial_i f = F_i$, $i = 1, \ldots, n$. Tada je

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t))\,(\gamma^i)'(t)\,dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n \partial_i f(\gamma(t))\,(\gamma^i)'(t)\,dt$$
$$= \int_a^b (f \circ \gamma)'(t)\,dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))\,,$$

tj. integral forme ω duž puta γ ovisi samo o krajnjim točkama $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$ tog puta, a ne i o sâmom putu između tih točaka.

$\boxed{(i) \Longrightarrow (iii)}$ Pretpostavimo da integral forme ω ne ovisi o putu, i konstruirajmo funkciju f takvu da je $F_i = \partial_i f$, $i = 1, \ldots, n$. Dovoljno je funkciju f definirati na pojedinim komponentama povezanosti otvorenog skupa Ω, pa je f dovoljno konstruirati za slučaj kad je skup Ω povezan.



Fiksirajmo točku $P_0 \in \Omega$. Za proizvoljnu točku $P \in \Omega$ definirajmo

$$f(P) := \int_{\gamma_P} \omega\,,$$

gdje je γ_P proizvoljan PDG put u Ω od P_0 do P. Zbog pretpostavljene neovisnosti integrala o putu, funkcija f dobro je definirana. Pokažimo da je ona diferencijalna klase C^1, i da je $F_i = \partial_i f$, $i = 1, \ldots, n$.

Neka je $P \in \Omega$, i za $i \in \{1, \ldots, n\}$ neka je e_i i-ti vektor kanonske ortonormirane baze u $\mathbb{R}^n$. Prema definiciji parcijalne derivacije je

$$\partial_i f(P) = \lim_{h \to 0} \frac{f(P + he_i) - f(P)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big(\int\limits_{\gamma_{P+he_i}} \omega - \int\limits_{\gamma_P} \omega \Big)\,,$$

gdje je γ_{P+he_i} proizvoljan put u Ω od P_0 do $P + he_i$. Kako je svejedno koji put od P_0 do $P + he_i$ uzmemo, možemo za γ_{P+he_i} uzeti upravo put $\gamma_P + \sigma$, gdje je $\sigma\colon [0,1] \to \Omega$ put koji prolazi segmentom $\sigma^\clubsuit = [P, P + he_i]$, definiran formulom $\sigma(t) := P + t\,h\,e_i$ (za dovoljno malene h, a takvi nas interesiraju jer gledamo limes, čitav će segment $[P, P+he_i]$ ležati u Ω, pa se o tome ne trebamo brinuti).

Kako je $\sigma'(t) = h\, e_i$, tj. $(\sigma^j)'(t) = \begin{cases} h\,, & j = i \\ 0\,, & j \neq i \end{cases}$, to je

$$\begin{aligned}
\partial_i f(P) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \Big(\int_{\gamma_P} \omega + \int_{\sigma} \omega - \int_{\gamma_P} \omega \Big) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{\sigma} \omega \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} F_j(\sigma(t))\, (\sigma^j)'(t)\, dt \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 F_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + th, x_{i+1}, \ldots, x_n)\, h\, dt\,.
\end{aligned}$$

Budući da je podintegralna funkcija, kao funkcija dviju varijabli t i h, neprekidna, možemo integral po t i limes po h zamijeniti (vidi korolar 19.6), pa opet zbog neprekidnosti funkcije F_i, dobivamo

$$\begin{aligned}
\partial_i f(P) &= \int_0^1 \lim_{h\to 0} F_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + th, x_{i+1}, \ldots, x_n)\, dt \\
&= \int_0^1 F_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)\, dt = F_i(P) \int_0^1 dt = F_i(P)\,.
\end{aligned}$$

Kako su funkcije F_i neprekidne, zaključujemo da je funkcija $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ diferencijabilna klase C^1 i, kao što smo pokazali, $\partial_i f = F_i$, $i = 1, \ldots, n$. ■

Ako je diferencijalna 1-forma $\omega = F_1\, dx_1 + F_2\, dx_2 + \cdots + F_n\, dx_n$ na Ω takva da postoji realna funkcija $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ za koju je $\partial_i f = F_i$, $i = 1, \ldots, n$, onda se kaže da je forma ω ***egzaktna***, i piše se $\omega = df$. U tom se kontekstu realne funkcije klase C^1 nazivaju ***diferencijalnim*** 0-***formama***, pa se kaže da je ω ***vanjski diferencijal*** 0-***forme*** f. U starijoj se literaturi za takvu 1-formu ω kaže i da je ***totalni diferencijal*** funkcije f. Ako simbole dx_i u izrazu $\omega = F_1\, dx_1 + F_2\, dx_2 + \cdots + F_n\, dx_n$, identificiramo s vektorima dualne baze u prostoru $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, dualne s obzirom na kanonsku ortonormiranu bazu $(e_1, \ldots, e_n)$ prostora $\mathbb{R}^n$, onda je

$$\omega(P) = \sum_{i=1}^{n} F_i(P)\, dx_i = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(P)\, dx_i = Df(P)\,,$$

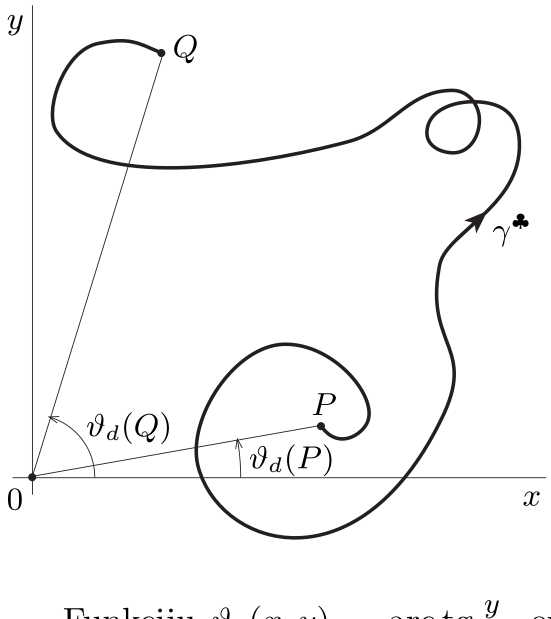
pa na diferencijalnu 1-formu ω u točki $P \in \Omega$ možemo gledati kao na (pravi) diferencijal funkcije f u točki P.

U jeziku vektorskih polja, u upotrebi je sljedeća terminologija: ako je $F = (F_1, \dots, F_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ vektorsko polje takvo da postoji realna funkcija $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ (u ovakvu se kontekstu obično kaže *skalarno polje*) takva da je $F_i = \partial_i f$, $i = 1, \dots, n$, tj. F je gradijent funkcije f, $F = \nabla f$, onda se kaže da je vektorsko polje F ***konzervativno*** ili ***potencijalno***, a funkcija f (nekad $-f$) naziva se ***potencijalom*** vektorskog polja F.

Primjer 25.2 Neka je $\mathbb{R}^2_d := \{\,(x, y) : x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ desna poluravnina, i neka je funkcija $\vartheta_d\colon \mathbb{R}^2_d \to \mathbb{R}$ definirana kao $\vartheta_d(x, y) := \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x}$, dakle $\vartheta_d(x, y)$ je kut između pozitivnog smjera osi x i radijvektora točke $P = (x, y)$. Funkcija ϑ_d diferencijabilna je klase C^1 na $\mathbb{R}^2_d$, pa, gledajući na nju kao na diferencijalnu 0-formu, deriviranjem nalazimo njezin vanjski diferencijal

$$d\vartheta_d(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \Big(-\frac{y}{x^2} \Big)\, dx + \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x}\, dy = \frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2 + y^2}\,, \qquad (1)$$

što je upravo diferencijalna 1-forma ω_ϑ iz primjera 25.1 na str. 12.



Ako su $P, Q \in \mathbb{R}^2_d$ proizvoljne točke, a γ u $\mathbb{R}^2_d$ proizvoljan put od P do Q, onda je, prema prethodnom teoremu,

$$\int_\gamma \omega_\vartheta = \vartheta_d(Q) - \vartheta_d(P)\,,$$

dakle integral forme ω_ϑ jednak je kutu među radijvektorima točaka P i Q.

Drugim riječima, integral forme ω_ϑ duž nekog puta u desnoj poluravnini jednak je ukupnoj promjeni kuta (između radijvektora) od početne do završne točke puta.

Funkciju $\vartheta_d(x, y) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x}$, ovako kako je zapisana, ne možemo proširiti na lijevu poluravninu „preko" osi y, tj. preko pravca $x = 0$. Međutim, ako na funkciju ϑ_d gledamo kao na kut između pozitivnog smjera osi x i (radijvektora) točke (x, y), onda ju očito možemo proširiti na, naprimjer, čitavu gornju poluravninu, tj. na skup $\mathbb{R}^2_g := \{(x, y) : y > 0\}$. Na gornjoj poluravnini $\mathbb{R}^2_g$ to se proširenje podudara s funkcijom $\vartheta_g(x, y) := \operatorname{arc\,ctg} \dfrac{x}{y}$.

Isto tako možemo funkciju ϑ_d proširiti i na donju poluravninu, tj. na skup $\mathbb{R}^2_{do} := \{(x, y) : y < 0\}$, i na donjoj poluravnini se to proširenje podudara s funkcijom $\vartheta_{do}(x, y) := \operatorname{arc\,ctg} \dfrac{x}{y} - \pi$.

Na taj način dobivamo proširenje ϑ funkcije ϑ_d na cijelu ravninu osim negativnog dijela x-osi, tj. na skup $\mathbb{R}^2_\pi := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \le 0\}$. To proširenje $\vartheta \colon \mathbb{R}^2_\pi \to \mathbb{R}$, dâno je s

$$\vartheta(x, y) := \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} & , \quad x > 0 \\ \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{y} & , \quad y > 0 \\ \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{y} - \pi \, , & \quad y < 0 \, . \end{cases}$$

Primijetimo da je ϑ glatka funkcija, tj. funkcija klase C^1, i da se na svojoj domeni $\mathbb{R}^2_\pi$, njezin vanjski diferencijal podudara s diferencijalnom 1-formom ω_ϑ, koja je definirana na cijeloj punktiranoj ravnini $\mathbb{R}^{2^*} := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, dakle na većem skupu. Može li se i funkcija ϑ proširiti do glatke funkcije na cijeloj probušenoj ravnini $\mathbb{R}^{2^*}$ tako da je njezin vanjski diferencijal jednak ω_ϑ ili, općenitije, postoji li glatka funkcija $g \colon \mathbb{R}^{2^*} \to \mathbb{R}$ takva da je $dg = \omega_\vartheta$ na cijeloj probušenoj ravnini? Odgovor je negativan, jer kada bi takva funkcija postojala, onda bi integral forme ω_ϑ po jediničnoj kružnici $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, morao biti jednak nuli, a vidjeli smo u primjeru 25.1 da je taj integral jednak 2π. Dakle, diferencijalna 1-forma ω_ϑ na $\mathbb{R}^{2^*}$ nije egzaktna.

Primijetimo još nešto — nema ničega posebnog u negativnom dijelu x-osi. Na komplementu $\mathbb{R}^2 \setminus p$ bilo kojega polupravca p iz ishodišta, definirana je funkcija ϑ_p čiji se vanjski diferencijal podudara s 1-formom ω_ϑ, ali se, naravno, niti jedna ne može proširiti na cijelu punktiranu ravninu.

Postavlja se sada pitanje kako ustanoviti ovisi li integral neke diferencijalne 1-forme o putu integracije, tj. kako ustanoviti je li neka 1-forma egzaktna ili ne.

Jednostavne nužne uvjete daje sljedeći teorem:

Teorem 25.3 *Neka je $\omega = F_1\,dx_1 + F_2\,dx_2 + \cdots + F_n\,dx_n$ diferencijalna 1-forma koja je klase C^1 na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Ako je ω egzaktna, onda je $\partial_i F_j = \partial_j F_i$, $i, j = 1, \dots, n$.*

Dokaz: Ako je ω egzaktna diferencijalna 1-forma na Ω, onda postoji diferencijabilna funkcija $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ takva da je $\omega = df$, tj. $F_i = \partial_i f$, $i = 1, \dots, n$. Kako su funkcije F_i klase C^1, to je f funkcija klase C^2, pa je prema Schwarzovu teoremu, teorem 9.6, $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$, tj. $\partial_i F_j = \partial_j F_i$, $i, j = 1, \dots, n$. ∎

Za svaku diferencijalnu 1-formu $\omega = F_1\,dx_1 + F_2\,dx_2 + \cdots + F_n\,dx_n$ klase barem C^1 na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, definira se izraz

$$d\omega := \sum_{i<j} (\partial_i F_j - \partial_j F_i)\,dx_i \wedge dx_j\,,$$

koji se naziva ***vanjski diferencijal diferencijalne** 1**-forme** ω*. Općenito se izrazi oblika $\sum\limits_{i<j} \phi_{ij}\,dx_i \wedge dx_j$, gdje su $\phi_{ij} \colon \Omega \to \mathbb{R}$ neke realne funkcije, a $dx_i \wedge dx_j$, $i<j$, neki simboli, ima ih $\binom{n}{2}$ i na ovom im mjestu nećemo davati posebno značenje, nazivaju ***diferencijalne** 2**-forme*** na Ω. Za diferencijalnu 1-formu $\omega = F_1\,dx_1 + F_2\,dx_2 + \cdots + F_n\,dx_n$ za koju je $d\omega = 0$, tj. $\partial_i F_j = \partial_j F_i$, $i, j = 1, \ldots, n$, kaže se da je ***zatvorena diferencijalna** 1**-forma***.

Prethodni teorem kaže, dakle, da je svaka egzaktna diferencijalna 1-forma klase C^1 zatvorena, tj. nuždan uvjet da integral 1-forme ω ne ovisi o putu integracije je da je ω zatvorena 1-forma.

Pitanje je da li je taj uvjet i dovoljan, tj. je li svaka zatvorena diferencijalna 1-forma na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ i egzaktna.

Promatrajmo diferencijalnu 1-formu $\omega = F_1\,dx_1 + F_2\,dx_2 + \cdots + F_n\,dx_n$ klase C^1 na Ω koja je zatvorena, tj. takva da je $d\omega = 0$. Imamo, dakle, n realnih funkcija $F_1, \ldots, F_n \colon \Omega \to \mathbb{R}$ klase C^1, takvih da za $i, j = 1, \ldots, n$ vrijedi

$$\partial_i F_j = \partial_j F_i\,. \tag{2}$$

Postoji li realna funkcija $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ takva da za sve $i = 1, \ldots, n$ vrijedi

$$\partial_i f = F_i\,, \tag{3}$$

tj. ima li za zadanih n realnih funkcija $F_1, \ldots, F_n$ vezanih jednakostima (2), sistem diferencijalnih jednadžbi (3) rješenje?

Fiksirajmo točku $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \Omega$. Uz pretpostavku da rješenje postoji, integracijom zadnje jednadžbe sistema (3), nalazimo da je u točki $P = (x_1, \ldots, x_n)$ funkcija f jednaka

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \int_{x_n^0}^{x_n} F_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)\,dt + \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})\,, \tag{4}$$

gdje je φ_{n-1} neka, zasad nepoznata, funkcija $n-1$ varijable.

Treba odrediti funkciju φ_{n-1}. Deriviranjem jednakosti (4) po x_{n-1}, i zamjenom integrala po n-toj i derivacije po $(n-1)$-voj varijabli (vidi teorem 19.8), nalazimo

$$\begin{aligned}
\partial_{n-1}\varphi_{n-1}(x_1,\,\ldots\,,x_{n-1}) &= \partial_{n-1}f(x_1,\ldots,x_n) - \int_{x_n^0}^{x_n}\partial_{n-1}F_n(x_1,\ldots,x_{n-1},t)\,dt \\
&\overset{(2)}{=} \partial_{n-1}f(x_1,\ldots,x_n) - \int_{x_n^0}^{x_n}\partial_n F_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1},t)\,dt \\
&\overset{(3)}{=} F_{n-1}(x_1,\ldots,x_n) - F_{n-1}(x_1,\ldots,x_n) + F_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n^0) \\
&= F_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n^0)\,,
\end{aligned}$$

pa integriranjem dobivamo

$$\varphi_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) = \int\limits_{x_{n-1}^0}^{x_{n-1}} F_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-2},t,x_n^0)\,dt + \varphi_{n-2}(x_1,\ldots,x_{n-2})\,, \tag{5}$$

gdje je φ_{n-2} neka realna funkcija $n-2$ varijable, koju još treba odrediti.

Uvrstimo li (5) u (4), dobivamo

$$\begin{aligned}
f(x_1,\ldots,x_n) = \int\limits_{x_n^0}^{x_n} F_n(x_1,\ldots,x_{n-1},t)\,dt + \int\limits_{x_{n-1}^0}^{x_{n-1}} F_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-2},t,x_n^0)\,dt\, + \\
+\ \varphi_{n-2}(x_1,\ldots,x_{n-2})\,. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Deriviranjem po x_{n-2}, zamjenom derivacije i integrala po različitim varijablama, teorem 19.8, i korištenjem relacija (2), nalazimo

$$\begin{aligned}
&\partial_{n-2}\varphi_{n-2}(x_1,\ldots,x_{n-2}) = \\
&\qquad = \partial_{n-2}f(x_1,\ldots,x_n) - \int_{x_n^0}^{x_n}\partial_{n-2}F_n(x_1,\ldots,x_{n-1},t)\,dt\, - \\
&\qquad\qquad - \int_{x_{n-1}^0}^{x_{n-1}}\partial_{n-2}F_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-2},t,x_n^0)\,dt \\
&\qquad \overset{(2)}{=} \partial_{n-2}f(x_1,\ldots,x_n) - \int_{x_n^0}^{x_n}\partial_n F_{n-2}(x_1,\ldots,x_{n-1},t)\,dt\, - \\
&\qquad\qquad - \int_{x_{n-1}^0}^{x_{n-1}}\partial_{n-1}F_{n-2}(x_1,\ldots,x_{n-2},t,x_n^0)\,dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\overset{(3)}{=} F_{n-2}(x_1,\dots,x_n) - F_{n-2}(x_1,\dots,x_n) + F_{n-2}(x_1,\dots,x_{n-1},x_n^0) - \\ &\qquad - F_{n-2}(x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1},x_n^0) + F_{n-2}(x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1}^0,x_n^0) \\ &= F_{n-2}(x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1}^0,x_n^0)\,.\end{aligned}$$

Integriranjem i uvrštavanjem u (6), dobivamo da je

$$\begin{aligned}f(x_1,\dots,x_n) = &\int_{x_n^0}^{x_n} F_n(x_1,\dots,x_{n-1},t)\,dt + \int_{x_{n-1}^0}^{x_{n-1}} F_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-2},t,x_n^0)\,dt + \\ &+ \int_{x_{n-2}^0}^{x_{n-2}} F_{n-2}(x_1,\dots,x_{n-3},t,x_{n-1}^0,x_n^0)\,dt + \varphi_{n-3}(x_1,\dots,x_{n-3})\,,\end{aligned}$$

gdje je φ_{n-3} neka realna funkcija $n-3$ varijabli.

Nastavimo li taj postupak, zaključujemo da, ako rješenje sistema diferencijalnih jednadžbi (3) postoji, ono mora imati oblik (redoslijed sumacije je napisan obrnuto nego u prethodnoj formuli)

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} \int_{x_j^0}^{x_j} F_j(x_1,\dots,x_{j-1},t,x_{j+1}^0,\dots,x_n^0)\,dt + c\,, \tag{7}$$

gdje je $c \in \mathbb{R}$ neka konstanta.

Pokažimo da ova funkcija zaista zadovoljava sistem (3). Deriviranjem iz (7) nalazimo

$$\begin{aligned}\partial_i f(x_1,\dots,x_n) &= \sum_{j=1}^{n} \partial_i\Big(\int_{x_j^0}^{x_j} F_j(x_1,\dots,x_{j-1},t,x_{j+1}^0,\dots,x_n^0)\,dt\Big) \\ &= F_i(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1}^0,\dots,x_n^0) + \\ &\qquad + \sum_{j=i+1}^{n} \int_{x_j^0}^{x_j} \partial_i F_j(x_1,\dots,x_{j-1},t,x_{j+1}^0,\dots,x_n^0)\,dt\,,\end{aligned}$$

jer za $j < i$ vrijedi $\partial_i F_j(x_1,\dots,x_{j-1},t,x_{j+1}^0,\dots,x_n^0) = 0$,

$$\begin{aligned}&\overset{(2)}{=} F_i(x_1,\dots,x_i,x_{i+1}^0,\dots,x_n^0) + \\ &\qquad + \sum_{j=i+1}^{n} \int_{x_j^0}^{x_j} \partial_j F_i(x_1,\dots,x_{j-1},t,x_{j+1}^0,\dots,x_n^0)\,dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= F_i(x_1,\ldots,x_i,x_{i+1}^0,\ldots,x_n^0) + \\
&\quad + F_i(x_1,\ldots,x_i,x_{i+1},x_{i+2}^0,\ldots,x_n^0) - F_i(x_1,\ldots,x_i,x_{i+1}^0,\ldots,x_n^0) + \\
&\quad + F_i(x_1,\ldots,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}^0,\ldots,x_n^0) - F_i(x_1,\ldots,x_{i+1},x_{i+2}^0,\ldots,x_n^0) + \\
&\quad \vdots \\
&\quad + F_i(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n) - F_i(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n^0) \\
&= F_i(x_1,\ldots,x_n)\,.
\end{aligned}
$$

Izgleda, dakle, da smo za dânu zatvorenu diferencijalnu 1-formu ω našli funkciju f za koju je $\omega = df$, tj. da svaka zatvorena 1-forma mora biti egzaktna, odnosno da su uvjeti iz teorema 25.3 i dovoljni za neovisnost integrala o putu. Međutim, sljedeći protuprimjer pokazuje da nešto nije u redu:

Kontraprimjer 25.3 Promotrimo ponovno „kutnu” diferencijalnu 1-formu $\omega_\vartheta(x,y) = \dfrac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$ na $\mathbb{R}^{2^*} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Lako se vidi da je ta forma zatvorena:

$$\partial_x\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \partial_y\Big(\frac{-y}{x^2+y^2}\Big)\,.$$

Ipak, forma ω_ϑ nije egzaktna na $\mathbb{R}^{2^*}$ jer, naprimjer, integracijom po jediničnoj kružnici, tj. po zatvorenom putu $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, dobivamo 2π, a ne nulu. Ne postoji, dakle, funkcija $f\colon \mathbb{R}^{2^*} \to \mathbb{R}$ za koju bi vrijedilo $df = \omega_\vartheta$.

Gdje je načinjena pogreška? Što smo previdjeli? Analizirajmo funkciju f u (7) koja je „rješenje” sistema (3). Za fiksiranu točku $P_0 = (x_1^0,\ldots,x_n^0)$ i točku $P = (x_1,\ldots,x_n) \in \Omega$, označimo $P_j := (x_1,\ldots,x_j,x_{j+1}^0,\ldots,x_n^0)$, $j = 1,\ldots,n$. Funkcija $\gamma_j\colon [x_j^0, x_j] \to \mathbb{R}^n$ definirana s $\gamma_j(t) := (x_1,\ldots,x_{j-1},t,x_{j+1}^0,\ldots,x_n^0)$ je put od P_{j-1} do P_j, kome je slika segment $[P_{j-1}, P_j]$. Za integrale koji se pojavljuju u izrazu (7), nalazimo

$$\int_{x_j^0}^{x_j} F_j(x_1,\ldots,x_{j-1},t,x_{j+1}^0,\ldots,x_n^0)\,dt = \int_{\gamma_j} F_j\,dx_j = \int_{\gamma_j}\sum_{i=1}^n F_i\,dx_i = \int_{\gamma_j}\omega\,,$$

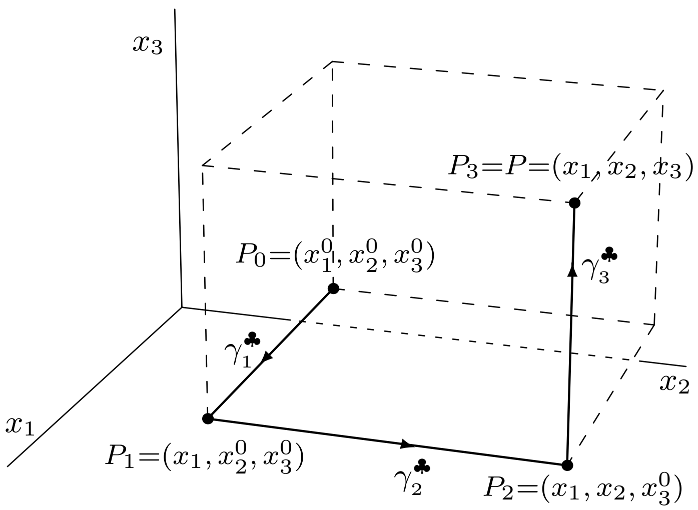
jer za $i \neq j$, za derivaciju i-te komponente funkcije γ_j vrijedi $(\gamma_j^i)'(t) = 0$,

$t \in [x_j^0, x_j]$, pa iz (7), za $c = 0$, dobivamo

$$f(P) = \int_{\gamma_P} \omega\,, \tag{8}$$

gdje je $\gamma_P := \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$ put od P_0 do $P_n = P$ poligonalnom linijom $[P_0, P_1, \ldots, P_n] := \bigcup_{j=1}^{n} [P_{j-1}, P_j]$.

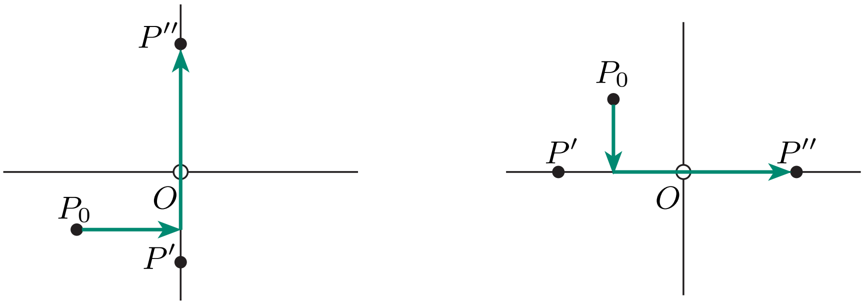
Dakle, funkcija f definirana je kao integral forme ω duž puta γ_P koji prolazi bridovima paralelopipeda određenog točkama P_0 i P (i kome su bridovi paralelni koordinatnim osima), i to tako da se krene od P_0 najprije onim bridom kojim se prva koordinata promijeni od x_1^0 do x_1, zatim se krene bridom kojim će se druga koordinata promijeniti od x_2^0 do x_2, i tako redom do zadnjeg brida, kojim će se n-ta koordinata promijeniti od x_n^0 do x_n. Da bi formulom (8), ili



ekvivalentno (7), bila funkcija f definirana na cijelom skupu Ω (na kojem je bila definirana zatvorena 1-forma ω), mora za svaku točku $P \in \Omega$, i *tako propisan put* γ_P biti sadržan u Ω.

U prethodnom (kontra)primjeru 25.3 nije moguće točku $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{2*}$ odabrati tako da za svaku točku $P \in \mathbb{R}^{2*}$, put γ_P bude sadržan u $\mathbb{R}^{2*}$. Za svaki izbor točke P_0 postoji točka P takva da upravo propisan put γ_P prolazi ishodištem $(0, 0)$.

Moguće je, naravno, put γ_P od P_0 do P propisati i drugačije, pa će se za neke točke P navedena poteškoća izbjeći, ali će onda biti poteškoće s nekim drugim točkama. Da bi funkcija f bila korektno definirana na cijelom Ω, za sve točke $P \in \Omega$ mora vrijediti jednak propis, a to u slučaju primjera 25.3 nije moguće učiniti.



Bez obzira na izbor početne točke P_0 i odabranog propisa za put γ_P, bit će točaka do kojih put γ_P mora proći kroz ishodište — točku u kojoj forma ω_ϑ nije definirana

Ipak, račun koji nas je doveo do izraza (7) odnosno (8), nije bio uzaludan jer će za neke otvorene skupove Ω, propisani put γ_P biti sadržan u Ω za sve točke $P \in \Omega$. Specijalno, vrijedi

Teorem 25.4 *Neka je $U = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren paralelopiped, eventualno i neomeđen, tj. neki ili svi a_i, b_i mogu biti i $\pm\infty$, ili neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvorena kugla. Tada je svaka zatvorena diferencijalna 1-forma na U egzaktna.*

Dokaz: U razmatranjima ispred kontraprimjera 25.3, treba za točku P_0 u slučaju kugle odabrati njezino središte, a u slučaju paralelopipeda moguće je odabrati bilo koju njegovu točku. ■

Kako je oko svake točke otvorenog skupa u $\mathbb{R}^n$ moguće opisati kuglu, dobivamo

Korolar 25.5 (o lokalnoj egzaktnosti zatvorene forme) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Svaka zatvorena diferencijalna 1-forma ω na Ω je* ***lokalno egzaktna****, tj. za svaku točku $P \in \Omega$ postoji okolina $U_P \ni P$ na kojoj je ω egzaktna.* ■

Egzaktnost diferencijalne forme globalnog je karaktera, i ovisi o topološkim (geometrijskim) svojstvima skupa Ω, dok je zatvorenost lokalnog karaktera, jer je za parcijalne derivacije odlučujuće samo ponašanje funkcije u okolnim točkama.

Propozicija 25.6 *Neka su $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoreni skupovi takvi da je njihov presjek povezan ili prazan, i neka je ω diferencijalna 1-forma na uniji $U := U_1 \cup U_2$ takva da su njezine restrikcije ω_i na U_i egzaktne, $i = 1, 2$. Tada je ω egzaktna i na U.*

Dokaz: Kako je forma ω egzaktna na skupovima U_1 i na U_2, postoje glatke funkcije $f_j \colon U_j \to \mathbb{R}$ takve da je $df_j = \omega_j$, $j = 1, 2$. Ako su U_1 i U_2 disjunktni, onda je funkcija $f \colon U \to \mathbb{R}$ definirana s $f(P) := \begin{cases} f_1(P)\,, & P \in U_1 \\ f_2(P)\,, & P \in U_2 \end{cases}$, glatka i $df = \omega$ na cijelom U.

Ako je $U_1 \cap U_2$ neprazan, onda na $U_1 \cap U_2$ vrijedi $df_1 = df_2$, tj. $\partial_i f_1 = \partial_i f_2$, $i = 1, \ldots, n$. Kako je presjek $U_1 \cap U_2$ povezan, funkcije f_1 i f_2 se na tom presjeku razlikuju za neku konstantu, tj. postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je $f_1(P) = f_2(P) + c$, $P \in U_1 \cap U_2$. Definiramo li sada funkciju $f \colon U \to \mathbb{R}$ s $f(P) := \begin{cases} f_1(P) & , \quad P \in U_1 \\ f_2(P) + c\,, & P \in U_2 \end{cases}$, dobit ćemo glatku funkciju za koju je $df = \omega$ na cijelom U. ■

Jednostavnom indukcijom, iz ove propozicije dobivamo

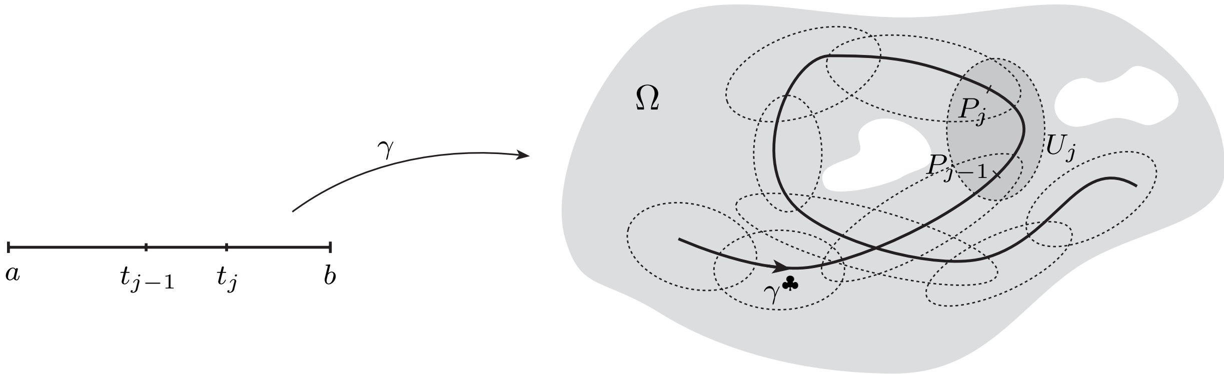
Korolar 25.7 *Neka su $U_1, \ldots, U_k \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoreni skupovi takvi da je $U_j \cap \bigcup_{i<j} U_i$ povezan (ili prazan) za sve $j = 2, \ldots, k$. Ako je ω diferencijalna 1-forma na $U := \bigcup_{j=1}^{k} U_j$ takva da je njezina restrikcija na U_j egzaktna za sve $j = 1, \ldots, k$, onda je ω egzaktna na U.* ■

I u slučajevima kada zatvorena diferencijalna 1-forma nije egzaktna, njezina lokalna egzaktnost omogućuje da se integral duž nekog puta odredi tako da se taj put rastavi na dijelove na kojima forma jest egzaktna. Točnije, vrijedi

Teorem 25.8 *Neka je ω zatvorena diferencijalna 1-forma na Ω, a $\gamma \colon [a, b] \to \Omega$ po dijelovima gladak put. Tada postoje otvoreni skupovi $U_1, \ldots, U_k \subseteq \Omega$, glatke funkcije $f_j \colon U_j \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, k$, i točke $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ segmenta $[a, b]$, tako da je $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq U_j$, $j = 1, \ldots, k$, i da su vanjski diferencijali df_j jednaki restrikciji forme ω na U_j, $j = 1, \ldots, k$.*

Stoga je $\displaystyle\int_\gamma \omega = \sum_{j=1}^{k} f_j(P_j) - f_j(P_{j-1})$, gdje je $P_j := \gamma(t_j)$, $j = 0, \ldots, k$.

Dokaz: Za svaku točku $P \in \gamma^\clubsuit$ neka je $U_P \subseteq \Omega$ otvorena okolina točke P na kojoj je forma ω egzaktna, i neka je $f_P \colon U_P \to \mathbb{R}$ glatka funkcija takva da je $df_P = \omega$ na U_P. Tada je $\{\gamma^\leftarrow(U_P) : P \in \gamma^\clubsuit\}$ otvoren pokrivač segmenta $[a, b]$, pa postoje točke $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ takve da za svaki $j = 1, \ldots, k$,



postoji točka $P \in \gamma^\clubsuit$ sa svojstvom da je $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq U_P$ (dovoljno je uzeti ekvidistantnu razdiobu s korakom manjim od Lebesgueova broja navedenog otvorenog pokrivača segmenta $[a, b]$). Za svaki $j = 1, \ldots, k$ odaberimo jedan od skupova U_P koji sadrže $\gamma([t_{j-1}, t_j])$, i njega nazovimo U_j, a pripadnu funkciju s f_j. Označimo li s γ_j restrikciju puta γ na segment $[t_{j-1}, t_j]$, imamo

$$\int_\gamma \omega = \sum_{j=1}^k \int_{\gamma_j} \omega = \sum_{j=1}^k f_j(\gamma_j(t_j)) - f_j(\gamma_j(t_{j-1})) = \sum_{j=1}^k f_j(\gamma(t_j)) - f_j(\gamma(t_{j-1}))\,. \quad \blacksquare$$

Primjer 25.4 Promotrimo ponovno kutnu formu $\omega_\vartheta(x, y) = \dfrac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$ iz primjera 25.1. Kako smo vidjeli u primjeru 25.2, diferencijalna forma ω_ϑ egzaktna je na svakom otvorenom podskupu ravnine $\mathbb{R}^2$ koji ne sadrži neki polupravac iz ishodišta. Neka je γ proizvoljan po dijelovima gladak *zatvoren* put u $\mathbb{R}^{2*} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, a $\mathbb{R}^2_d$, $\mathbb{R}^2_g$, $\mathbb{R}^2_\ell$ i $\mathbb{R}^2_{do}$ desna, gornja, lijeva i donja poluravnina. Na svakoj od tih poluravnina, kutna forma ω_ϑ je egzaktna, pa postoje kutne funkcije ϑ_d, ϑ_g, ϑ_ℓ i ϑ_{do} čiji su (vanjski) diferencijali jednaki restrikcijama forme ω_ϑ na te poluravnine. Kao u prethodnom teoremu, put γ možemo podijeliti na nekoliko puteva $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ takvih da je za svaki $j = 1, \ldots, k$, $\gamma_j^\clubsuit$ podskup neke od tih poluravnina. Stoga je svaki od integrala $\int_{\gamma_j} \omega_\vartheta$ jednak kutu između radijvektora početne i završne točke puta γ_j, pa, kako je put γ zatvoren, integral $\int_\gamma \omega_\vartheta = \sum\limits_{j=1}^k \int_{\gamma_j} \omega_\vartheta$ cjelobrojni je višekratnik broja 2π, i taj cijeli broj je jednak broju obilazaka puta γ oko ishodišta (računajući algebarski, tj. obilaske u negativnom smjeru treba odbiti od obilazaka u pozitivnom smjeru).

Definicija 25.2 Za zatvoren po dijelovima gladak put γ u $\mathbb{R}^{2*} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, broj

$$\nu(\gamma, O) := \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \omega_\vartheta$$

naziva se ***indeks***, ili ***namotajni broj***, ***puta*** γ ***s obzirom na točku*** $O = (0,0)$, ishodište.

Translacijom ishodišta možemo definirati indeks zatvorenog puta γ s obzirom na bilo koju točku $P_0 = (x_0, y_0)$ koja ne leži na slici $\gamma^\clubsuit$ toga puta, kao

$$\nu(\gamma, P_0) := \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \omega_{\vartheta, P_0} \,,$$

gdje je $\omega_{\vartheta,P_0}(x,y) := \dfrac{-(y-y_0)\,dx + (x-x_0)\,dy}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$. Kao i kad se radi o ishodištu, indeks je jednak broju obilazaka, u pozitivnom smjeru, zatvorenog puta γ oko točke P_0.

Indeksom zatvorenog puta s obzirom na točku bavit ćemo se detaljnije poslije, pri proučavanju kompleksnih funkcija.

§ 26 Algebarska ekvivalencija i deformacija puteva

Pokazali smo da za egzaktne diferencijalne 1-forme, promjena puta integracije ne utječe na vrijednost integrala. Međutim, neke promjene puta integracije ne utječu na integral niti za 1-forme koje nisu egzaktne.

Neka su $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ i $\eta\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ dva po dijelovima glatka puta takva da je $\gamma(a) = \eta(c)$ i $\gamma(b) = \eta(d)$. Kažemo da je put η ***dobiven dopuštenom promjenom*** puta γ, ili da je η ***dopuštena promjena puta*** γ, ako postoji po dijelovima glatka funkcija $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ takva da je $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$ i $\eta = \gamma \circ \varphi$.

Primijetimo da put γ i svaka njegova dopuštena promjena η imaju isti trag (sliku), tj. $\gamma^\clubsuit = \eta^\clubsuit \subseteq \mathbb{R}^n$.

Propozicija 26.1 *Neka je ω diferencijalna 1-forma na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, i neka je PDG put $\eta\colon [c,d] \to \Omega$ dopuštena promjena puta $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$. Tada je $\int_\eta \omega = \int_\gamma \omega$.*

Dokaz: Neka je $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ PDG funkcija takva da je $\eta = \gamma \circ \varphi$ i neka je

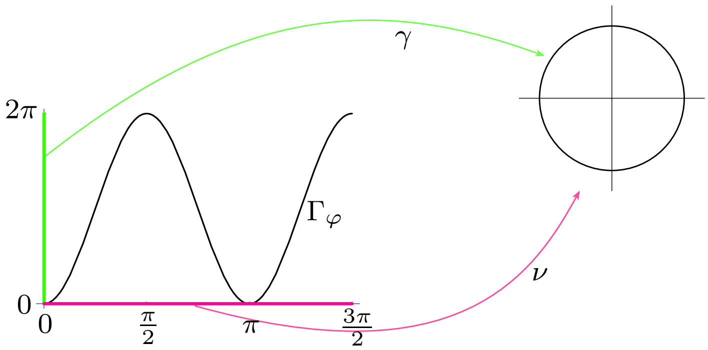
$\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} F_i \, dx_i$. Tada je

$$\int_\eta \omega = \int_c^d \sum_{i=1}^n F_i(\eta(u)) \left(\eta^i\right)'(u) \, du = \int_c^d \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(\varphi(u))) \left((\gamma \circ \varphi)^i\right)'(u) \, du$$
$$= \int_c^d \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(\varphi(u))) \, (\gamma^i)'(\varphi(u)) \, \varphi'(u) \, du \, .$$

Uz zamjenu varijabli $t := \varphi(u)$, to je jednako

$$= \int\limits_{\varphi(c)=a}^{\varphi(d)=b} \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t)) \, (\gamma^i)'(t) \, dt = \int_\gamma \omega \, . \qquad \blacksquare$$

Relacija *biti dopuštena promjena puta* je refleksivna i tranzitivna, ali nije simetrična, pa to nije relacija ekvivalencije među putevima s istim tragom i zajedničkim početcima i krajevima. Razlog tomu je što za funkciju φ nismo zahtijevali da je bijekcija. Naprimjer, put $\nu(u) := (\cos(2\pi \sin^2 u), \sin(2\pi \sin^2 u))$, $u \in [0, \frac{3}{2}\pi]$, je dopuštena promjena puta $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, ali ne i obratno.



Kako bismo dobili relaciju ekvivalencije, postupit ćemo na način koji je uobičajen u takvim situacijama:

Definicija 26.1 Za dva puta γ i η s istim tragom, $\gamma^\clubsuit = \eta^\clubsuit$, te zajedničkim početcima i krajevima, kažemo da su ***algebarski ekvivalentni*** ako postoje putevi $\gamma = \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k = \eta$ s tim istim tragom, početcima i krajevima, takvi da je za svaki $i = 1, \ldots, k$, ili γ_i dopuštena promjena puta γ_{i-1}, ili je γ_{i-1} dopuštena promjena puta γ_i.

Lako se vidi da je tako definirana relacija zaista relacija ekvivalencije, i iz propozicije 26.1 dobivamo

Korolar 26.2 *Neka je ω diferencijalna 1-forma na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Ako su γ i η algebarski ekvivalentni po dijelovima glatki putevi u Ω, onda je $\int_\eta \omega = \int_\gamma \omega$.* ■

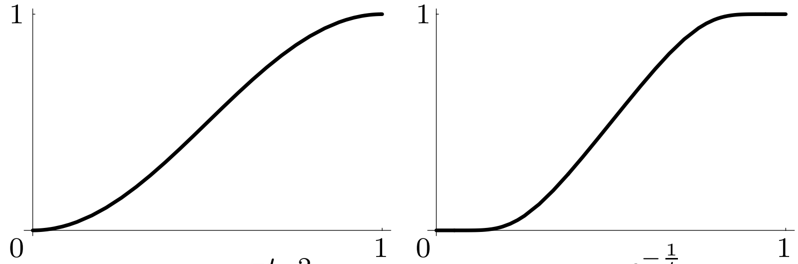
Napomene 26.1 Primijetimo dvije stvari. Prvo, svaki se put $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ može zamijeniti algebarski ekvivalentnim putem η s proizvoljno odabranim segmentom $[c,d]$ kao domenom (štoviše, γ i η mogu biti dopuštene promjene jedan drugog). Naime, svaki se segment $[c,d]$ afinom funkcijom $u \mapsto a + \frac{b-a}{d-c}(u-c)$ glatko i bijektivno preslikava na segment $[a,b]$, a njezina inverzna funkcija je $t \mapsto c + \frac{d-c}{b-a}(t-a)$. Stoga je put $\eta(u) := \gamma\big(a + \frac{b-a}{d-c}(u-c)\big)$, $u \in [c,d]$, dopuštena promjena puta γ, a kako je $\gamma(t) = \eta\big(c + \frac{d-c}{b-a}(t-a)\big)$, $t \in [a,b]$, to je i γ dopuštena promjena puta η.

Ovom smo se činjenicom zapravo već bili i koristili pri definiranju zbrajanja puteva, tj. u definiciji 23.2 smo zapravo zbrajali pogodno odabrane dopuštene promjene zadanih puteva.

Drugo, svaki se PDG put može zamijeniti glatkim putem koji je njegova dozvoljena promjena, dakle, i algebarski mu je ekvivalentan. Zaista, neka je $\varphi\colon [a,b] \to [a,b]$ proizvoljna glatka rastuća surjekcija takva da je $\varphi'(a) = 0$ i $\varphi'(b) = 0$. Na segmentu $[0,1]$ takva je, naprimjer, funkcija $\varphi_1(t) := \big(\sin\frac{\pi t}{2}\big)^2$, koja je klase C^1, ili funkcija

$$\varphi_2(t) := \begin{cases} 0 & , \quad t = 0 \\ \dfrac{e^{-\frac{1}{t}}}{e^{-\frac{1}{1-t}} + e^{-\frac{1}{t}}} & , \quad 0 < t < 1 \\ 1 & , \quad t = 1\,, \end{cases}$$

koja je čak klase C^∞. Kompozicija takve funkcije i proizvoljnoga glatkog puta, gladak je put kome su derivacije u krajevima jednake nuli, i koji je dopuštena promjena početnog puta. Ako za neki PDG put $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ takvu zamjenu



$t \mapsto \big(\sin\frac{\pi t}{2}\big)^2$ $\qquad$ $t \mapsto \dfrac{e^{-\frac{1}{t}}}{e^{-\frac{1}{1-t}} + e^{-\frac{1}{t}}}$

načinimo na svakom njegovu dijelu na kojemu je gladak, dobivamo gladak put koji mu je algebarski ekvivalentan, štoviše, njegova je dopuštena promjena.

Primijetimo da ovakvim ***zaglađivanjem puteva*** ne možemo istodobno postići i glatkoću i regularnost. Čak i ako je početni put bio regularan, tj. derivacija mu je bila svuda različita od nule, zaglađen put neće više biti regularan.

Za gladak zatvoren put γ zahtijevat ćemo, najčešće, da je i $\gamma'(a) = \gamma'(b)$, što se također može uvijek postići.

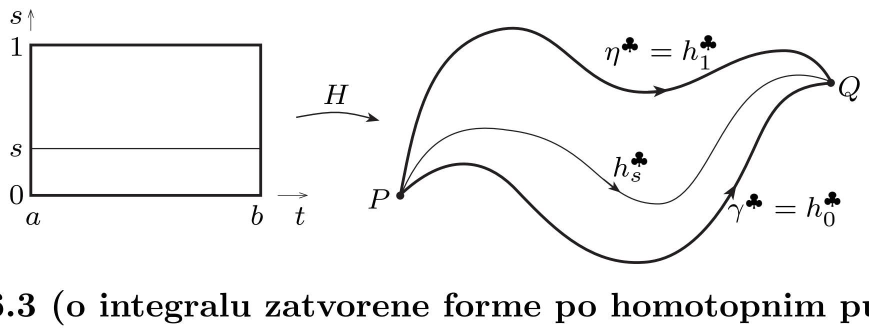
Zato ćemo odsad govoriti uglavnom o glatkim putevima, a rečeno će vrijediti i za po dijelovima glatke puteve.

I neke promjene puta kod kojih se mijenja i trag puta ipak ne utječu na integral. Vidjeli smo, naprimjer, da niti jedan od tri integrala u primjeru 25.1 nije ovisio o radijusu kružnicâ po kojima se integriralo.

Promotrit ćemo, najprije, što se događa s integralom kad se put deformira tako da mu se i trag mijenja, ali uz nepomične krajeve.

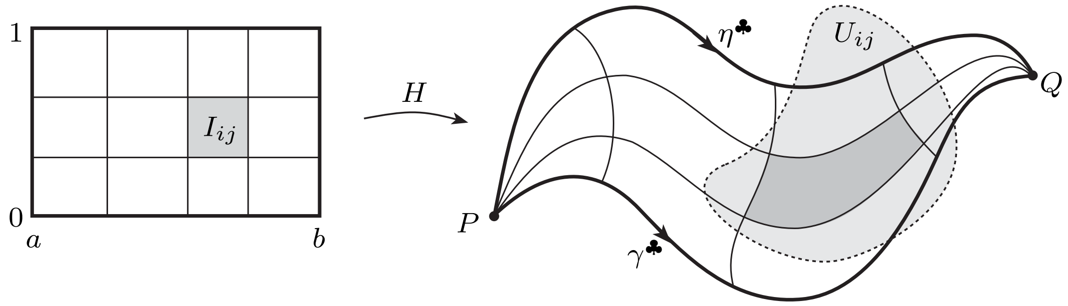
Neka su γ i η dva glatka puta u otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sa zajedničkim počecima i krajevima. U skladu s prvom od prethodnih napomena, možemo, bez smanjenja općenitosti, pretpostaviti da su γ i η definirani na istom segmentu $[a, b]$. Dakle, $\gamma, \eta\colon [a, b] \to \Omega$, $\gamma(a) = \eta(a) =: P$, $\gamma(b) = \eta(b) =: Q$. Kažemo da su γ i η ***glatko homotopni putevi u*** Ω ako postoji glatka funkcija $H\colon [a, b] \times [0, 1] \to \Omega$ (glatka u smislu napomene 22.1) takva da je $H(t, 0) = \gamma(t)$ i $H(t, 1) = \eta(t)$, za sve $t \in [a, b]$, te $H(a, s) = P$ i $H(b, s) = Q$, za sve $s \in [0, 1]$. Preslikavanje H naziva se ***glatka homotopija*** koja povezuje puteve γ i η, a govorit ćemo, jednostavno, da je H homotopija od γ do η. Važno je napomenuti da je naglasak na tome da je homotopija H *preslikavanje u* Ω. Naime, kao preslikavanja u $\mathbb{R}^n$, svaka su dva puta, sa zajedničkim počecima i krajevima, homotopna. Takva je homotopija u $\mathbb{R}^n$ ostvarena, naprimjer, preslikavanjem $(t, s) \mapsto (1 - s)\,\gamma(t) + s\,\eta(t)$.

Ako za $s \in [0, 1]$ definiramo preslikavanja $h_s\colon [a, b] \to \Omega$ s $h_s(t) := H(t, s)$, onda kažemo da je $\{h_s\}_{s\in[0,1]}$ ***glatka familija glatkih puteva*** u Ω od točke P do točke Q, koja počinje putem $h_0 = \gamma$ i završava putem $h_1 = \eta$.



Teorem 26.3 (o integralu zatvorene forme po homotopnim putevima) *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *otvoren skup,* ω *zatvorena diferencijalna 1-forma na* Ω *a* γ *i* η *u* Ω *glatko homotopni putevi od točke* P *do točke* Q*. Tada* $\int_\gamma \omega = \int_\eta \omega$.

Dokaz: Neka je $H\colon [a,b]\times[0,1] \to \Omega$ glatka homotopija od γ do η. Prema korolaru 25.5 o lokalnoj egzaktnosti zatvorene 1-forme, oko svake točke $P' \in \Omega$ postoji okolina $U_{P'} \subseteq \Omega$ na kojoj je ω egzaktna. Odaberimo razdiobu ρ pravokutnika $I := [a,b] \times [0,1]$ takvu da H preslikava svaki pravokutnik I_{ij} te razdiobe u neku od odabranih okolina, nazovimo ju $U_{ij} \subseteq \Omega$, na kojoj je 1-forma ω egzaktna. Za ρ možemo uzeti bilo koju razdiobu čija je očica manja od Lebesgueova broja otvorenog pokrivača $\{H^{\leftarrow}(U_{P'}) : P' \in \Omega\}$ pravokutnika I. Restrikcija $H\big|_{\partial I_{ij}}$ je PDG put u U_{ij}, a kako je na U_{ij} forma ω egzaktna, to, prema teoremu 25.2, vrijedi $\int_{H|_{\partial I_{ij}}} \omega = 0$, za sve i,j. Sumiranjem svih tih integrala, dobivamo $0 = \sum\limits_{i,j} \int_{H|_{\partial I_{ij}}} \omega = \int_{H|_{\partial I}} \omega$, jer se integrali po onim dijelovima rubova koji su zajednički za dva pravokutnika I_{ij}, dokidaju.



Kako su restrikcije homotopije H na lijevu i desnu stranicu pravokutnika I konstantni putevi u točku P odnosno Q, to je $\int_{H|_{\partial I}} \omega = \int_\gamma \omega - \int_\eta \omega$, odakle slijedi tvrdnja teorema. ∎

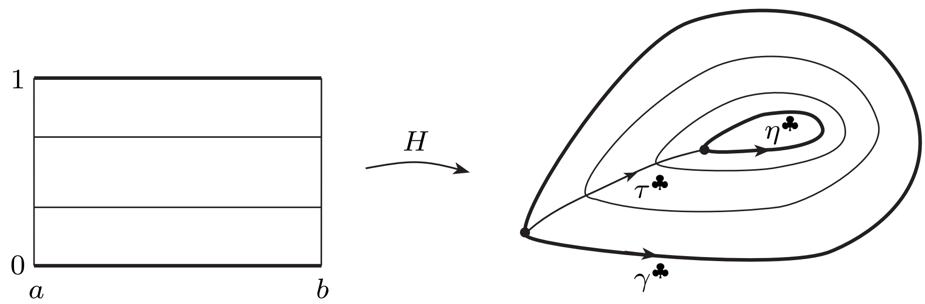
Pojasnimo oznake $\int_{H|_{\partial I}}$ i $\int_{H|_{\partial I_{ij}}}$ korištene u prethodnom dokazu, kao i rečeno „dokidanje integrala". Rub ∂I pravokutnika I sastoji se od četiri segmenta. Neka je $\alpha = \alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4$ zatvoren PDG put koji jednom obilazi taj rub u pozitivnom smjeru, tj. u smjeru suprotnom kretanju kazaljke na satu, i to tako da α^1 prođe donji brid pravokutnika I, α^2 desni brid, itd. Kompozicijom puta α i preslikavanja H dobivamo zatvoren PDG put $H \circ \alpha$ u Ω, a integral $\int_{H\circ\alpha}$ označujemo s $\int_{H|_{\partial I}}$. Umjesto opisanog puta α, možemo uzeti bilo koji zatvoren PDG put koji jednom obilazi ∂I. Svi će ti putevi biti međusobno algebarski ekvivalentni (vidi razmatranja o jednostavno zatvorenoj krivulji na str. 58), pa će integrali po njima biti jednaki, što i opravdava oznaku $\int_{H|_{\partial I}}$.

Analogno, s $\int_{H|_{\partial I_{ij}}}$ označujemo integral duž zatvorenog PDG puta dobivenog kompozicijom preslikavanja H i puta α_{ij} koji jednom obilazi rub ∂I_{ij} pravokutnika I_{ij}. Ako s α_{ij}^ℓ, $\ell = 1,2,3,4$, označimo dijelove puta α_{ij} koji se, kao i prije, odnose na pojedine bridove pravokutnika I_{ij}, onda putevi $H\circ\alpha^2_{i-1,j}$ i $H\circ\alpha^4_{ij}$ prolaze istim tragom, ali u suprotnom smjeru, pa se integrali duž tih puteva dokidaju. Isto se događa i s integralima duž puteva $H\circ\alpha^3_{i,j-1}$ i $H\circ\alpha^1_{ij}$.

Definicija homotopnosti, kao i prethodni teorem, odnose se i na slučaj kad su γ i η zatvoreni putevi sa zajedničkom istaknutom točkom (početak, ujedno i kraj). Međutim, za zatvorene puteve mogu se promatrati i općenitije homotopije, pri kojima istaknuta točka ne mora mirovati.

Neka su $\gamma,\eta\colon [a,b]\to\Omega$ dva glatka zatvorena puta u otvorenom skupu $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$. Kažemo da su oni ***glatko homotopni kao zatvoreni putevi*** u Ω, ako postoji glatka funkcija $H\colon [a,b]\times[0,1]\to\Omega$ takva da je

$$\left.\begin{aligned} H(t,0)&=\gamma(t)\\ H(t,1)&=\eta(t)\end{aligned}\right\}\ \text{za } t\in[a,b]$$
$$H(a,s)=H(b,s)\qquad \text{za } s\in[0,1]\,.$$



Traži se, dakle, da su svi nivoi h_s zatvoreni putevi. Jasno je da ako su zatvoreni putevi γ i η sa zajedničkom istaknutom točkom glatko homotopni u prijašnjem smislu, onda su oni glatko homotopni i kao zatvoreni putevi. Može se pokazati da vrijedi i obratno.

Teorem 26.4 *Neka su γ i η zatvoreni putevi u otvorenom skupu $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$, a ω zatvorena diferencijalna 1-forma na Ω. Ako su γ i η glatko homotopni kao zatvoreni putevi u Ω, onda je $\int_\gamma\omega=\int_\eta\omega$.*

Dokaz: Neka je $I=[a,b]\times[0,1]$, a $H\colon I\to\Omega$ glatka homotopija od γ do η, tj. $H(t,0)=\gamma(t)$, $H(t,1)=\eta(t)$, $t\in[a,b]$, i $H(a,s)=H(b,s)$, $s\in[0,1]$. Kao i u dokazu prethodnog teorema, zbog zatvorenosti 1-forme ω, zaključujemo da je $\int_{H|_{\partial I}}\omega=0$. Neka je $\tau\colon[0,1]\to\Omega$ put definiran s $\tau(s):=H(a,s)=H(b,s)$. Tada je

$$\int_{H|_{\partial I}}\omega=\int_\gamma\omega+\int_\tau\omega-\int_\eta\omega-\int_\tau\omega\,,$$

odakle slijedi tvrdnja teorema. ∎

Ubuduće, kad se radi o zatvorenim putevima, homotopnost će uvijek značiti homotopnost u smislu zatvorenih puteva, i to nećemo posebno naglašavati. Dakle, kada kažemo da su putevi γ i η homotopni, onda to znači da su oni homotopni kao zatvoreni putevi, ako su γ i η bili zatvoreni putevi, a homotopni s fiksiranom početnom i završnom točkom, ako su γ i η bili putevi sa zajedničkim krajnjim točkama.

Napomena 26.2 *Biti homotopan* (u oba navedena smisla) je relacija ekvivalencije među putevima sa zajedničkim krajevima, odnosno među zatvorenim putevima, i označujemo ju s $\simeq$.

Refleksivnost i simetričnost se pokazuju lako: Za put $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ je preslikavanje $H\colon [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ definirano s $H(t,s) := \gamma(t)$, za svaki $s \in [0,1]$, homotopija od γ do γ, pa je relacija $\simeq$ refleksivna. Nadalje, ako je H homotopija od γ do η, onda je preslikavanje K definirano s $K(t,s) := H(t, 1-s)$, homotopija od η do γ, pa je relacija $\simeq$ i simetrična.

Ostaje još pokazati tranzitivnost. Neka je H homotopija od γ do η, a G neka je homotopija od η do ν. Definirajmo preslikavanje $K\colon [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ s $K(t,s) := \begin{cases} H(t,2s) & , \quad 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ G(t,2s-1) , & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$, $t \in [a,b]$. Kako je $H(t,1) = \eta(t) = G(t,0)$, to je, prema lemi o uniji preslikavanja, teorem 2.2, preslikavanje K neprekidno, i lako se provjeri da je K zaista homotopija od γ do ν.

Problem je jedino u tome što preslikavanje K ne mora biti u točkama $(t, \frac{1}{2})$, $t \in [a,b]$, glatko, čak niti diferencijabilno, unatoč tomu što su preslikavanja H i G glatka. Parcijalne derivacije po varijabli t su neprekidne i u točkama $(t, \frac{1}{2})$, jer dobivamo s jedne strane $\partial_1 H(t,1)$, a s druge strane $\partial_1 G(t,0)$, a oboje je jednako vektoru $\eta'(t)$. Međutim, pri deriviranju po varijabli s, u točkama $(t, \frac{1}{2})$ je derivacija „slijeva", ili „odozdo", jednaka $2\,\partial_2 H(t,1)$, a derivacija „zdesna", ili „odozgo", jednaka je $2\,\partial_2 G(t,0)$, što su, općenito, različiti vektori.

Treba stoga najprije homotopije H i G „popraviti". Jedan način da se to napravi je da homotopije $H, G\colon [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ zamijenimo homotopijama $\tilde{H}, \tilde{G}\colon [a,b] \times [0,1] \to \Omega$, koje definiramo s $\tilde{H}(t,s) := H(t, \varphi(s))$ i $\tilde{G}(t,s) := G(t, \varphi(s))$, gdje je $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$ neka glatka funkcija, sa svojstvom da je $\varphi'(0) = 0 = \varphi'(1)$, naprimjer, jedna od funkcija φ_1 ili φ_2 iz napomene 26.1. $\tilde{H}$ i $\tilde{G}$ su također glatke homotopije od γ do η, odnosno od η do ν, pa ako u definiciji preslikavanja K umjesto H i G stavimo $\tilde{H}$ i $\tilde{G}$, dobit ćemo zaista glatku homotopiju od γ do ν, jer će sada obje parcijalne derivacije po varijabli s u točkama $(t, \frac{1}{2})$ biti jednake (jednake nuli), pa će parcijalne derivacije biti neprekidne, tj. homotopija K bit će diferencijabilna klase C^1.

Primijetimo, također, da su algebarski ekvivalentni putevi homotopni, i to u svakom skupu koji sadrži njihov (zajednički) trag. Kako je homotopnost puteva relacija ekvivalencije, dovoljno je vidjeti da ako je η dopuštena promjena puta γ, onda su oni homotopni, i to u slici (tragu) puta γ.

Neka su, dakle, $\gamma, \eta\colon [a,b] \to \Omega$ glatki putevi za koje postoji glatka funkcija $\varphi\colon [a,b] \to [a,b]$ takva da je $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$ i $\eta = \gamma \circ \varphi$. Definirajmo $H\colon [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ s $H(t,s) := \gamma((1-s)t + s\,\varphi(t))$, $t \in [a,b]$, $s \in [0,1]$. H je glatka funkcija i vrijedi

$$\begin{aligned} H(t,0) &= \gamma(t) \\ H(t,1) &= \gamma(\varphi(t)) = \eta(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(a,s) &= \gamma((1-s)\,a + s\,\varphi(a)) = \gamma(a)\,, \text{ jer je } \varphi(a) = a \\ H(b,s) &= \gamma((1-s)\,b + s\,\varphi(b)) = \gamma(b)\,, \text{ jer je } \varphi(b) = b\,. \end{aligned}$$

Osim toga je $H([a,b] \times [0,1]) = \gamma([0,1])$.

Za zatvoren put γ kažemo da je ***nulhomotopan*** u Ω, i pišemo $\gamma \simeq 0$, ako je on u Ω homotopan konstantnom putu. Geometrijski to znači da se trag $\gamma^\clubsuit$ puta γ može unutar Ω neprekidno (čak glatko) deformirati u točku.

Neposredno iz teorema 26.3 slijedi

Korolar 26.5 *Neka je ω zatvorena diferencijalna 1-forma na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Tada je $\int_\gamma \omega = 0$ za svaki po dijelovima gladak zatvoren put γ koji je nulhomotopan u Ω.* ■

Neki skupovi, kao što su kugla, paralelopiped, čitav $\mathbb{R}^n$, … imaju svojstvo da je u njima svaki zatvoren put nulhomotopan. Općenito, kažemo da je povezan skup $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ***jednostavno povezan*** ili 1-***povezan*** ako je svaki zatvoren put u U nulhomotopan u U.

Korolar 26.6 (Poincaréova[1] lema) *Svaka zatvorena diferencijalna 1-forma na jednostavno povezanom otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je egzaktna.*

Dokaz: Neka je ω zatvorena diferencijalna 1-forma na Ω, a γ proizvoljan zatvoren PDG put u Ω. Kako je Ω jednostavno povezan, to je γ nulhomotopan u Ω, pa je, prema prethodnom korolaru, $\int_\gamma \omega = 0$. Egzaktnost forme ω sada slijedi iz teorema 25.2. ■

[1] Jules Henri Poincaré (1854–1912), francuski matematičar

§ 27 Greenov teorem

Newton-Leibnizovu formulu $\int_a^b f'(t)\,dt = f(t)\,\big|_a^b = f(b) - f(a)$ možemo zapisati kao $\int_{[a,b]} df = f\,\big|_a^b$, i lijevu stranu interpretirati kao (jednostruki) integral po segmentu $[a,b]$ vanjskog diferencijala diferencijalne 0-forme f, a desnu stranu možemo interpretirati kao (nul-struki) integral diferencijalne 0-forme f po rubu $\partial([a,b]) = \{a,b\}$ segmenta $[a,b]$. Na Greenov teorem, kojim se bavimo u ovom paragrafu, možemo gledati kao na analogon Newton-Leibnizove formule u dimenziji za jedan većoj.

Dokažimo najprije jedan jednostavan specijalan slučaj tog teorema.

Teorem 27.1 (Greenov[1] teorem za pravokutnik — sirova verzija) *Neka je $I := [a,b]\times[c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ pravokutnik, a $F,G\colon I \to \mathbb{R}$ neka su diferencijabilne funkcije klase C^1 (dakle, definirane su i neprekidno diferencijabilne na nekoj okolini pravokutnika I). Tada je*

$$\int_I \partial_x G - \partial_y F = \int_a^b F(x,c)\,dx + \int_c^d G(b,y)\,dy - \int_a^b F(x,d)\,dx - \int_c^d G(a,y)\,dy\,.$$

Dokaz: Prema Fubinijevu teoremu, teorem 19.1, i Newton-Leibnizovoj formuli je

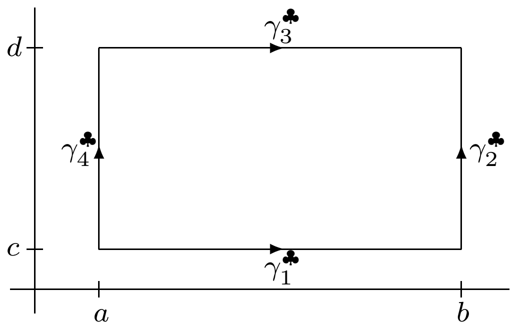
$$\begin{aligned}
\int_I \partial_x G &= \int_c^d \Big(\int_a^b \partial_x G(x,y)\,dx\Big)\,dy = \int_c^d \big(G(b,y) - G(a,y)\big)\,dy \\
\int_I \partial_y F &= \int_a^b \Big(\int_c^d \partial_y F(x,y)\,dy\Big)\,dx = \int_a^b \big(F(x,d) - F(x,c)\big)\,dx\,.
\end{aligned}$$

Oduzimanjem ovih jednakosti, dobivamo tvrdnju teorema. ■

Tom teoremu možemo dati ljepši oblik, koji je ujedno i pogodan za generalizaciju.

Neka su γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 putevi koji, na ‚prirodan' način, parametriziraju stranice pravokutnika I:

[1] George Green (1793–1841), engleski matematičar



$$\left.\begin{aligned} \gamma_1(t) &:= (t, c) \\ \gamma_3(t) &:= (t, d) \end{aligned}\right\} \; t \in [a, b]$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_2(t) &:= (b, t) \\ \gamma_4(t) &:= (a, t) \end{aligned}\right\} \; t \in [c, d]$$

i neka je $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$ njihova suma — put koji parametrizira rub ∂I pravokutnika I, obilazeći ga u smjeru suprotnom kretanju kazaljke na satu. Označimo s $\omega := F\,dx + G\,dy$ diferencijalnu 1-formu određenu funkcijama F i G, i definiranu na nekoj okolini pravokutnika I. Tada je

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \omega &= \int_a^b \big(F(\gamma_1(t))\,(\gamma_1^1)'(t) + G(\gamma_1(t))\,(\gamma_1^2)'(t)\big)\,dt \\ &= \int_a^b \big(F(t,c)\cdot 1 + G(t,c)\cdot 0\big)\,dt = \int_a^b F(t,c)\,dt\,, \end{aligned}$$

što je upravo prvi sumand na desnoj strani u prethodnom teoremu.

Analogno nalazimo

$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_c^d G(b,t)\,dt\,; \qquad \int_{\gamma_3} \omega = \int_a^b F(t,d)\,dt\,; \qquad \int_{\gamma_4} \omega = \int_c^d G(a,t)\,dt\,.$$

Tako dobivamo

Korolar 27.2 (Greenov teorem za pravokutnik) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, $I = [a,b] \times [c,d] \subseteq \Omega$ pravokutnik, a $F, G \colon \Omega \to \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije klase C^1. Tada je*

$$\int_I \partial_x G - \partial_y F = \int_\gamma F\,dx + G\,dy\,,$$

gdje je γ po dijelovima gladak put koji jednom obilazi rub ∂I pravokutnika I u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu. ■

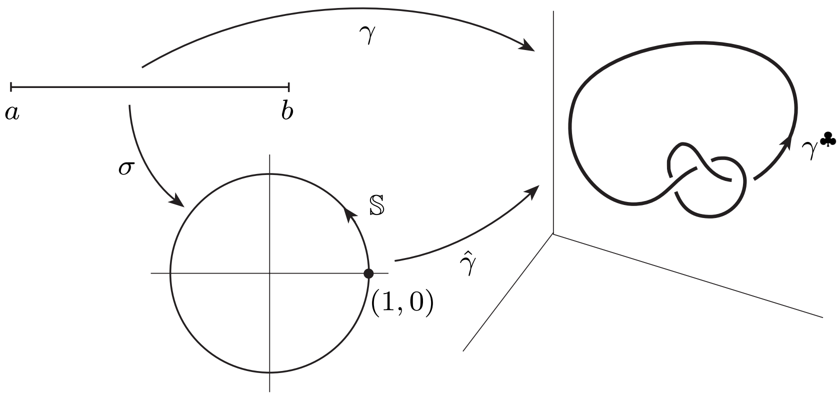
Napomena 27.1 Uobičajeno je tvrdnju Greenova teorema za pravokutnik iskazati u obliku

$$\int_I \partial_x G - \partial_y F = \int_{\partial I} F\,dx + G\,dy\,,$$

gdje je s $\int_{\partial I}$ na desnoj strani, označen integral po bilo kojem PDG putu koji jednom obilazi rub ∂I pravokutnika I, i to u pozitivnom smjeru, tj. smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu. Svi su ti putevi algebarski ekvivalentni, pa su i integrali po njima međusobno jednaki.

Da bismo izrekli i dokazali opći Greenov teorem, moramo najprije spomenuti neke netrivijalne rezultate topologije ravnine.

Na svaki zatvoren put u $\mathbb{R}^n$ možemo gledati i kao na preslikavanje s jedinične kružnice u prostor $\mathbb{R}^n$. Naime, Za svaku točku $P \neq (1,0)$ jedinične kružnice $\mathbb{S} := \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$, postoji jedinstven $t \in [0, 2\pi]$ takav da je $P = (\cos t, \sin t)$, tj. standardna parametrizacija $\sigma(t) := (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, kružnice $\mathbb{S}$, identificira 0 i 2π, te ih preslikava u točku $(1,0) \in \mathbb{S}$, dok je na $[0, 2\pi\rangle$ injekcija. Za zatvoren put $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^n$ (prema prvoj od napomena nakon korolara 26.2 na str. 29, možemo za domenu puta γ uzeti bilo koji segment) je $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$. Definirajmo preslikavanje $\hat{\gamma}\colon \mathbb{S} \to \mathbb{R}^n$ s $\hat{\gamma}(\sigma(t)) := \gamma(t)$.



Ako je preslikavanje γ glatko i $\gamma'(a) = \gamma'(b)$, bit će i preslikavanje $\hat{\gamma}$ glatko.

Obratno je očito: na svako neprekidno preslikavanje $\mathbb{S} \to \mathbb{R}^n$, možemo gledati kao na zatvoren put u $\mathbb{R}^n$.

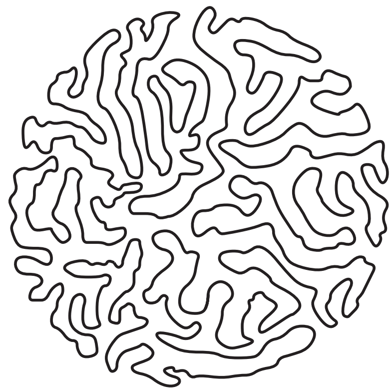
Za zatvoren put $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ za koji, osim $\gamma(a) = \gamma(b)$, nema drugih identifikacija, tj. restrikcija $\gamma\big|_{[a,\, b\rangle}$ je injekcija, kažemo da je ***jednostavno zatvoren put***. Drugim riječima, jednostavno zatvoren put u $\mathbb{R}^n$ je neprekidna injekcija $\hat{\gamma}\colon \mathbb{S} \to \mathbb{R}^n$, pa je korestrikcija $\hat{\gamma}\colon \mathbb{S} \to \hat{\gamma}(\mathbb{S})$ homeomorfizam.

Trag (slika) jednostavno zatvorenog puta u ravnini $\mathbb{R}^2$ naziva se ***kontura***. Jedan od najvažnijih teorema topologije ravnine je sljedeći Jordanov teorem:

Teorem 27.3 (Jordanov[1] teorem) *Neka je $\gamma^\clubsuit \subseteq \mathbb{R}^2$ kontura. Tada se komplement $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma^\clubsuit$ sastoji od dva disjunktna povezana otvorena skupa (područja),*

[1]Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922), francuski matematičar

i $\gamma^\clubsuit$ je zajednički rub svakog od njih. Jedan od tih povezanih otvorenih skupova je omeđen, i naziva se ***unutrašnje područje*** *konture $\gamma^\clubsuit$ ili* ***područje omeđeno konturom*** *$\gamma^\clubsuit$, a drugi je neomeđen i naziva se* ***vanjsko*** *ili* ***neomeđeno područje*** *konture $\gamma^\clubsuit$.*



Ovaj netrivijalni teorem formulirao je Jordan 1887. godine, ali je u dokazu bila pogreška. Potpun dokaz dao je Veblen[1] 1905. godine. Danas postoji više različitih dokaza tog teorema. Neki su elementarniji, ali zato podugački i s mnogo tehničkih detalja, dok su drugi relativno kratki i elegantni, ali zahtijevaju poznavanje tehnika algebarske topologije. Mi ovaj teorem nećemo dokazivati.

Da bismo mogli izreći opći Greenov teorem, moramo nešto reći i o orijentaciji puteva. Neka je $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ po dijelovima gladak put. Za sve PDG puteve koji imaju isti trag kao γ i s γ su algebarski ekvivalentni, kažemo da su ***jednako orijentirani*** ili da su ***iste orijentacije*** kao γ. S druge strane, za put $-\gamma$, definiran kao $(-\gamma)(t) := \gamma(a+b-t)$, $t \in [a,b]$, koji ima isti trag kao γ, ali „ide natraške”, kao i za sve puteve koji su algebarski ekvivalentni putu $-\gamma$, kažemo da su ***suprotno orijentirani*** ili da su ***suprotne orijentacije*** nego put γ. Ove se definicije odnose i na zatvorene i na ne-zatvorene puteve. Ne postoji pojam „pozitivno” ili „negativno” orijentiranog puta u $\mathbb{R}^n$ — osim za jednostavno zatvorene puteve u ravnini $\mathbb{R}^2$.

Neka je, dakle, $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ gladak jednostavno zatvoren put u ravnini. Za $t \in [a,b]$ je $\gamma'(t)$ vektor tangencijalan na trag $\gamma^\clubsuit$ u točki $\gamma(t)$ (vidi diskusiju ispred propozicije 30.2 na str. 72). Neka je $n(t)$ onaj od dva normalna jedinična vektora u točki $\gamma(t)$ koji „gleda” u unutrašnje područje konture $\gamma^\clubsuit := \gamma([a,b])$. Ako za svaki $t \in [a,b]$ uređen par vektora $(\gamma'(t), n(t))$ određuje istu orijentaciju ravnine kao par (e_1, e_2) vektora kanonske ortonormirane baze u $\mathbb{R}^2$, onda kažemo da su jednostavno zatvoren put γ i kontura $\gamma^\clubsuit$ ***pozitivno orijentirani***. Jednostavno zatvoren put $-\gamma$, odnosno kontura $-\gamma^\clubsuit$, bit će tada ***negativno orijentirani*** — za njih će promatrani par vektora određivati negativnu orijentaciju ravnine, tj. onu koju određuje uređen par (e_2, e_1). Jednostavno zatvoren put u $\mathbb{R}^2$ je, dakle, pozitivno orijentiran ako se unutrašnje područje nalazi uvijek slijeva.

Za dokaz Greenova teorema, trebat će nam još jedan važan teorem topologije

[1] Oswald Veblen (1880–1960), američki matematičar

ravnine, koji nadopunjuje Jordanov teorem.

Teorem 27.4 (Schönfliesov[1] teorem) *Neka je* $\gamma^\clubsuit \subseteq \mathbb{R}^2$ *kontura, te neka je* $B \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \gamma^\clubsuit$ *njezino unutrašnje područje. Tada postoji homeomorfizam* $h\colon \overline{K}(0,1) \to B \cup \gamma^\clubsuit$ *zatvorenog kruga* $\overline{K}(0,1) = K(0,1) \cup \mathbb{S}$ *na* $B \cup \gamma^\clubsuit$*, koji homeomorfno preslikava otvoren krug* $K(0,1)$ *na unutrašnje područje* B*, a rub* $\partial K(0,1) = \mathbb{S}$ *preslikava homeomorfno na konturu* $\gamma^\clubsuit$*. Ako je kontura* $\gamma^\clubsuit$ *glatka, može se postići i da* h *bude* ***difeomorfizam*** *koji* ***čuva orijentaciju****, tj.* $\det Dh(P) > 0$ *za sve* P*.*

Konturu smo definirali kao trag (sliku) jednostavno zatvorenog puta u $\mathbb{R}^2$, dakle, kao homeomorfnu sliku kružnice. Ako je $I = [a,b]\times[c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ neki pravokutnik, njegov rub ∂I homeomorfan je kružnici, pa na konturu možemo gledati i kao na homeomorfnu sliku ruba pravokutnika. Pravokutnik I i zatvoren krug $\overline{K}(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$ su homeomorfni. Štoviše, postoji homeomorfizam pravokutnika I na zatvoren krug $\overline{K}(0,1)$ koji homeomorfno preslikava ∂I na $\mathbb{S} = \partial\overline{K}(0,1)$. Može se pokazati da postoji i glatki difeomorfizam s tim svojstvom.

Sada možemo dokazati najavljivani opći Greenov teorem:

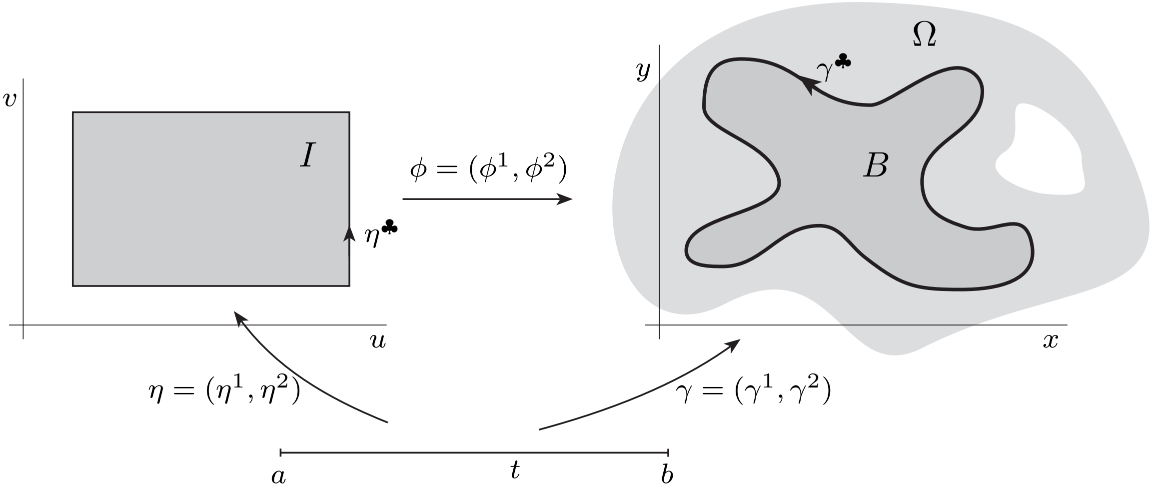
Teorem 27.5 (Greenov teorem) *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *otvoren skup,* $F, G\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *diferencijabilne funkcije klase* C^1*, i neka je* $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ *pozitivno orijentiran jednostavno zatvoren po dijelovima gladak put u* Ω*, takav da je i unutrašnje područje* B *određeno konturom* $\gamma^\clubsuit = \gamma([a,b])$ *sadržano u* Ω*. Tada je*

$$\int_B \partial_x G - \partial_y F = \int_\gamma F\,dx + G\,dy\,.$$

Dokaz: Prema napomeni 26.1, možemo pretpostaviti da je put γ gladak. Zbog Schönfliesova teorema i komentara nakon njega, postoji preslikavanje $\phi\colon I \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, definirano i glatko klase C^2 na nekoj okolini pravokutnika $I \subseteq \mathbb{R}^2$, koje homeomorfno preslikava ∂I na $\gamma^\clubsuit$, i difeomorfno preslikava otvoren pravokutnik $\mathring{I} := I \setminus \partial I$ na unutrašnje područje B omeđeno konturom $\gamma^\clubsuit$, i koje čuva orijentaciju, tj. $\det D\phi(P) > 0$ za sve P.

Označimo varijablu preslikavanja ϕ s (u,v).

[1] Arthur Moritz Schönflies (1853–1928), njemački matematičar



Transformirajmo najprije lijevu stranu. Skup $B \cup \gamma^\clubsuit$ je kompaktan, kao neprekidna slika zatvorenog pravokutnika I, a njegov rub $\gamma^\clubsuit$ je skup površine nula, jer je on glatka slika ruba ∂I pravokutnika I (vidi teorem 16.6). Stoga su skupovi $B \cup \gamma^\clubsuit = \phi(I)$ i B J-izmjerivi, pa integrali neprekidne funkcije $\partial_x G - \partial_y F$ po tim skupovima postoje. Kako je transformacija ϕ glatka, čak je klase C^2, možemo primijeniti teorem 20.1 o zamjeni varijabli u dvostrukom integralu. Tako dobivamo

$$\int\limits_B \partial_x G - \partial_y F = \int\limits_{B\cup\gamma^\clubsuit} \partial_x G - \partial_y F = \int\limits_I \big((\partial_x G - \partial_y F) \circ \phi\big) \cdot \det D\phi\,.$$

Transformirajmo sada desnu stranu. Kako je restrikcija $\phi\big|_{\partial I} \colon \partial I \to \gamma^\clubsuit$ glatki homeomorfizam, to je kompozicija $\eta := (\phi\big|_{\partial I})^{-1} \circ \gamma \colon [a,b] \to \partial I$ po dijelovima gladak put koji jednom obilazi rub ∂I pravokutnika I, i to u pozitivnom smjeru, jer ϕ, pa onda i njegov inverz, čuvaju orijentaciju. Prema definiciji puta η je $\gamma = \phi \circ \eta$, pa i za koordinatna preslikavanja vrijedi $\gamma^i = \phi^i \circ \eta$, $i = 1, 2$. Sljedeći račun je dobra vježba za parcijalno deriviranje. Zbog preglednosti ćemo nakon druge jednakosti izostavljati varijable, tako da ćemo, naprimjer, za derivaciju kompozicije dviju funkcija, umjesto

$$(\alpha \circ \beta)'(t) = \alpha'(\beta(t)) \cdot \beta'(t)$$

pisati

$$(\alpha \circ \beta)' = \alpha' \circ \beta \cdot \beta'\,.$$

Prema definiciji integrala diferencijalne 1-forme duž puta γ, imamo

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F\,dx + G\,dy &= \int_a^b \big(F(\gamma(t))\,(\gamma^1)'(t) + G(\gamma(t))\,(\gamma^2)'(t)\big)\,dt \\
&= \int_a^b \big((F\circ\phi\circ\eta)(t)\cdot(\phi^1\circ\eta)'(t) + (G\circ\phi\circ\eta)(t)\cdot(\phi^2\circ\eta)'(t)\big)\,dt \\
&= \int_a^b (F\circ\phi\circ\eta)\cdot\big(\partial_u\phi^1\circ\eta\cdot(\eta^1)' + \partial_v\phi^1\circ\eta\cdot(\eta^2)'\big) + \\
&\qquad + (G\circ\phi\circ\eta)\cdot\big(\partial_u\phi^2\circ\eta\cdot(\eta^1)' + \partial_v\phi^2\circ\eta\cdot(\eta^2)'\big) \\
&= \int_a^b (F\circ\phi\cdot\partial_u\phi^1 + G\circ\phi\cdot\partial_u\phi^2)\circ\eta\cdot(\eta^1)' + \\
&\qquad + (F\circ\phi\cdot\partial_v\phi^1 + G\circ\phi\cdot\partial_v\phi^2)\circ\eta\cdot(\eta^2)' \\
&= \int_\eta (F\circ\phi\cdot\partial_u\phi^1 + G\circ\phi\cdot\partial_u\phi^2)\,du + (F\circ\phi\cdot\partial_v\phi^1 + G\circ\phi\cdot\partial_v\phi^2)\,dv\,.
\end{aligned}$$

Primjenom Greenova teorema za pravokutnik, ovaj je integral jednak

$$\begin{aligned}
&= \int_I \partial_u(F\circ\phi\cdot\partial_v\phi^1 + G\circ\phi\cdot\partial_v\phi^2) - \partial_v(F\circ\phi\cdot\partial_u\phi^1 + G\circ\phi\cdot\partial_u\phi^2) \\
&= \int_I (\partial_x F\circ\phi\cdot\partial_u\phi^1 + \partial_y F\circ\phi\cdot\partial_u\phi^2)\cdot\partial_v\phi^1 + F\circ\phi\cdot\partial_u\partial_v\phi^1 + \\
&\qquad + (\partial_x G\circ\phi\cdot\partial_u\phi^1 + \partial_y G\circ\phi\cdot\partial_u\phi^2)\cdot\partial_v\phi^2 + G\circ\phi\cdot\partial_u\partial_v\phi^2 - \\
&\qquad - (\partial_x F\circ\phi\cdot\partial_v\phi^1 + \partial_y F\circ\phi\cdot\partial_v\phi^2)\cdot\partial_u\phi^1 - F\circ\phi\cdot\partial_v\partial_u\phi^1 - \\
&\qquad - (\partial_x G\circ\phi\cdot\partial_v\phi^1 + \partial_y G\circ\phi\cdot\partial_v\phi^2)\cdot\partial_u\phi^2 - G\circ\phi\cdot\partial_v\partial_u\phi^2
\end{aligned}$$

a to je, zbog Schwarzova teorema, jednako

$$\begin{aligned}
&= \int_I \partial_x G\circ\phi\cdot(\partial_u\phi^1\cdot\partial_v\phi^2 - \partial_v\phi^1\cdot\partial_u\phi^2) - \\
&\qquad - \partial_y F\circ\phi\cdot(\partial_u\phi^1\cdot\partial_v\phi^2 - \partial_v\phi^1\cdot\partial_u\phi^2) \\
&= \int_I (\partial_x G\circ\phi - \partial_y F\circ\phi)\cdot\det D\phi\,,
\end{aligned}$$

što je jednako izrazu koji smo bili dobili za lijevu stranu. ■

Sada ćemo dati još jedan drugačiji oblik Greenove formule. Funkcijama F i G definirana je na Ω diferencijalna 1-forma $\omega = F\,dx + G\,dy$, pa desnu stranu Greenove formule možemo pisati u obliku $\int_\gamma \omega$.

Kao što smo prije definirali, vanjski diferencijal diferencijalne 1-forme ω je diferencijalna 2-forma $d\omega := (\partial_x G - \partial_y F)\,dx \wedge dy$. Difeomorfizam $\phi\colon I \to \overline{B} = B \cup \gamma^\clubsuit$, korišten u dokazu Greenova teorema, poseban je slučaj ***plohe***, točnije ***singularne* 2*-plohe*** u $\mathbb{R}^2$. Općenito se ***integral*** takve ***diferencijalne* 2*-forme*** $g\,dx \wedge dy$, po singularnoj 2-plohi $\phi\colon I \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, gdje je $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, definira kao običan, dvostruki, integral funkcije g po slici $\phi(I)$, dakle, $\int_\phi g\,dx \wedge dy := \int_{\phi(I)} g$.

Pogledajmo sada lijevu stranu Greenove formule. Kako je $\gamma^\clubsuit = \partial B = \overline{B} \setminus B$ skup mjere nula, to je $\int_B g = \int_{\overline{B}} g$ za svaku neprekidnu funkciju g, pa je, uz gornju definiciju integrala diferencijalne 2-forme,

$$\int_B \partial_x G - \partial_y F = \int_{\overline{B}} \partial_x G - \partial_y F = \int_{\phi(I)} \partial_x G - \partial_y F = \int_\phi d\omega\,.$$

Na jednostavno zatvoren put $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ možemo gledati kao na preslikavanje $\hat{\gamma}\colon \partial I \to \Omega$ (vidi komentare ispred Jordanova teorema, str. 37, i nakon Schönfliesova teorema, str. 39), tj. kao na restrikciju preslikavanja ϕ na rub pravokutnika I. Možemo, dakle, uzeti $\hat{\gamma} = \phi\big|_{\partial I}$. U terminologiji singularnih ploha definira se ***rub singularne plohe*** $\phi\colon I \to \Omega$ upravo kao ta restrikcija, i označuje se s $\partial\phi$, tj. definira se $\partial\phi := \phi\big|_{\partial I}\colon \partial I \to \Omega$. Tako desna strana u Greenovoj formuli postaje $\int_{\partial\phi} \omega$, pa dobivamo

$$\int_\phi d\omega = \int_{\partial\phi} \omega\,. \tag{1}$$

Dakle, integral (vanjskog) diferencijala $d\omega$ diferencijalne 1-forme po singularnoj 2-plohi ϕ u otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, jednak je integralu diferencijalne 1-forme ω po rubu $\partial\phi$ (koji je zatvorena singularna 1-ploha, tj. zatvoren put).

Osim diferencijalnih 1-formi i 2-formi, definiraju se i diferencijalne k-forme u $\mathbb{R}^n$ i integrali diferencijalnih k-formi po tzv. singularnim k-plohama u $\mathbb{R}^n$. U toj se teoriji, uz odgovarajuće definicije, dokazuje da formula (1) vrijedi općenito za k-formu ω i $(k+1)$-plohu ϕ. To je opći ***Stokesov***[1] ***teorem***, a Greenov teorem, koji smo mi u cijelosti dokazali, njegov je važan, specijalan,

[1]George Gabriel Stokes (1819–1903), engleski matematičar, rođen u Irskoj

slučaj. Jedan drugi važan poseban slučaj općeg Stokesova teorema je tzv. ***Gaussov***[1] ***teorem o divergenciji***, koji bez dodatnih priprema i definicija ne možemo ovdje iskazati.

§ 28 Funkcije ograničene varijacije

Jednu, u analizi vrlo važnu, klasu funkcija čine funkcije ograničene varijacije. Mi ćemo se takvim funkcijama koristiti za definiranje duljine krivulje.

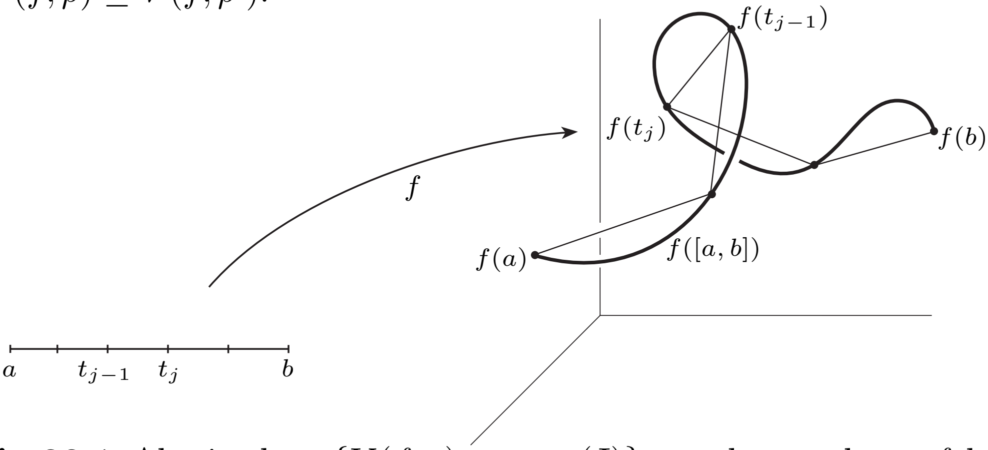
Neka je $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ segment, a $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ funkcija (ne nužno neprekidna). Za razdiobu (particiju, subdiviziju)

$$\rho = \{\, a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k(\rho)} = b \,\}$$

segmenta I definiramo broj

$$V(f, \rho) := \sum_{j=1}^{k(\rho)} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\|$$

koji zovemo ***varijacijom funkcije*** f s obzirom na razdiobu ρ. Iz relacije trokuta jednostavno slijedi da ako razdioba ρ' profinjuje ρ, u oznaci $\rho' \geq \rho$, onda je $V(f, \rho) \leq V(f, \rho')$.



Definicija 28.1 Ako je skup $\{V(f, \rho) : \rho \in \rho(I)\}$ omeđen, onda za f kažemo da je ***funkcija ograničene*** ili ***omeđene varijacije***, a broj

$$V(f) := \sup\{V(f, \rho) : \rho \in \rho(I)\}$$

nazivamo ***totalna varijacija funkcije*** f na segmentu I. Rabe se i oznake $V(f) = V_a^b(f) = V(f, [a, b])$.

[1] Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855), njemački matematičar

Teorem 28.1 *Funkcija* $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon I \to \mathbb{R}^n$ *je funkcija ograničene varijacije ako i samo ako su sve koordinatne funkcije* $f_i\colon I \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, *funkcije ograničene varijacije.*

Dokaz: $\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $V(f_i) < \infty$, $i = 1, \ldots, n$. Tada za svaku razdiobu ρ segmenta I vrijedi

$$\begin{aligned} V(f,\rho) &= \sum_{j=1}^{k(\rho)} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| = \sum_{j=1}^{k(\rho)} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i(t_j) - f_i(t_{j-1})|^2} \\ &\le \sum_{j=1}^{k(\rho)} \sum_{i=1}^{n} |f_i(t_j) - f_i(t_{j-1})| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k(\rho)} |f_i(t_j) - f_i(t_{j-1})| \\ &= \sum_{i=1}^{n} V(f_i,\rho) \le \sum_{i=1}^{n} V(f_i) < \infty\,, \end{aligned}$$

pa je i f funkcija ograničene varijacije.

$\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $V(f) < \infty$. Tada za $\rho \in \rho(I)$ i sve $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi

$$V(f_i,\rho) = \sum_{j=1}^{k(\rho)} |f_i(t_j) - f_i(t_{j-1})| \le \sum_{j=1}^{k(\rho)} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| = V(f,\rho) < V(f)\,,$$

pa su i f_i funkcije ograničene varijacije. ■

Primjeri 28.1

(*i*) Svaka monotona funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je funkcija ograničene varijacije i $V(f) = |f(b) - f(a)|$.

Zaista, ako f raste onda je za $\rho \in \rho(I)$

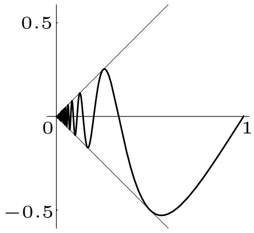
$$\begin{aligned} V(f,\rho) &= \sum_{j=1}^{k(\rho)} |f(t_j) - f(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^{k(\rho)} \big(f(t_j) - f(t_{j-1})\big) \\ &= f(t_{k(\rho)}) - f(t_0) = f(b) - f(a)\,, \end{aligned}$$

pa je i $V(f) = f(b) - f(a)$.
Ako f pada, onda se na odgovarajućim mjestima samo mijenjaju predznaci.

Posljedica upravo dokazane činjenice je da funkcija ograničene varijacije ne mora biti neprekidna (monotona realna funkcija očito može imati prekide).

(*ii*) S druge strane, neprekidna funkcija ne mora biti i funkcija ograničene varijacije. Promotrimo funkciju $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiranu s

$$f(t) = \begin{cases} t\,\cos\dfrac{\pi}{2t}\,, & t \in \langle 0,1] \\ \quad 0 \quad, & t = 0 \end{cases}$$



Za $n \in \mathbb{N}$ odaberimo razdiobu

$$\rho_n = \left\{\, 0 < \tfrac{1}{2n} < \tfrac{1}{2n-1} < \tfrac{1}{2n-2} < \cdots < \tfrac{1}{3} < \tfrac{1}{2} < 1 \,\right\}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} V(f,\rho_n) &= \left|\tfrac{1}{2n}\cos\tfrac{2n\pi}{2} - 0\right| + \left|\tfrac{1}{2n-1}\cos\tfrac{(2n-1)\pi}{2} - \tfrac{1}{2n}\cos\tfrac{2n\pi}{2}\right| + \cdots \\ &\qquad \cdots + \left|\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{2\pi}{2} - \tfrac{1}{3}\cos\tfrac{3\pi}{2}\right| + \left|\cos\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{2\pi}{2}\right| = \\ &= \tfrac{1}{2n} + \tfrac{1}{2n} + \tfrac{1}{2n-2} + \tfrac{1}{2n-2} + \cdots + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = \\ &= \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n-1} + \cdots + \tfrac{1}{2} + 1\,, \end{aligned}$$

te su za odabrane razdiobe ρ_n, pripadne varijacije funkcije f jednake parcijalnim sumama harmonijskog reda, koji divergira. Zbog toga skup $\{V(f,\rho) : \rho \in \rho(I)\}$ nije omeđen, pa f nije funkcija ograničene varijacije.

Zadatak 28.1 Neka su $g_1, g_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ funkcije definirane s

$$g_1(t) = \begin{cases} t\,\sin\dfrac{1}{t}\,, & t \in \langle 0,1] \\ \quad 0 \quad, & t = 0 \end{cases} \qquad \text{i} \qquad g_2(t) = \begin{cases} t^2\,\sin\dfrac{1}{t}\,, & t \in \langle 0,1] \\ \quad 0 \quad, & t = 0\,. \end{cases}$$

Pokažite da g_1 nije funkcija omeđene varijacije, a da g_2 jest funkcija omeđene varijacije. Kolika je totalna varijacija funkcije g_2?

Navedimo sada osnovna svojstva familije funkcija ograničene varijacije.

Propozicija 28.2

(*i*) *Svaka funkcija ograničene varijacije je omeđena.*

(*ii*) *Ako su $f, g\colon I \to \mathbb{R}^n$ funkcije ograničene varijacije, onda su i $f+g$, $\|f\|$ i $(f\,|\,g)$ funkcije ograničene varijacije. Ako je $n = 1$ i $\inf\{|f(t)| : t \in I\} > 0$, onda je i $\dfrac{1}{f}$ funkcija ograničene varijacije.*

(*iii*) *Ako je* $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ *funkcija ograničene varijacije, a* $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *izometrija (dakle kompozicija translacije i unitarnog operatora), i* $\alpha \in \mathbb{R}$, *onda su i funkcije* $u \circ f$ *i* αf *funkcije ograničene varijacije, i vrijedi* $V(u \circ f) = V(f)$ *i* $V(\alpha f) = |\alpha|\, V(f)$.

(*iv*) *Neka je* $a < b < c$ *i* $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}^n$ *funkcija.* f *je funkcija ograničene varijacije na* $[a,c]$ *ako i samo ako je* f *funkcija ograničene varijacije na* $[a,b]$ *i na* $[b,c]$. *U tom je slučaju* $V(f) = V(f\big|_{[a,\,b]}) + V(f\big|_{[b,\,c]})$.

Dokaz: (*i*) Neka je $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ funkcija omeđene varijacije. Za proizvoljan $t \in I$ definirajmo razdiobu $\rho_t := \{\, a \le t \le b \,\}$. Tada je

$$\|f(t) - f(a)\| \le \|f(t) - f(a)\| + \|f(b) - f(t)\| = V(f, \rho_t) \le V(f)\,,$$

pa je $f(I) \subseteq \overline{K}\big(f(a), V(f)\big)$, dakle $f(I)$ je omeđen skup.

(*ii*) Neka su f i g funkcije omeđene varijacije, a $\rho = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k(\rho)} = b\}$ proizvoljna razdioba segmenta $I = [a,b]$. Tada je

$$\begin{aligned}
V(f+g,\rho) &= \sum_{j=1}^{k(\rho)} \|\big(f(t_j) + g(t_j)\big) - \big(f(t_{j-1}) + g(t_{j-1})\big)\| \\
&\le \sum_{j=1}^{k(\rho)} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| + \sum_{j=1}^{k(\rho)} \|g(t_j) - g(t_{j-1})\| \\
&= V(f,\rho) + V(g,\rho) \le V(f) + V(g) < \infty\,,
\end{aligned}$$

pa je i $f+g$ funkcija omeđene varijacije (i $V(f+g) \le V(f) + V(g)$).

Nadalje, zbog (*i*), f i g su omeđene funkcije pa postoje brojevi $M, N > 0$ takvi da je $\|f(t)\| \le M$ i $\|g(t)\| \le N$, za sve $t \in I$. Zato, za razdiobu ρ vrijedi

$$\begin{aligned}
F((f \mid g),\rho) &= \sum_{j=1}^{k(\rho)} \big|\big(f(t_j) \mid g(t_j)\big) - \big(f(t_{j-1}) \mid g(t_{j-1})\big)\big| \\
&= \sum_{j=1}^{k(\rho)} \big|\big(f(t_j) \mid g(t_j)\big) - \big(f(t_j) \mid g(t_{j-1})\big) + \\
&\qquad\quad + \big(f(t_j) \mid g(t_{j-1})\big) - \big(f(t_{j-1}) \mid g(t_{j-1})\big)\big|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{j=1}^{k(\rho)} \big|\big(f(t_j) \mid g(t_j) - g(t_{j-1})\big)\big| + \big|\big(f(t_j) - f(t_{j-1}) \mid g(t_{j-1})\big)\big| \\
&\le \sum_{j=1}^{k(\rho)} \|f(t_j)\| \, \|g(t_j) - g(t_{j-1})\| + \sum_{j=1}^{k(\rho)} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \, \|g(t_{j-1})\| \\
&\le M\,V(g,\rho) + N\,V(f,\rho) \le M\,V(g) + N\,V(f) < \infty\,,
\end{aligned}
$$

što pokazuje da je i skalarni produkt $(f \mid g)$ funkcija omeđene varijacije.

Da bismo dokazali tvrdnju za $\|f\|$, prisjetimo se da za proizvoljne vektore $P, Q \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $\big|\|P\| - \|Q\|\big| \le \|P - Q\|$, pa za razdiobu ρ vrijedi

$$
\begin{aligned}
V(\|f\|,\rho) &= \sum_{j=1}^{k(\rho)} \big|\|f(t_j)\| - \|f(t_{j-1})\|\big| \\
&\le \sum_{j=1}^{k(\rho)} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| = V(f,\rho) \le V(f) < \infty\,,
\end{aligned}
$$

pa je i $\|f\|$ funkcija omeđene varijacije.

Konačno, za $n = 1$ i uz pretpostavku da je $m := \inf\{\, |f(t)| : t \in I \,\} > 0$, za razdiobu ρ vrijedi

$$
\begin{aligned}
V(\tfrac{1}{f},\rho) &= \sum_{j=1}^{k(\rho)} \Big|\frac{1}{f(t_j)} - \frac{1}{f(t_{j-1})}\Big| = \sum_{j=1}^{k(\rho)} \frac{|f(t_j) - f(t_{j-1})|}{|f(t_j)| \cdot |f(t_{j-1})|} \\
&\le \frac{1}{m^2}\, V(f,\rho) \le \frac{1}{m^2}\, V(f) < \infty\,,
\end{aligned}
$$

pa je i $\dfrac{1}{f}$ funkcija omeđene varijacije.

(iii) se dokazuje lako, jer za izometriju u vrijedi $\|u(P) - u(Q)\| = \|P - Q\|$, za sve $P, Q \in \mathbb{R}^n$.

(iv) $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $V(f) < \infty$, i neka su ρ_1 i ρ_2 proizvoljne razdiobe segmenata $[a,b]$ i $[b,c]$, a $\rho := \rho_1 \cup \rho_2$ pripadna razdioba segmenta $[a,c]$. Tada je

$$
\begin{aligned}
&V(f\big|_{[a,\,b]},\rho_1) \le V(f,\rho) \le V(f) < \infty\,, \quad \text{i} \\
&V(f\big|_{[b,\,c]},\rho_2) \le V(f,\rho) \le V(f) < \infty\,,
\end{aligned}
$$

pa su $f\big|_{[a,b]}$ i $f\big|_{[b,c]}$ funkcije omeđene varijacije. Štoviše, vrijedi

$$V(f\big|_{[a,b]},\rho_1)+V(f\big|_{[b,c]},\rho_2)=V(f,\rho)\leq V(f)\,,$$

pa je i

$$V(f\big|_{[a,b]})+V(f\big|_{[b,c]})\leq V(f)\,. \tag{1}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka su $V(f\big|_{[a,b]}),V(f\big|_{[b,c]})<\infty$, i neka je ρ razdioba segmenta $[a,c]$. Označimo s $\rho^*:=\rho\cup\{b\}$, a ρ_1 i ρ_2 neka su razdiobe segmenata $[a,b]$ odnosno $[b,c]$ inducirane s ρ^*. Tada je

$$\begin{aligned}V(f,\rho)\leq V(f,\rho^*)&=V(f\big|_{[a,b]}),\rho_1)+V(f\big|_{[b,c]},\rho_2)\\&\leq V(f\big|_{[a,b]})+V(f\big|_{[b,c]})<\infty\,,\end{aligned}$$

pa je f funkcija omeđene varijacije na $[a,c]$, i vrijedi

$$V(f)\leq V(f\big|_{[a,b]})+V(f\big|_{[b,c]})\,. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) slijedi sada tražena jednakost. ■

Važnu klasu funkcija ograničene varijacije čine glatke funkcije, tj. diferencijabilne funkcije klase C^1.

Teorem 28.3 *Ako je $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$ diferencijabilna funkcija klase C^1, onda je f funkcija ograničene varijacije i vrijedi*

$$V(f)=\int_a^b\|f'(t)\|\,dt\,. \tag{3}$$

Dokaz: Pokažimo najprije da je f funkcija ograničene varijacije. Neka je $\rho\in\rho(I)$ proizvoljna razdioba segmenta $I=[a,b]$. Tada je, prema korolaru 22.3,

$$V(f,\rho)=\sum_{j=1}^{k(\rho)}\|f(t_j)-f(t_{j-1})\|\leq\sum_{j=1}^{k(\rho)}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|f'(t)\|\,dt=\int_a^b\|f'(t)\|\,dt<\infty\,, \tag{4}$$

pa je skup $\{V(f,\rho):\rho\in\rho(I)\}$ omeđen, tj. f je funkcija ograničene varijacije.

Pokažimo sada da vrijedi formula (3). Iz (4) slijedi $V(f) \leq \int_a^b \|f'(t)\|\,dt$. Pretpostavimo da vrijedi stroga nejednakost, tj. da je

$$\varepsilon := \int_a^b \|f'(t)\|\,dt - V(f) > 0\,.$$

Neka je $f(t) = \big(f_1(t), \dots, f_n(t)\big)$, $t \in I$, i neka je $I^n := \underbrace{I \times I \cdots \times I}_{n}$. Definirajmo funkciju $F\colon I^n \to \mathbb{R}$ s

$$F(t_1, \dots, t_n) := \big\|\big(f_1'(t_1), f_2'(t_2), \dots, f_n'(t_n)\big)\big\|\,.$$

Funkcija F je neprekidna, jer su f_i' neprekidne funkcije, a kako je I^n kompaktan, to je F i uniformno neprekidna. Zbog toga

$$\exists \delta > 0 \text{ takav da } \forall P, Q \in I^n,\ d(P,Q) < \delta \Longrightarrow |F(P) - F(Q)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\,. \tag{5}$$

Kako je $V(f) = \sup\{V(f,\rho) : \rho \in \rho(I)\}$, postoji razdioba $\rho' \in \rho(I)$ takva da je

$$V(f) - V(f,\rho') < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{6}$$

Budući da je funkcija $\|f'\|$ integrabilna na I, postoji subdivizija

$$\rho = \{\, a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k(\rho)} = b \,\}$$

segmenta I takva da je

$$|t_j - t_{j-1}| < \frac{\delta}{\sqrt{n}}\,, \quad j = 1, 2, \dots, k(\rho) \tag{7}$$

i da za pripadne Darbouxove sume vrijedi

$$S(\|f'\|, \rho) - s(\|f'\|, \rho) < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{8}$$

Osim toga, razdiobu ρ možemo odabrati tako da profinjuje ρ', pa zbog $V(f,\rho') \leq V(f,\rho) \leq V(f)$ i (6) vrijedi i

$$V(f) - V(f,\rho) < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{9}$$

Primijenimo Lagrangeov teorem srednje vrijednosti na funkcije $f_1, \dots, f_n$, i to na svaki od segmenata $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, k(\rho)$. Zaključujemo da postoje brojevi $\tau_j^i \in \langle t_{j-1}, t_j \rangle$, $j = 1, \dots, k(\rho)$, $i = 1, \dots, n$, takvi da vrijedi

$$f_i(t_j) - f_i(t_{j-1}) = f_i'(\tau_j^i)(t_j - t_{j-1})\,, \quad j = 1, \dots, k(\rho)\,,\ i = 1, \dots, n\,. \tag{10}$$

Označimo s $P_j := (\tau_j^1, \tau_j^2, \dots, \tau_j^n)$ i $Q_j := (\tau_j^1, \tau_j^1, \dots, \tau_j^1)$ točke iz I^n, $j = 1, \dots, k(\rho)$. Tada je

$$d(P_j, Q_j) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\tau_j^i - \tau_j^1)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta^2}{n}} = \delta\,, \quad j = 1, \dots, k(\rho)\,. \tag{11}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
V(f,\rho) &= \sum_{j=1}^{k(\rho)} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \\
&= \sum_{j=1}^{k(\rho)} \big\|\big(f_1(t_j) - f_1(t_{j-1}), \dots, f_n(t_j) - f_n(t_{j-1})\big)\big\| \\
&\overset{(10)}{=} \sum_{j=1}^{k(\rho)} \big\|\big(f_1'(\tau_j^1)\big)(t_j - t_{j-1}), \dots, f_n'(\tau_j^n)(t_j - t_{j-1})\big)\big\| \\
&= \sum_{j=1}^{k(\rho)} \big\|\big(f_1'(\tau_j^1), \dots, f_n'(\tau_j^n)\big)\big\| \cdot |t_j - t_{j-1}| = \sum_{j=1}^{k(\rho)} F(P_j)(t_j - t_{j-1})\,.
\end{aligned} \tag{12}$$

Nadalje, broj

$$\begin{aligned}
\sigma &:= \sum_{j=1}^{k(\rho)} F(Q_j)(t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^{k(\rho)} \big\|\big(f_1'(\tau_j^1), \dots, f_n'(\tau_j^1)\big)\big\|\,(t_j - t_{j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{k(\rho)} \big\|f'(\tau_j^1)\big\| \cdot (t_j - t_{j-1})\,, \quad \tau_j^1 \in [t_{j-1}, t_j]
\end{aligned} \tag{13}$$

je integralna suma za funkciju $\|f'\|$, tj. $\sigma = \sigma(\|f'\|, \rho; \tau_1^1, \tau_2^1, \dots, \tau_{k(\rho)}^1)$, pa je

$$\Big|\sigma - \int_a^b \|f'(t)\|\,dt\Big| \le S\big(\|f'\|, \rho\big) - s\big(\|f'\|, \rho\big) \overset{(8)}{\le} \frac{\varepsilon}{3}\,, \tag{14}$$

jer je

$$s\big(\|f'\|, \rho\big) \le \quad \sigma\,, \int_a^b \|f'(t)\|\,dt \quad \le S\big(\|f'\|, \rho\big)\,.$$

Osim toga je prema (12) i (13)

$$
\begin{aligned}
|V(f,\rho)-\sigma| &\le \sum_{j=1}^{k(\rho)} \big|F(P_j)-F(Q_j)\big|\,(t_j-t_{j-1}) \overset{(11),(5)}{<} \\
&< \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \sum_{j=1}^{k(\rho)} (t_j-t_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{3}\,. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Zbog toga je prema (9), (15) i (14)

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= \Big|V(f) - \int_a^b \|f'(t)\|\,dt\Big| \le \\
&\le \underbrace{|V(f)-V(f,\rho)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|V(f,\rho)-\sigma|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\Big|\sigma - \int_a^b \|f'(t)\|\,dt\Big|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon\,,
\end{aligned}
$$

što je kontradikcija. ∎

Funkcije kojima ćemo se služiti često neće biti klase C^1 na čitavom segmentu $[a,b]$, ali će biti po dijelovima glatke. Pritom, kao i prije u definiciji 23.2, za neprekidnu funkciju $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ kažemo da je ***po dijelovima glatka*** ili ***po dijelovima klase*** C^1, ako postoje točke $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ takve da restrikcije $f\big|_{[t_{j-1},\,t_j]}$ imaju neprekidnu derivaciju za sve $j = 1,\ldots,k$, s tim da smije biti $\big(f\big|_{[t_{j-1},\,t_j]}\big)'(t_j) \neq \big(f\big|_{[t_j,\,t_{j+1}]}\big)'(t_j)$ (radi se, naravno, o odgovarajućim jednostranim derivacijama, tj. uz oznake kao na stranici 2, $f'(t_j-) \neq f'(t_j+)$).

Koristeći se „po dijelovima" prethodnim teoremom i činjenicom da konačan skup ne utječe na integral, dobivamo

Korolar 28.4 *Svaka po dijelovima glatka funkcija* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *je funkcija ograničene varijacije i njezina totalna varijacija jednaka je* $V(f) = \int_a^b \|f'(t)\|\,dt$.

Dokaz: Prema prethodnom teoremu 28.3, restrikcije $f\big|_{[t_{j-1},\,t_j]}$ su funkcije omeđene varijacije i vrijedi $V\big(f\big|_{[t_{j-1},\,t_j]}\big) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\|\,dt$. Tvrdnja sada slijedi indukcijom iz „aditivnosti" totalne varijacije, propozicija 28.2(*iv*), i aditivnosti integrala. ∎

Napomena 28.1 U teoremu 28.3 *nije* dovoljno da je f neprekidna na $[a,b]$ i (čak neprekidno) diferencijabilna na $\langle a,b\rangle$. Naprimjer, funkcija f iz primjera 28.1(ii) na stranici 45, je neprekidna funkcija na $[0,1]$ koja *nije* funkcija omeđene varijacije, iako je derivacija $f'(t) = \cos\frac{\pi}{2t} + \frac{\pi}{2t}\sin\frac{\pi}{2t}$ neprekidna funkcija na $\langle 0,1]$.

Uvjeti na funkciju f u teoremu 28.3 mogu se ipak oslabiti. Dovoljno je da je funkcija f neprekidna i da ima *omeđenu* derivaciju na $\langle a,b\rangle$ (što funkcija iz upravo spomenutog primjera nema). Može se naime pokazati, da ako je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija koja ima omeđenu derivaciju na $\langle a,b\rangle$, onda je f' R-integrabilna na $[a,b]$ (bez obzira na to jesu li i kako definirani $f'(a)$ i $f'(b)$) i vrijedi $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$.

To je u vezi s tipom prekida koje može imati derivacija neprekidne funkcije, i onda R-integrabilnost funkcije s takvim tipom prekida. Naime, derivacija f' neprekidne funkcije f na segmentu, može imati samo prebrojivo mnogo prekida, i to su „skokovi". Kako je prebrojiv skup mjere nula, to je po Lebesgueovoj karakterizaciji R-integrabilnosti, f' integrabilna.

Dokažimo na kraju još jednu činjenicu koju ćemo poslije trebati.

Propozicija 28.5 *Neka su $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ i $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ funkcije takve da postoji monotona bijekcija $\varphi\colon [a,b] \to [c,d]$ sa svojstvom da je $f = g\circ\varphi$. Ako je g funkcija omeđene varijacije, onda je i f funkcija omeđene varijacije i vrijedi $V(f,[a,b]) = V(g,[c,d])$.*

Dokaz: Svaka monotona bijekcija $\varphi\colon [a,b] \to [c,d]$ je strogo monotona. Pretpostavimo da je φ *rastuća* i neka je

$$\rho = \{\, a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k(\rho)} = b \,\}$$

proizvoljna razdioba segmenta $[a,b]$. Označimo li s $u_j := \varphi(t_j) \in [c,d]$, $j = 1,\ldots,k(\rho)$, dobivamo razdiobu

$$\rho' = \{\, c = u_0 < u_1 < \cdots < u_{k(\rho')} = d \,\}\,, \quad k(\rho') = k(\rho)$$

segmenta $[c,d]$. Tada je

$$\begin{aligned} V(f,\rho) &= \sum_{j=1}^{k(\rho)} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| = \sum_{j=1}^{k(\rho)} \big\|g\big(\varphi(t_j)\big) - g\big(\varphi(t_{j-1})\big)\big\| \\ &= \sum_{j=1}^{k(\rho')} \|g(u_j) - g(u_{j-1})\| = V(g,\rho') \le V(g,[c,d])\,. \end{aligned}$$

Stoga je i f funkcija omeđene varijacije i vrijedi $V(f,[a,b]) \le V(g,[c,d])$.

Funkcija $\varphi^{-1}\colon [c,d] \to [a,b]$ je također monotona, i to rastuća, bijekcija, i vrijedi $g = f\circ\varphi^{-1}$, pa se na isti način pokazuje da je i $V(g,[c,d]) \le V(f,[a,b])$, odakle dobivamo tvrdnju teorema.

U slučaju kad je funkcija φ strogo padajuća, postupa se slično, uz oznake $u_j := \varphi(t_{k(\rho)-j})$, $j = 1,\dots,k(\rho)$. ■

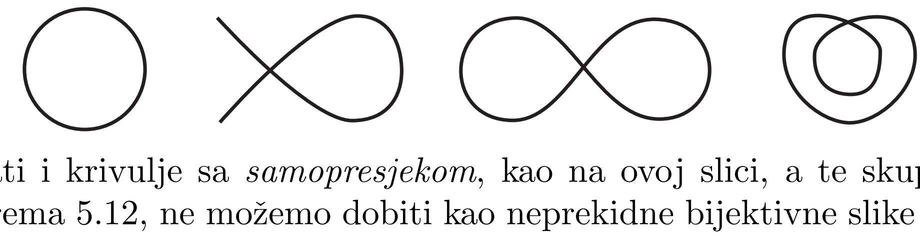
§ 29 Krivulje u $\mathbb{R}^n$ i njihova duljina

U ovom ćemo paragrafu dosta pažnje, možda i više nego što je potrebno, posvetiti pojmu krivulje. To radimo zato da ilustriramo kako je i tako „jednostavan" pojam, važan za analizu, vrlo delikatan.

Na prvi pogled izgleda „jasno" što smatramo krivuljom u $\mathbb{R}^2$ ili $\mathbb{R}^3$. No pomnijom se analizom odmah vidi da stvar nije nimalo „jasna" niti naivna. Intuitivno bismo pod pojmom krivulje htjeli smatrati skup koji možemo „nacrtati u jednom potezu". Preciznije bismo to vjerojatno definirali kao skup koji se može dobiti kao neprekidna slika nekog segmenta.

To međutim nije dobro jer, naprimjer, postoje neprekidne surjekcije segmenta *na* (puni) dvodimenzionalni pravokutnik, ili na trodimenzionalnu kocku i slično, a takve skupove sigurno ne želimo zvati krivuljama! (Prvo takvo preslikavanje našao je G. Peano[1] 1890. godine). Štoviše, svaki je kompaktan, povezan, lokalno povezan metrički prostor, neprekidna slika segmenta (Hahn[2]-Mazurkiewiczev[3] teorem).

Naravno, Peanovo preslikavanje ne može biti i injektivno (dakle bijekcija), jer bi tada, prema teoremu 5.12, segment i pravokutnik bili homeomorfni. Ipak, ne možemo se olako ograničiti samo na injektivna preslikavanja jer želimo



promatrati i krivulje sa *samopresjekom*, kao na ovoj slici, a te skupove, opet zbog teorema 5.12, ne možemo dobiti kao neprekidne bijektivne slike segmenta. Osim ovih, postoje i neke druge poteškoće, ne odmah uočljive.

[1]Giuseppe Peano (1858–1932), talijanski matematičar
[2]Hans Hahn (1879–1934), austrijski matematičar
[3]Stefan Mazurkiewicz (1888–1945), poljski matematičar

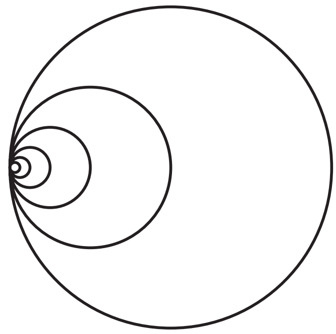
Definicija 29.1 Za skup $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da ***dopušta parametrizaciju*** ili da je ***parametrizabilan*** ako postoji neprekidna surjekcija $\gamma\colon [a,b] \twoheadrightarrow \Gamma$ takva da je ***singularni skup***

$$S(\gamma) := \big\{ t \in [a,b] : \gamma^{\leftarrow}\big(\gamma(t)\big) \neq \{t\} \big\}$$

konačan. Par (Γ, γ) nazivamo ***parametriziranim skupom***.

Ova definicija će za naše potrebe biti dovoljno općenita, iako ne uključuje naravno sve skupove koje bismo možda željeli. Jedan takav skup je i *havajska naušnica*

$$\mathbf{H} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ (x,y) : \big(x - \tfrac{1}{n}\big)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 .$$

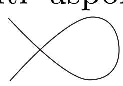


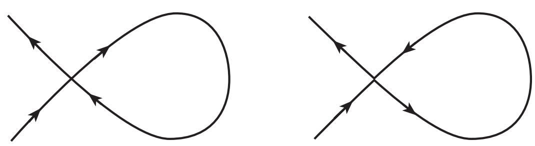
Definicija 29.2 Za dvije parametrizacije $\gamma\colon [a,b] \twoheadrightarrow \Gamma$, $\eta\colon [c,d] \twoheadrightarrow \Gamma$ kažemo da su ***usporedive*** ako postoji monotona (bilo rastuća bilo padajuća) bijekcija $\varphi\colon [a,b] \to [c,d]$ takva da je $\gamma = \eta \circ \varphi$.

Napomena 29.1

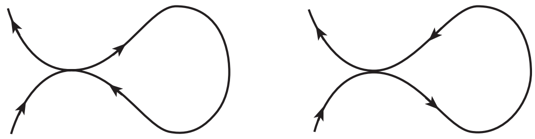
(*i*) Bijekcija φ iz prethodne definicije nužno je strogo monotona i neprekidna. Stroga monotonost slijedi iz injektivnosti, a neprekidnost iz činjenice da monotona funkcija u točki u kojoj nije neprekidna mora imati *skok*, pa slika segmenta $[a,b]$ ne bi bio čitav segment $[c,d]$.

(*ii*) Bijekcija φ takva da je $\gamma = \eta \circ \varphi$, ako postoji, jedinstvena je. Zaista, γ i η su bijekcije osim eventualno na konačnim skupovima, pa je $\varphi = \eta^{-1} \circ \gamma$ na gustom podskupu segmenta $[a,b]$. Jedinstvenost sada slijedi iz činjenice da ako se dvije neprekidne realne funkcije podudaraju na gustom skupu, onda su jednake, korolar 2.12.

(*iii*) Općenito parametrizacije nekog skupa ne moraju biti usporedive, iako je skup Γ „lijep". Naprimjer, parametrizacije skupa  sugerirane slikama



nisu usporedive. Tu ne pomaže niti diferencijabilnost:



(*iv*) Usporedive parametrizacije koje su vezane rastućom funkcijom φ, uvijek su algebarski ekvivalentne u smislu definicije 26.1, ali ne i obratno, jer algebarski ekvivalentni putevi, pa čak niti kad je jedan dobiven dopuštenom promjenom drugog, ne moraju biti vezani bijekcijom.

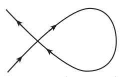
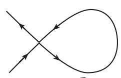
Jednostavno se dokazuje sljedeća činjenica:

Propozicija 29.1 *Usporedivost je relacija ekvivalencije na skupu svih parametrizacija parametrizabilnog skupa* Γ*.* ∎

Klase ekvivalencije usporedivih parametrizacija označivat ćemo slovima $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, … , a klasu određenu parametrizacijom γ s $\mathcal{G} = [\gamma]$.

Definicija 29.3 ***Krivulja*** u $\mathbb{R}^n$ je uređen par $(\Gamma, \mathcal{G})$ koji se sastoji od parametrizabilnog skupa $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ i neke klase $\mathcal{G}$ usporedivih parametrizacija. Svaku parametrizaciju $\gamma \in \mathcal{G}$ zvat ćemo parametrizacijom krivulje $(\Gamma, \mathcal{G})$.

Očito je $\Gamma = \gamma^\clubsuit$ za svaku parametrizaciju $\gamma \in \mathcal{G}$:

Dakle krivulje  i  smatramo različitim, iako je skup Γ isti, tj. isti skup Γ može određivati različite krivulje. U praksi ćemo često govoriti jednostavno o krivulji Γ, iako to podrazumijeva i neki izbor klase usporedivih parametrizacija.

Postoje međutim situacije kad je krivulja jednoznačno određena skupom Γ, tj. kad su svake dvije parametrizacije usporedive. O tome govori

Teorem 29.2 *Neka je* $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ *parametrizabilan skup. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(*i*) *Svake dvije parametrizacije skupa* Γ *su usporedive.*

(*ii*) *Postoji parametrizacija* γ *skupa* Γ *koja je injekcija, tj.* $S(\gamma) = \emptyset$*.*

(*iii*) *Svaka parametrizacija* γ *skupa* Γ *je injekcija, tj.* $S(\gamma) = \emptyset$*.*

Primijetimo da je $S(\gamma) = \emptyset$ ako i samo ako je γ bijekcija, dakle i homeomorfizam.

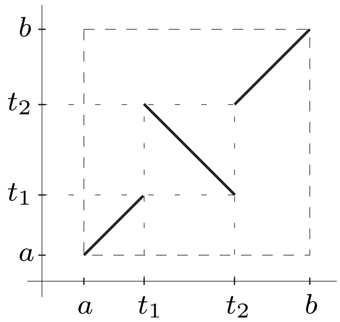
Dokaz:

$\boxed{(i)\Rightarrow(iii)}$ Neka je $\gamma\colon [a,b] \twoheadrightarrow \Gamma$ parametrizacija takva da je $S(\gamma) \neq \emptyset$, i neka su $t_1, t_2 \in [a,b]$ takvi da je $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, i neka je $t_1 < t_2$.

1. slučaj: $a < t_1 < t_2 \leq b$ ili $a \leq t_1 < t_2 < b$

Neka je funkcija $\varphi\colon [a,b] \to [a,b]$ definirana s

$$\varphi(t) := \begin{cases} t & , a \leq t < t_1 \\ t_1 + t_2 - t & , t_1 \leq t < t_2 \\ t & , t_2 \leq t \leq b \end{cases}$$



i neka je $\eta\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ definirana s

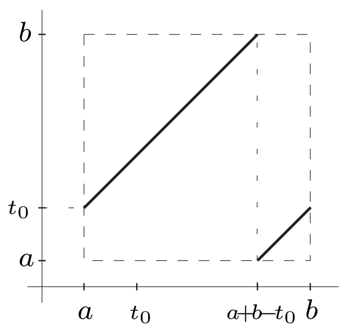
$$\eta(t) := \begin{cases} \gamma(t) & , a \leq t \leq t_1 \\ \gamma(t_1 + t_2 - t) & , t_1 \leq t \leq t_2 \\ \gamma(t) & , t_2 \leq t \leq b\,. \end{cases}$$

Tada je $\eta = \gamma \circ \varphi$, a kako je $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, to je prema definiciji, η neprekidna parametrizacija skupa Γ. Kako je s druge strane $\eta = \gamma \circ \varphi$ i φ nije monotona (zbog $a \neq t_1$ ili $t_2 \neq b$), to su γ i η dvije neusporedive parametrizacije skupa Γ (funkcija φ koja povezuje γ i η je jedinstvena!), što je u suprotnosti s (i).

2. slučaj: $t_1 = a$ i $t_2 = b$

Odaberimo $t_0 \in \langle a, b\rangle$, i definirajmo funkciju $\varphi\colon [a,b] \to [a,b]$ s

$$\varphi(t) := \begin{cases} t + t_0 - a & , a \leq t < a + b - t_0 \\ t + t_0 - b & , a + b - t_0 \leq t \leq b\,, \end{cases}$$



i neka je funkcija $\eta\colon [a,b] \twoheadrightarrow \Gamma$ definirana s $\eta := \gamma \circ \varphi$, tj.

$$\eta(t) := \begin{cases} \gamma(t + t_0 - a) & , a \leq t \leq a + b - t_0 \\ \gamma(t + t_0 - b) & , a + b - t_0 \leq t \leq b\,. \end{cases}$$

Kako je $\gamma(a) = \gamma(b)$, to je funkcija η neprekidna. Međutim, kako φ nije monotona funkcija, to γ i η nisu usporedive parametrizacije skupa Γ, što je u suprotnosti s (i). $\square$

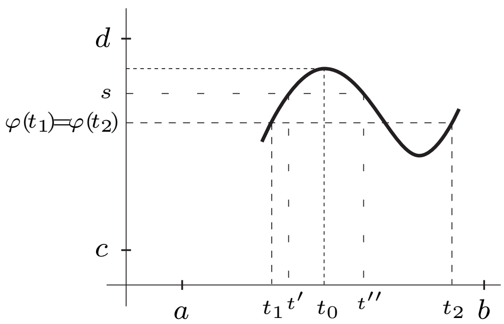
$\boxed{(iii)\Rightarrow(ii)}$ trivijalno $\square$

$\boxed{(ii)\Rightarrow(i)}$ Neka je $\eta\colon [c,d] \twoheadrightarrow \Gamma$ parametrizacija skupa Γ za koju je singularni skup prazan, $S(\eta) = \emptyset$. To znači da je η neprekidna bijekcija segmenta $[c,d]$ na skup Γ, a kako je segment kompaktan, to je i inverzna funkcija $\eta^{-1}\colon \Gamma \to [c,d]$ neprekidna, teorem 5.12.

Neka je sada $\gamma\colon [a,b] \twoheadrightarrow \Gamma$ proizvoljna parametrizacija skupa Γ. Definirajmo $\varphi := \eta^{-1} \circ \gamma\colon [a,b] \to [c,d]$. Funkcija φ je neprekidna surjekcija segmenta $[a,b]$ na $[c,d]$ i $S(\varphi) = S(\gamma)$ (jer je η^{-1} bijekcija), dakle konačan skup.

Tvrdnja: $S(\varphi) = \emptyset$.

Pretpostavimo da postoje $t_1 < t_2$ takvi da je $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$. Skup $\varphi\big([t_1,t_2]\big)$, kao kompaktan i povezan podskup od $\mathbb{R}$, ili je jedna točka ili je segment. Ako je točka, onda je $[t_1,t_1] \subseteq S(\varphi)$ što se protivi činjenici da je $S(\varphi)$ konačan skup.



Neka je dakle $\varphi\big([t_1,t_2]\big) =: [\alpha,\beta]$ i neka je, naprimjer, $\varphi(t_1) < \beta$. Neka je $t_0 \in \langle t_1,t_2\rangle$ takav da je $\varphi(t_0) = \beta$. Tada je zbog neprekidnosti od φ i povezanosti segmenta, $[\varphi(t_1),\beta] \subseteq \varphi\big([t_1,t_0]\big)$ i $[\varphi(t_2),\beta] \subseteq \varphi\big([t_0,t_2]\big)$, pa za svaki $s \in [\varphi(t_1),\beta] = [\varphi(t_2),\beta]$ postoje $t'(s) \in [t_1,t_0]$ i $t''(s) \in [t_0,t_2]$ takvi da je $\varphi\big(t'(s)\big) = \varphi\big(t''(s)\big)$. Kako za $s_1 \neq s_2$ vrijedi $t'(s_1) \neq t'(s_2)$ i $t''(s_1) \neq t''(s_2)$, zaključujemo da je singularni skup $S(\varphi)$ beskonačan, što je u suprotnosti s prije ustanovljenom činjenicom da je skup $S(\varphi)$ konačan. Time je tvrdnja dokazana.

Slično se zaključuje i u slučaju kada je $\varphi(t_1) > \alpha$.

Kako je, dakle, $S(\varphi) = \emptyset$, to je $\varphi\colon [a,b] \to [c,d]$ neprekidna bijekcija, dakle i monotona funkcija. Budući da je $\gamma = \eta \circ \varphi$, to su parametrizacije γ i η usporedive. ■

Definicija 29.4 Parametrizabilan skup $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ koji zadovoljava neki, a onda i svaki, od uvjeta u prethodnom teoremu 29.2, zvat ćemo ***jednostavna krivulja s rubom*** ili ***Jordanov luk***. Točke $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$ zovu se ***rubne točke*** luka Γ.

Korolar 29.3 *Skup $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ je Jordanov luk ako i samo ako postoji neprekidna bijekcija $\gamma\colon [a,b] \to \Gamma$, tj. zbog kompaktnosti, Γ je homeomorfna slika segmenta.* ■

Definicija 29.5 Za krivulju $(\Gamma, \mathcal{G})$ kažemo da je ***zatvorena*** ako je $\gamma(a) = \gamma(b)$ za neku parametrizaciju $\gamma \in \mathcal{G}$. Krivulja $(\Gamma, \mathcal{G})$ je ***jednostavno zatvorena krivulja*** ako je zatvorena i nema samopresjeka, tj. ako za neku parametrizaciju $\gamma \in \mathcal{G}$ vrijedi $\gamma(a) = \gamma(b)$, a za sve $t, s \in \langle a, b\rangle$ je $\gamma(t) \neq \gamma(s) \neq \gamma(a)$.

Zatvorena krivulja je, dakle, uvijek trag nekog zatvorenog puta, a jednostavno zatvorena krivulja je trag jednostavno zatvorenog puta (vidi definicije na stranicama 6 i 37).

Iz jednostavnih topoloških razmatranja slijedi da ako je $(\Gamma, [\gamma])$ zatvorena krivulja, onda je i $(\Gamma, [\eta])$ zatvorena krivulja, bez obzira na to jesu li parametrizacije γ i η usporedive ili ne.

Ako je $(\Gamma, \mathcal{G})$ jednostavno zatvorena krivulja i $P_0 := \gamma(a) = \gamma(b)$ za neku parametrizaciju γ skupa Γ, onda su sve parametrizacije $\eta\colon [c,d] \twoheadrightarrow \Gamma$ za koje je $\eta(c) = \eta(d) = P_0$ usporedive s γ. Dakle, jednostavno zatvorene krivulje određene skupom Γ razlikuju se jedino u izboru „početne" točke P_0, pa obično već sâm skup Γ zovemo jednostavno zatvorenom krivuljom. Jednostavno zatvorena krivulja je isto što i homeomorfna slika kružnice.

Kažimo nešto i o pojmu orijentacije krivulje. Neka je $(\Gamma, [\gamma])$ neka krivulja u $\mathbb{R}^n$. Sve parametrizacije $\eta\colon [c,d] \twoheadrightarrow \Gamma$ koje određuju istu krivulju, tj. $(\Gamma, [\eta]) = (\Gamma, [\gamma])$, usporedive su s $\gamma\colon [a,b] \twoheadrightarrow \Gamma$, dakle postoji monotona bijekcija $\omega\colon [a,b] \to [c,d]$ takva da je $\gamma = \eta \circ \omega$. Funkcija ω može biti rastuća ili padajuća.

Definicija 29.6 Za parametrizacije γ i η skupa Γ kažemo da ***određuju istu orijentaciju*** ili da su ***orijentirano ekvivalentne*** ako postoji rastuća bijekcija $\omega\colon [a,b] \to [c,d]$ takva da je $\gamma = \eta \circ \omega$.

Jasno je da su parametrizacije koje određuju istu orijentaciju nužno usporedive. Stoga se svaka klasa međusobno usporedivih parametrizacija raspada na potklase orijentirano ekvivalentnih parametrizacija.

Neka je $\omega_0\colon [a,b] \to [a,b]$ funkcija definirana s $\omega_0(t) := a + b - t$. Tada je ω_0 padajuća bijekcija, pa parametrizacije γ i $\gamma \circ \omega_0$ skupa Γ nisu orijentirano ekvivalentne, iako jesu usporedive. S druge strane, jasno je da je svaka parametrizacija $\eta\colon [c, d] \twoheadrightarrow \Gamma$ skupa Γ koja je usporediva s γ, orijentirano ekvivalentna ili s γ ili s $\gamma \circ \omega_0$. Stoga se svaka klasa međusobno usporedivih parametrizacija skupa Γ raspada na točno dvije potklase koje određuju istu orijentaciju. Svaku od tih potklasa $\mathcal{G}_o$ zvat ćemo ***orijentacijom*** krivulje $(\Gamma, \mathcal{G})$, a par $(\Gamma, \mathcal{G}_o) := \big((\Gamma, \mathcal{G}), \mathcal{G}_o\big)$ koji se sastoji od krivulje $(\Gamma, \mathcal{G})$ i jedne od dviju klasa orijentacije, zovemo ***orijentiranom krivuljom***.

Napomena 29.2

(*i*) Kako $\mathcal{G}_o$ određuje $\mathcal{G}$, to je dovoljna oznaka $(\Gamma, \mathcal{G}_o)$. Često se orijentirana krivulja označuje s $\widehat{\Gamma}$.

(*ii*) Općenito se za krivulju u $\mathbb{R}^n$ ne može reći da je pozitivno ili negativno orijentirana, već samo određuju li dvije parametrizacije istu ili suprotnu orijentaciju.

Dosad smo se bavili pitanjima vezanim za poteškoće koje dolaze od samopresjeka krivulje. Sada ćemo se pozabaviti pitanjima vezanim za kvalitetu funkcije γ koja parametrizira krivulju.

Može li se na „razuman" način definirati pojam *duljine krivulje*? Najjednostavnije je da zadanu krivulju Γ aproksimiramo poligonalnom crtom, čiju duljinu znamo iz elementarne geometrije, pa za približnu duljinu krivulje Γ uzmemo duljinu poligonalne aproksimacije. Očekivati je da ako uzmemo sve bolje i bolje aproksimacije, da će duljine tih poligonalnih aproksimacija konvergirati nekom broju, koji ćemo onda nazvati duljinom krivulje Γ.

Krivulju možemo na različite načine aproksimirati poligonalnom crtom. Jedan način je da na krivulji odaberemo konačno mnogo točaka $P_0, P_1, \ldots, P_k$ (prateći „uređaj" na Γ) i da susjedne spojimo segmentima.

Neka je $\gamma\colon [a, b] \twoheadrightarrow \Gamma$ neka parametrizacija. Odaberimo točke $t_j \in [a, b]$ tako da je $\gamma(t_j) = P_j$, $j = 0, \ldots, k$. Kako je singularni skup $S(\gamma)$ konačan, a točke P_j su odabrane tako da „prate uređaj" na Γ određen parametrizacijom γ, to je brojeve t_j moguće odabrati tako da je $t_{j-1} < t_j$, $j = 1, \ldots, k$, tj. imamo razdiobu

$$\rho = \{\, a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b \,\}$$

segmenta $[a, b]$.

Obratno, svaka razdioba $\rho \in \rho([a, b])$ definira jednu poligonalnu crtu određenu točkama $\gamma(t_j)$, $j = 0, \ldots, k(\rho)$, koja aproksimira krivulju Γ.

Duljina aproksimirajuće poligonalne crte jednaka je zbroju

$$\sum_{j=1}^{k(\rho)} \|P_j - P_{j-1}\| = \sum_{j=1}^{k(\rho)} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| = V(\gamma, \rho)\,.$$

Uvođenju novih točaka na krivulji Γ odgovara uzimanje profinjenja razdiobe ρ, pa je razumno definirati duljinu krivulje Γ kao totalnu varijaciju $V(\gamma)$ parametrizacije γ.

Kako je, općenito, parametrizacija γ samo neprekidna funkcija s konačnim singularnim skupom, to njezina totalna varijacija može i ne postojati, tj. može „biti beskonačna", pa je ovakav pristup pojmu duljine krivulje zaista dobar samo u slučaju kada dobivamo konačne vrijednosti (naše krivulje su uvijek kompaktni skupovi!). Točnije

Definicija 29.7 Za krivulju $(\Gamma, \mathcal{G})$ kažemo da je ***rektifikabilna*** ili da ***ima duljinu*** ako postoji njezina parametrizacija koja je funkcija ograničene varijacije. U tom se slučaju definira ***duljina krivulje***, u oznaci $\ell(\Gamma)$, kao totalna varijacija bilo koje njezine parametrizacije.

Ova definicija je dobra, tj. niti pojam rektifikabilnosti niti pojam duljine ne ovise o učinjenim izborima parametrizacija. Naime, prema propoziciji 28.5, ako su γ i η dvije parametrizacije krivulje $(\Gamma, \mathcal{G})$, onda ili su obje funkcije omeđene varijacije i njihove totalne varijacije su jednake, ili niti jedna nije funkcija omeđene varijacije.

Napomena 29.3 Može se pokazati da ako su $(\Gamma, \mathcal{G}_1)$ i $(\Gamma, \mathcal{G}_2)$ dvije krivulje s istim „nosećim" parametrizabilnim skupom Γ, onda rektifikabilnost jedne od njih implicira i rektifikabilnost druge, i u tom su slučaju njihove duljine jednake. Stoga su definicijom 29.7 zapravo definirani rektifikabilnost i duljina parametrizabilnog skupa. To je već i anticipirano oznakom $\ell(\Gamma)$ umjesto $\ell(\Gamma, \mathcal{G})$, što bi bilo ispravnije.

Primjenom propozicije 28.2, neposredno dobivamo

Korolar 29.4

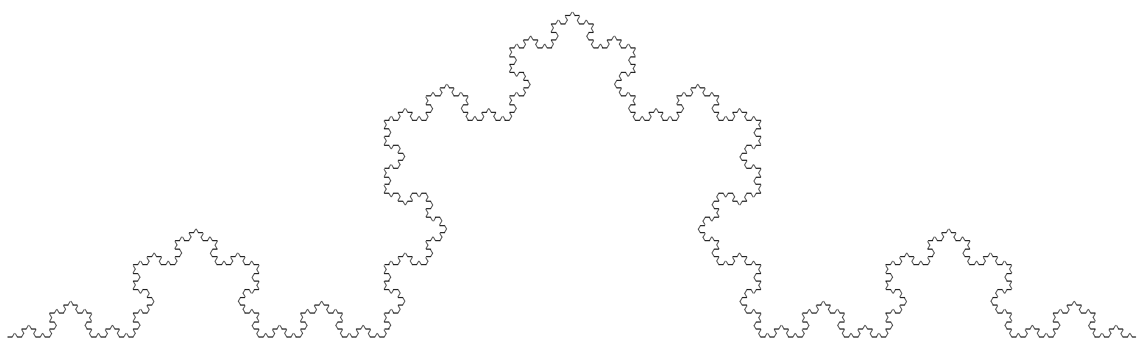
(i) *Ako je krivulja Γ rastavljena na konačno mnogo krivulja $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, tj. $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i$, tako da je presjek $\Gamma_i \cap \Gamma_j$ konačan skup, za sve $i \neq j$, tada* *je* Γ *rektifikabilna ako i samo ako su sve* Γ_i *rektifikabilne krivulje, i u tom je slučaju* $\ell(\Gamma) = \sum_{i=1}^{k} \ell(\Gamma_i)$.

(*ii*) *Ako je* Γ *rektifikabilna krivulja u* $\mathbb{R}^n$, $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *izometrija i* $\alpha \in \mathbb{R}$ *realan broj, onda su i* $u(\Gamma)$ *i* $\alpha\Gamma := \{\alpha P : P \in \Gamma\}$ *rektifikabilne krivulje, i vrijedi*

$$\begin{aligned} \ell\big(u(\Gamma)\big) &= \ell(\Gamma) \\ \ell(\alpha\Gamma) &= |\alpha|\,\ell(\Gamma)\,. \end{aligned}$$ ■

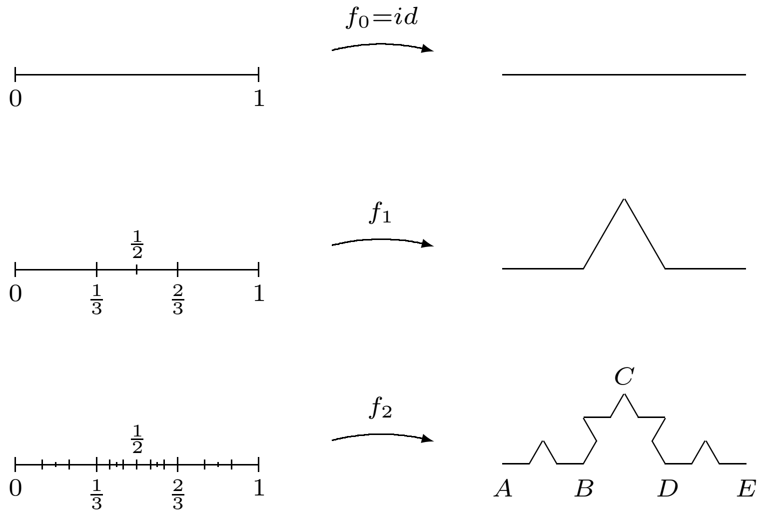
Nerektifikabilnost neke krivulje Γ nije posljedica samopresjeka. Iako na prvi pogled nerektifikabilne krivulje mogu izgledati kao artificijelne izmišljotine, one se prirodno pojavljuju u mnogim disciplinama, i u svakidašnjem životu (morska obala, oblaci, Brownovo gibanje, fluktuacija cijena dionica na burzi, ...).

Primjer 29.1 Često citiran fraktalni skup je takozvana ***Kochova***[1] ***krivulja***, koja je primjer nerektifikabilnog Jordanova luka. Konstrukcija krivulje teče ovako: početni segment podijeli se na tri dijela, te se srednja trećina zamijeni s ostale dvije stranice nad tom trećinom konstruiranoga jednakostraničnog trokuta. Konstrukcija se ponovi nad svakim od dobivena četiri segmenta, zatim nad svakim od tako dobivenih šesnaest segmenata, itd. Na limesu se dobije Kochova krivulja $\mathbf{K}$. (Slika prikazuje petu fazu konstrukcije.)



Da se zaista radi o Jordanovu luku, pokazat ćemo tako da nađemo jednu parametrizaciju skupa $\mathbf{K}$. U tu svrhu promotrimo niz po dijelovima linearnih funkcija sugeriranih sljedećim crtežima:

[1] Niels Fabian Helge von Koch (1870–1924), švedski matematičar



Pokažimo da je taj limes $f := \lim_n f_n$ neprekidna funkcija. Zbog potpunosti prostora $C([0,1],\mathbb{R}^2)$ neprekidnih funkcija sa segmenta $[a,b]$ u $\mathbb{R}^2$, vidi korolar 4.17, dovoljno je pokazati da je niz $(f_n)_n$ Cauchyjev s obzirom na sup-normu definiranu s $\|g\| := \sup\{\|g(t)\| : t \in [0,1]\}$, pa će uniformno konvergirati, a kako su f_n neprekidne funkcije, i limes f će biti neprekidna funkcija.

S crteža se neposredno vidi da je

$$\|f_1 - f_0\| = \frac{\sqrt{3}}{6}\,.$$

U idućem koraku stvar se ponavlja s faktorom $\frac{1}{3}$, pa je

$$\|f_2 - f_1\| = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\|f_3 - f_2\| = \frac{1}{3^2}\frac{\sqrt{3}}{6}$$

i općenito

$$\|f_{i+1} - f_i\| = \frac{1}{3^i}\frac{\sqrt{3}}{6}\,.$$

Stoga za čvrst k i proizvoljan $j \in \mathbb{N}$ imamo

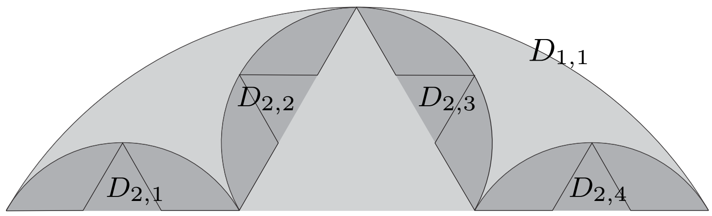
$$\begin{aligned}\|f_{k+j} - f_k\| &= \|f_{k+1} - f_k\| + \|f_{k+2} - f_{k+1}\| + \cdots + \|f_{k+j} - f_{k+j-1}\| \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}\Big(\frac{1}{3^k} + \frac{1}{3^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{3^{k+j-1}}\Big) < \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{1}{3^k}\Big(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots\Big) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{1}{3^k}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{3^k}\,,\end{aligned}$$

pa je niz $(f_n)_n$ Cauchyjev.

Dakle, $f = \lim_n f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ je neprekidna funkcija kojoj je slika Kochova krivulja $\mathbf{K}$. Uz malo elementarne geometrije, pokazat ćemo da je f injekcija, dakle bijekcija na sliku, pa je $\mathbf{K}$ jednostavna krivulja s rubom, tj. Jordanov luk.

Zaista, sve funkcije f_n su injekcije. Sâma ta činjenica nije međutim dovoljna da osigura i injektivnost granične funkcije f. Zato razmišljamo ovako:

Promotrimo prvi korak konstrukcije Kochove krivulje, tj. sliku funkcije f_1. Ona je sadržana u kružnom odsječku određenom krajevima početnog segmenta $[0,1]$ i trećim vrhom jednakostraničnog trokuta konstruiranog nad srednjom trećinom tog segmenta. Nazovimo taj odsječak $D_{1,1}$, a s $\rho_1 := \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$ označimo skup točaka čije su slike šiljci $\big\{(0,0),\ (\frac{1}{3},0),\ (\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6}),\ (\frac{2}{3},0),\ (1,0)\big\}$ slike $f_1([0,1])$. U drugom koraku konstrukcije, f_2 preslikava svaki dio segmenta $[0,1]$ određenog razdiobom ρ_1, u kružni odsječak nad jednim od četiri segmenta koji čine $f_1([0,1])$ i koji je određen trećim vrhom jednakostraničnog trokuta konstruiranog nad srednjom trećinom tog segmenta. Označimo te (zatvorene) kružne odsječke s $D_{2,1}$, $D_{2,2}$, $D_{2,3}$, $D_{2,4}$. Svi su oni sadržani u $D_{1,1}$.



Nije teško vidjeti da su središnji kutovi svih tih kružnih odsječaka, kao i odsječka $D_{1,1}$, jednaki $120°$. Stoga pripadni kružni lukovi zatvaraju kut od $0°$, tj. ili su tangencijalni ili pripadaju istoj kružnici, pa su ti kružni odsječci međusobno disjunktni, osim što dva susjedna imaju jednu zajedničku rubnu točku. Označimo s $\rho_2 := \big\{0, \frac{1}{9}, \frac{1}{6}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{7}{18}, \frac{5}{12}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{7}{12}, \frac{11}{18}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{5}{6}, \frac{8}{9}, 1\big\}$ skup točaka čije su slike šiljci slike $f_2([0,1])$. Očito je $\rho_1 \subseteq \rho_2$.

U idućem se koraku stvar ponavlja s kružnim odsječcima $D_{3,1}$, $D_{3,2}$, ... , $D_{3,16}$ i razdiobom ρ_3 od 65 elemenata. Nazovimo, za potrebe ovog razmatranja, točke skupa $\rho := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \rho_n$ *racionalnim.* Ako je za $r \in \rho$ broj $n_r \in \mathbb{N}$ najmanji takav da je $r \in \rho_{n_r}$, onda za sve $n \geq n_r$ vrijedi $f_n(r) = f_{n_r}(r)$, pa je i $f(r) = f_{n_r}(r)$ šiljak Kochove krivulje. Ako su $r, r' \in \rho$ dvije različite racionalne točke, a $n \in \mathbb{N}$ dovoljno velik da je $r, r' \in \rho_n$, onda, zbog injektivnosti funkcije f_n, vrijedi $f(r) = f_n(r) \neq f_n(r') = f(r')$, tj. restrikcija $f\big|\rho$ je injekcija.

Primijetimo sljedeće: Ako su $r_i, r_{i+1} \in \rho_n$ dvije susjedne točke razdiobe ρ_n, onda je za svaki $t \in [r_i, r_{i+1}]$, $f_n(t) \in D_{n,i}$, ali i za svaki $m \geq n$ je $f_m(t) \in D_{n,i}$, tj. kad slika od t jednom upadne u neki $D_{n,i}$, ona više ne može iz njega ispasti. Stoga je i $f(t) \in D_{n,i}$.

Neka je $0 < t < t' < 1$. Iz konstrukcije je jasno da je skup ρ gust na $[0,1]$. Neka je n dovoljno velik da postoje $r, r' \in \rho_n$ takvi da je $t < r < r' < t'$, te neka je $r_i \in \rho_n$ najmanji element razdiobe ρ_n takav da je $t < r_i$, a neka je $r_j \in \rho_n$ najveći takav da je $r_j < t'$. Tada je $f_n(t) \in D_{n,i-1}$ i $f_n(t') \in D_{n,j}$, pa je i $f(t) \in D_{n,i-1}$ i $f(t') \in D_{n,j}$. Kako su $D_{n,i-1}$ i $D_{n,j}$ disjunktni, to je $f(t) \neq f(t')$, čime smo pokazali da je f zaista injekcija.

Pokažimo sada da K nije rektifikabilna. Rastavimo K na četiri dijela K_{AB}, K_{BC}, K_{CD}, K_{DE} određena točkama A, B, C, D i E sa slike na stranici 62. Svaki od tih dijelova je kopija čitave Kochove krivulje K umanjene faktorom $\frac{1}{3}$, a međusobno su ti dijelovi izometrični. Kada bi K bila rektifikabilna, onda bi prema korolaru 29.4 (*ii*), i svaki od tih dijelova bila rektifikabilna krivulja, i vrijedilo bi $\ell(\mathsf{K}_{AB}) = \ell(\mathsf{K}_{BC}) = \ell(\mathsf{K}_{CD}) = \ell(\mathsf{K}_{DE}) = \frac{1}{3}\ell(\mathsf{K})$. Prema tvrdnji (*i*) istoga korolara, bilo bi tada

$$\begin{aligned}\ell(\mathsf{K}) &= \ell(\mathsf{K}_{AB}) + \ell(\mathsf{K}_{BC}) + \ell(\mathsf{K}_{CD}) + \ell(\mathsf{K}_{DE}) \\ &= 4\,\ell(\mathsf{K}_{AB})\,.\end{aligned}$$

S druge strane, kako je $\mathsf{K}_{AB} = \frac{1}{3}\mathsf{K}$, moralo bi biti $\ell(\mathsf{K}) = 3\,\ell(\mathsf{K}_{AB})$. Ta kontradikcija pokazuje da je Kochova krivulja K zaista primjer nerektifikabilnog Jordanova luka.[1]

Napomena 29.4 Graf funkcije $\Gamma(f)$ funkcije f iz primjera 28.1 (*ii*) na stranici 45, parametriziran je funkcijom $t \mapsto (t, f(t))$, $t \in [0,1]$. Kako f nije funkcija ograničene varijacije, to $\Gamma(f)$ nije rektifikabilna krivulja. Međutim, za svaki $0 < \alpha < 1$ je dio grafa nad segmentom $[\alpha, 1]$ rektifikabilna krivulja, pa je „loša" točka jedino 0.

U tom smislu je Kochova krivulja mnogo zanimljiviji primjer, jer niti jedan dio Kochove krivulje nije rektifikabilan, tj. svaki njezin dio ima „beskonačnu duljinu".

---

[1] Sâm primjer Kochove krivulje možda i ne zavređuje toliko pedantan i detaljan dokaz u udžbeniku matematičke analize, ali sam ga ovdje ipak uključio kao ilustraciju delikatnosti razmatranih pojmova. S druge strane, to mi je i neka vrsta opravdanja što ovdje ne obrađujemo plohe i, općenitije, mnogostrukosti, i integriranje po takvim objektima, što svakako spada u ozbiljan kolegij matematičke analize. Te su stvari međutim još mnogo složenije i delikatnije, i njihova iole pedantnija obrada zahtijeva mnogo vremena i prostora. Otprilike i „na prste" se to najčešće napravi u drugim kolegijima, prilagođeno potrebama tih kolegija.

Kako smo vidjeli u korolaru 28.4, svaka po dijelovima glatka funkcija je funkcija ograničene varijacije i njezina je totalna varijacija jednaka integralu norme derivacije. Za nas će posebno zanimljive biti upravo krivulje koje se mogu parametrizirati takvim funkcijama.

Definicija 29.8 Za krivulju $(\Gamma, \mathcal{G})$ u $\mathbb{R}^n$ kažemo da je ***po dijelovima glatka*** ako postoji parametrizacija γ te krivulje koja je po dijelovima glatka funkcija i vrijedi $\gamma'(t) \neq 0$ za sve t (uključujući jednostrane derivacije u točkama u kojima γ nije glatka), tj. γ je regularan po dijelovima gladak put.

Napomena 29.5 Nije svaka parametrizacija po dijelovima glatke krivulje po dijelovima glatka funkcija (za razliku od činjenice da svaka parametrizacija rektifikabilne krivulje *jest* funkcija omeđene varijacije). Pokažimo na jednom jednostavnom primjeru da segment $[0,1]$, koji svakako jest gladak Jordanov luk, ima i parametrizacijâ koje nisu po dijelovima glatke funkcije. Neka je C Cantorov trijadski skup, vidi primjer 5.1 (v). Definirajmo funkciju $đ\colon [0,1] \to [0,1]$ na sljedeći način:

Najprije definiramo $đ(0) := 0$ i $đ(1) := 1$. Dalje postupamo ovako:
U prvom koraku konstrukcije Cantorova skupa izbačen je interval $\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$, pa definiramo

$$đ(t) := \frac{1}{2} \quad \text{za } t \in [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}]\,.$$

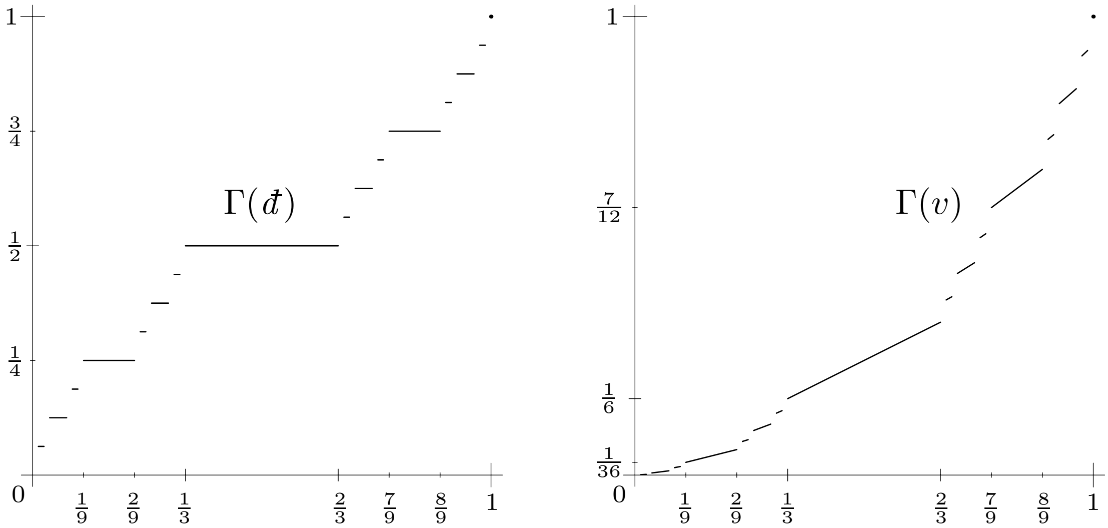
U drugom koraku izbačeni su intervali $\langle \frac{1}{9}, \frac{2}{9} \rangle$ i $\langle \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \rangle$, pa definiramo

$$\begin{aligned} đ(t) &:= \frac{1}{4} \quad \text{za } t \in [\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}], \ \text{ i} \\ đ(t) &:= \frac{3}{4} \quad \text{za } t \in [\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}]\,. \end{aligned}$$

U trećem koraku konstrukcije izbačena su četiri intervala duljine $1/27$ i na odgovarajuća četiri segmenta definiramo $đ(t)$ redom kao $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ i $\frac{7}{8}$, itd. Na taj smo način definirali funkciju $đ$ na uniji zatvorenja svih izbačenih intervala, i iz konstrukcije se vidi da za svake dvije točke x, x' vrijedi

$$\begin{aligned} |x - x'| < \frac{1}{3} \quad &\Rightarrow \quad |đ(x) - đ(x')| < \frac{1}{2} \\ |x - x'| < \frac{1}{9} \quad &\Rightarrow \quad |đ(x) - đ(x')| < \frac{1}{4} \end{aligned}$$

i općenito



$$|x - x'| < \frac{1}{3^n} \quad \Rightarrow \quad |đ(x) - đ(x')| < \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

pa je funkcija $đ$ uniformno neprekidna.

Kako je unija izbačenih intervala, pa onda i unija njihovih zatvorenja, gusta na $[0, 1]$, to zbog uniformne neprekidnosti, postoji jedinstveno neprekidno proširenje $đ\colon [0, 1] \to [0, 1]$, vidi teorem 4.19.

Preslikavanje $đ$ je neprekidna surjekcija $[0, 1] \twoheadrightarrow [0, 1]$ čiji je graf (točnije dio grafa) prikazan na lijevoj polovini prethodne slike. Preslikavanje $đ$, odnosno graf tog preslikavanja, često se naziva ***đavolje stube***.

Uoči da je funkcija $đ$ derivabilna na svim izbačenim intervalima, dakle *gotovo svuda*, i da je na tim intervalima derivacija jednaka nuli. Međutim, funkcija $đ$ nije po dijelovima glatka. Naime, kada bi bila, postojale bi točke $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = 1$ takve da je na intervalima $\langle t_{j-1}, t_j \rangle$ derivacija $đ'$ neprekidna funkcija, a kako je unija izbačenih intervala gusta na $\langle 0, 1 \rangle$, derivacija bi morala biti jednaka nuli. Stoga bi funkcija $đ$ bila konstantna na svakom intervalu $\langle t_{j-1}, t_j \rangle$, $j \in \{1, \ldots, k\}$, pa bi skup vrijednosti funkcije $đ$ bio konačan. Ali to se protivi činjenici da je $đ\colon [0, 1] \to [0, 1]$ surjekcija.

Kako bismo dobili neprekidnu parametrizaciju segmenta $[0, 1]$ — funkcija $đ$ ima beskonačan singularan skup — definirajmo funkciju $v\colon [0, 1] \to [0, 1]$ s $v(t) := t\, đ(t)$. Graf te funkcije ilustriran je na desnoj polovini slike. Funkcija v je očito neprekidna (monotona) bijekcija segmenta $[0, 1]$ na sâma sebe, dakle je parametrizacija tog segmenta. Međutim, v nije po dijelovima glatka funkcija. Zaista, kada bi v bila po dijelovima glatka, onda bi na intervalu $\langle 0,1\rangle$ i funkcija $đ$ bila po dijelovima glatka jer je $đ(t) = \frac{1}{t}\,v(t)$, $t \in \langle 0,1]$, a to nije.

Odavde slijedi da svaka po dijelovima glatka krivulja ima parametrizacijâ koje nisu po dijelovima glatke funkcije (ali jesu neprekidne funkcije ograničene varijacije). Dovoljno je uzeti neku „lijepu", tj. po dijelovima glatku parametrizaciju i komponirati ju s „vragolastom" funkcijom v.

Kada radimo s po dijelovima glatkim krivuljama, uvijek ćemo za parametrizaciju odabrati po dijelovima glatke funkcije.

Iz korolara 28.4 neposredno dobivamo

Korolar 29.5 *Svaka po dijelovima glatka krivulja Γ je rektifikabilna, i za njezinu duljinu vrijedi*

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$$

gdje je $\gamma\colon [a,b] \to \Gamma$ njezina proizvoljna po dijelovima glatka parametrizacija. ■

Primjer 29.2 Duljina dužine $\overline{PQ}$ je $\ell(\overline{PQ}) = \|Q-P\|$. Zaista, odaberemo li parametrizaciju $\gamma(t) := P + t\,(Q-P)$, $t \in [0,1]$, dužine $\overline{PQ}$, nalazimo

$$\ell(\overline{PQ}) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^1 \|Q-P\|\,dt = \|Q-P\|.$$

Korolar 29.6 *Neka je Γ po dijelovima gladak Jordanov luk, s krajnjim točkama P i Q. Tada je $\ell(\Gamma) \geq \|Q-P\|$, tj. dužina je najkraći PDG luk između dânih točaka P i Q.*

Dokaz: Neka je $\gamma\colon [a,b] \to \Gamma$ po dijelovima glatka parametrizacija luka Γ takva da je $P = \gamma(a)$ i $Q = \gamma(b)$. Tada, prema lemi 22.2, vrijedi

$$\|Q-P\| = \|\gamma(b)-\gamma(a)\| = \|\int_a^b \gamma'(t)\,dt\| \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt = \ell(\Gamma)\,. \qquad ■$$

Napomena 29.6 Formula $\ell(\Gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$ pokazuje da je *mjera ds* na luku Γ jednaka $\|\gamma'(t)\|\,dt$. Dakle $\|\gamma'(t)\|$ je veličina koja pokazuje u kojoj mjeri funkcija γ „rasteže" segment $[a,b]$ u točki t kada ga savija na luk Γ.

Ako je $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, onda je $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i'(t)^2}$, pa u slučaju $n = 3$, i uz čestu oznaku $\gamma(t) = \big(x(t), y(t), x(t)\big)$, imamo za duljinu krivulje u $\mathbb{R}^3$ formulu $\ell(\Gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$. U slučaju kad je $n = 2$, a $\Gamma = \Gamma(f)$ je graf diferencijabilne funkcije $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, onda je jedna glatka parametrizacija od $\Gamma(f)$ dana s $x \mapsto \big(x, f(x)\big)$, $x \in [a, b]$, pa je duljina grafa funkcije f jednaka $\ell(\Gamma\big(f)\big) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$.

§ 30 Krivuljni integrali

Dosad smo razmatrali integrale duž puteva. Da bismo korektno mogli definirati i integrale duž krivulja, potreban je teorem koji slijedi. Naime, svake dvije parametrizacije γ i η krivulje $(\Gamma, \mathcal{G})$ su usporedive, tj. povezane su neprekidnom monotonom bijekcijom φ takvom da je $\gamma = \eta \circ \varphi$ (vidi definicije 29.2 i 29.3). To jednako tako vrijedi i kad je krivulja $(\Gamma, \mathcal{G})$ po dijelovima glatka. Međutim, ako su γ i η po dijelovima glatke regularne parametrizacije, onda je i vezna funkcija φ po dijelovima glatka. Točnije, vrijedi

Teorem 30.1 *Neka je $(\Gamma, \mathcal{G})$ po dijelovima glatka krivulja u $\mathbb{R}^n$, a $\gamma\colon [a, b] \to \Gamma$ i $\eta\colon [c, d] \to \Gamma$ dvije njezine po dijelovima glatke parametrizacije, i neka je parametrizacija η regularna, tj. $\eta'(u) \neq 0$ za sve $u \in [c, d]$. Tada je i monotona bijekcija $\varphi\colon [a, b] \to [c, d]$ za koju je $\gamma = \eta \circ \varphi$, po dijelovima glatka funkcija.*

Pritom, ako γ i η određuju istu orijentaciju na Γ, onda je φ strogo rastuća funkcija i $\varphi'(t) \geq 0$ za sve $t \in [a, b]$, a ako γ i η određuju suprotne orijentacije, onda je φ strogo padajuća funkcija i $\varphi'(t) \leq 0$ za sve $t \in [a, b]$.

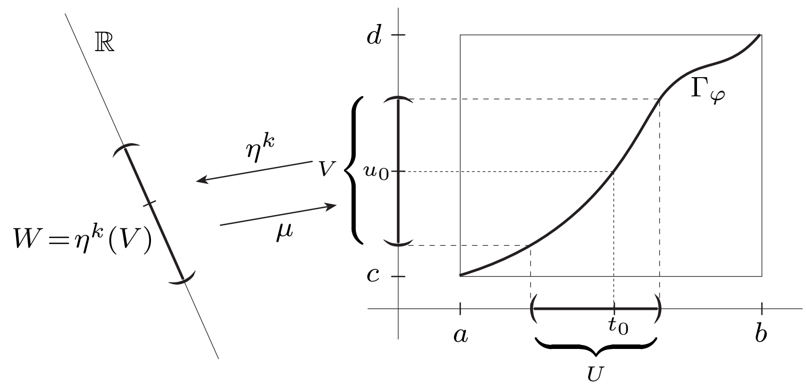
Dokaz: Znamo već, prema napomeni 29.1, da je funkcija $\varphi\colon [a, b] \to [c, d]$ za koju vrijedi $\gamma = \eta \circ \varphi$, neprekidna strogo monotona bijekcija. Ostaje pokazati da je φ po dijelovima glatka.

Dovoljno je dokazati da ako su obje parametrizacije γ i η glatke, i η je regularna, onda je i bijekcija φ glatka. Opći se onda slučaj dobije razmatranjem po dijelovima na kojima one jesu glatke.

Neka je $\gamma = (\gamma^1, \ldots, \gamma^n)$ i $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^n)$. Funkcije γ^i i η^i su klase C^1 i vrijedi $\gamma^i = \eta^i \circ \varphi$, $i = 1, \ldots, n$. Neka je $t_0 \in \langle a, b \rangle$, i $u_0 := \varphi(t_0) \in \langle c, d \rangle$. Kako je parametrizacija η regularna, $\eta'(u_0) \neq 0$ pa postoji k takav da je $(\eta^k)'(u_0) \neq 0$, a jer je $(\eta^k)'$ neprekidna, postoji otvoren interval $V \subseteq \langle c, d\rangle$ oko točke u_0 takav da je

$$(\eta^k)'(u) \neq 0\,, \quad u \in V\,. \tag{1}$$

Neka je $U := \varphi^{\leftarrow}(V) \subseteq \langle a, b\rangle$, i neka je $W := \eta^k(V) \subseteq \mathbb{R}$. Skup U je otvoren interval jer je φ neprekidna i monotona funkcija. Zbog (1) je $\eta^k\big|_V : V \to W$ strogo monotona bijekcija klase C^1. Neka je $\mu = (\eta^k\big|_V)^{-1} : W \to V$ njezin inverz. Prema teoremima o otvorenom preslikavanju 12.2 i o inverznoj funkciji 12.1 primijenjenim na $\eta^k\big|_V$, zaključujemo da je W otvoren interval i da je μ klase C^1.



Za $t \in U$ je $\varphi(t) \in V$, pa imamo

$$\varphi(t) = \big(\mu \circ \eta^k\big|_V\big)\big(\varphi(t)\big) = \big(\mu \circ \eta^k \circ \varphi\big)(t) = \big(\mu \circ \gamma^k\big)(t)\,.$$

Stoga je φ klase C^1 na otvorenom intervalu U oko t_0. Kako je $t_0 \in \langle a, b\rangle$ bio proizvoljan, zaključujemo da je φ klase C^1 na $\langle a, b\rangle$.

Slično se, korištenjem glatkih proširenja funkcija γ i η na okoline segmenata $[a, b]$ odnosno $[c, d]$, dokazuje neprekidna diferencijabilnost funkcije φ u točkama a i b. ■

Napomena 30.1 Prethodni teorem 30.1 *ne pokazuje* da je svaka parametrizacija po dijelovima glatke krivulje regularna. Zapravo, *svaka* po dijelovima glatka krivulja, a za svaku takvu prema definiciji po dijelovima glatke krivulje, definicija 29.8, postoji po dijelovima glatka *regularna* parametrizacija, ima i po dijelovima glatkih parametrizacija koje nisu regularne. Naprimjer, funkcija $\gamma\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ definirana s $\gamma(t) := (\sin^3 t, 0)$ je glatka parametrizacija segmenta $\big[\,(-1, 0), (1, 0)\,\big] \subseteq \mathbb{R}^2$ koja nije regularna jer je $\gamma'(0) = (0, 0)$.

Sada možemo definirati krivuljne integrale prve i druge vrste. Kao i inače, krivulju ćemo kratko označivati s Γ, umjesto pune oznake $(\Gamma, \mathcal{G})$.

Definicija 30.1 Neka je Γ po dijelovima glatka krivulja u $\mathbb{R}^n$, a $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ neprekidna realna funkcija. Tada se broj $\int_\gamma f\,ds = \int\limits_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$, gdje je $\gamma\colon [a,b] \to \Gamma$ proizvoljna po dijelovima glatka parametrizacija krivulje Γ, naziva ***integralom funkcije f duž krivulje*** Γ, i označujemo ga s $\int_\Gamma f\,ds$. To je ***krivuljni integral prve vrste***.

Da je ova definicija krivuljnog integrala prve vrste dobra, tj. da broj $\int_\Gamma f\,ds$ ne ovisi o odabranoj po dijelovima glatkoj parametrizaciji γ, dokazuje se ovako:

Neka su $\gamma\colon [a,b] \to \Gamma$ i $\nu\colon [a_1,b_1] \to \Gamma$ dvije proizvoljne po dijelovima glatke parametrizacije krivulje Γ, i neka je $\eta\colon [c,d] \to \Gamma$ neka po dijelovima glatka *regularna* parametrizacija krivulje Γ (takva postoji prema definiciji po dijelovima glatke krivulje). Onda je $\gamma = \eta \circ \varphi$ za neku monotonu bijekciju $\varphi\colon [a,b] \to [c,d]$, koja je, prema teoremu 30.1, po dijelovima glatka funkcija. Zato je

$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_a^b f(\eta(\varphi(t)))\,\|\eta'(\varphi(t))\|\,|\varphi'(t)|\,dt$$

što je, uz supstituciju $u = \varphi(t)$, jednako

$$= \int_c^d f(\eta(u))\,\|\eta'(u)\|\,du = \int_\eta f\,ds\,.$$

Na isti način je i $\int\limits_\nu f\,ds = \int\limits_\eta f\,ds$, pa je i $\int\limits_\nu f\,ds = \int\limits_\gamma f\,ds$.

Slično se postupa pri definiranju krivuljnog integrala vektorskog polja, odnosno diferencijalne 1-forme, samo što sada treba voditi računa i o orijentaciji krivulje.

Definicija 30.2 Neka je $\Gamma = (\Gamma, \mathcal{G}_0)$ orijentirana po dijelovima glatka krivulja u otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, a $\omega = F_1 dx_1 + \cdots + F_n dx_n$, gdje su $F_1, \ldots, F_n : \Omega \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije, diferencijalna 1-forma na Ω. Broj

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \sum_{j=1}^n F_j(\gamma(t))\,(\gamma^j)'(t)\,dt\,,$$

gdje je $\gamma = (\gamma^1, \ldots, \gamma^n)\colon [a,b] \to \Gamma$ proizvoljna po dijelovima glatka parametrizacija orijentirane krivulje Γ, naziva se ***integralom diferencijalne 1-forme*** ω

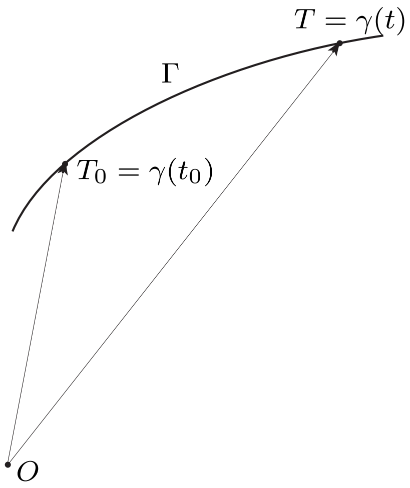
duž orijentirane krivulje Γ, i označujemo ga s $\int_\Gamma \omega$. Taj se integral naziva i ***integral vektorskog polja*** $F = (F_1, \dots, F_n)$ ***duž krivulje*** Γ. To je ***krivuljni integral druge vrste***.

I ova definicija je dobra, tj. ne ovisi o odabranoj po dijelovima glatkoj parametrizaciji. Zaista, ako su $\gamma\colon [a,b] \to \Gamma$ i $\eta\colon [c,d] \to \Gamma$ dvije po dijelovima glatke parametrizacije orijentirane krivulje Γ i parametrizacija η je regularna, onda je, prema teoremu 30.1, vezna funkcija $\varphi\colon [a,b] \to [c,d]$ za koju je $\gamma = \eta \circ \varphi$, po dijelovima glatka, ali, kako γ i η određuju istu orijentaciju, φ je rastuća funkcija te je $\varphi(a) = c$ i $\varphi(b) = d$. To znači da je γ dopuštena promjena puta η, pa tvrdnja već slijedi iz propozicije 26.1. Sada se zaključuje kao i u slučaju krivuljnog integrala prve vrste.

Za orijentirane po dijelovima glatke krivulje Γ_1 i Γ_2 u otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da su ***homotopne*** (u Ω) ako postoje po dijelovima glatke parametrizacije γ_1 i γ_2 tih krivulja, koje su u Ω homotopne kao po dijelovima glatki putevi, u smislu definicije u § 26. Analogno se definira homotopnost orijentiranih po dijelovima glatkih zatvorenih krivulja.

Za integral realne funkcije duž krivulje, tj. za krivuljni integral prve vrste, vrijede sva svojstva dokazana u § 24 za integral realne funkcije duž puta. Isto tako, sva svojstva dokazana u §§ 25–26 za integrale diferencijalnih 1-formi, tj. vektorskih polja, duž puta, kao i Greenov teorem u § 27, mogu se iskazati — i vrijede — za integrale diferencijalnih 1-formi, odnosno vektorskih polja, duž orijentiranih po dijelovima glatkih krivulja, tj. za krivuljne integrale druge vrste.

Na kraju ovih razmatranja kažimo i nekoliko riječi o tangenti. Ako je $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ gladak Jordanov luk, a $T_0 \in \Gamma$ neka točka, onda se ***tangentom*** na Γ u T_0 naziva pravac u $\mathbb{R}^n$ koji prolazi točkom T_0 i koji najbolje aproksimira luk Γ, tj. koji se najbolje „priljubljuje" uz luk. Kaže se i da je tangenta „granični položaj sekante T_0T kada se T približava T_0".



Ako je $\gamma\colon [a,b] \to \Gamma$ glatka regularna parametrizacija luka Γ i $\gamma(t_0) = T_0$, onda je vektor koji određuje smjer sekante kroz T_0 i $T = \gamma(t)$, jednak $\gamma(t) - \gamma(t_0)$. Ali i vektor $\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$ određuje isti pravac, stoga se ***tangencijalni vektor*** definira kao $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$, što je, naravno, jednako derivaciji $\gamma'(t_0)$. Tangentu na luk Γ u točki $T_0 = \gamma(t_0)$ tada definiramo kao pravac dân parametrizacijom (kaže se i „zadan parametarskom jednadžbom") $s \mapsto \gamma(t_0) + s\,\gamma'(t_0)$, $s \in \mathbb{R}$, pa je T_0 slika od $s = 0$, ili parametrizacijom $t \mapsto \gamma(t_0) + (t - t_0)\,\gamma'(t_0)$, $t \in \mathbb{R}$, pa je T_0 slika od $t = t_0$.

Propozicija 30.2 *Definicija tangente je dobra, tj. ne ovisi o odabranoj glatkoj parametrizaciji luka* Γ.

Dokaz: Neka je $\eta\colon [c,d] \to \Gamma$ neka druga glatka parametrizacija luka Γ. Tada postoji strogo monotona funkcija $\varphi\colon [a,b] \to [c,d]$ klase C^1 takva da je $\gamma = \eta \circ \varphi$, pa je $\gamma'(t_0) = \eta'\big((\varphi(t_0)\big) \cdot \varphi'(t_0)$. Označimo li $\varphi(t_0) =: u_0$, vidimo da su vektori $\gamma'(t_0)$ i $\eta'(u_0)$ kolinearni, a kako je $\gamma(t_0) = T_0 = \eta(u_0)$, to se pravci kroz T_0 određeni vektorima $\gamma'(t_0)$ i $\eta'(u_0)$, podudaraju, tj. definicija tangente je dobra. ■

Primijetimo da ako parametrizacije γ i η u prethodnom dokazu određuju istu orijentaciju luka Γ, onda je $\varphi'(t_0) > 0$, pa su i orijentacije tangente u točki T_0 određene parametrizacijama γ i η jednake. Isto tako, ako γ i η određuju suprotne orijentacije luka Γ, onda su i njima određene orijentacije tangente suprotne.

Zadaci

1. Izračunajte $\int\limits_{\sigma} f\,ds$ ako je:

   (a) $\sigma\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (30\,\cos^3 t,\, 30\,\sin^3 t)$; $f(x,y) = 1 + \frac{y}{3}$;

   (b) $\sigma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (\sin t,\, \cos t,\, t)$; $f(x,y,z) = x + y + z$;

   (c) $\sigma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (t, t^2, 0)$; $f(x,y) = x\,\cos z$;

(d) $\sigma\colon [1,2] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (t,\, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}, t)$; $f(x,y,z) = \frac{x+y}{y+z}$.

2. Izračunajte površinu dijela plašta eliptičnog cilindra $9x^2 + 5y^2 = 45$ koji leži između ravnina $z = 0$ i $z = y$.

3. Izvedite formulu za duljinu krivulje koja je u polarnim koordinatama zadana s $r = f(\varphi)$, $\varphi \in [a,b]$.

4. Odredite duljinu Arhimedove spirale $r = 2\varphi$ za $\varphi \in [0, 3\pi]$.

5. Odredite duljinu kardioide $r = 2a(1 + \cos\varphi)$.

6. Odredite duljinu hipocikloide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$.

7. Deltoida je krivulja čije su parametarske jednadžbe
$$\begin{aligned} x(t) &= 2\cos t + \cos 2t \\ y(t) &= 2\sin t - \sin 2t\,. \end{aligned}$$
Pokažite da je deltoida zatvorena krivulja i odredite njezinu duljinu.

8. Izračunajte $\int\limits_\gamma F\,d\gamma$ gdje je $F(x,y,z) = (x^2, xy, 1)$, $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t^2, 1)$.

9. Neka je $F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ i $\gamma\colon [-5,10] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$. Izračunajte $\int\limits_\gamma F\,d\gamma$ i $\int\limits_{-\gamma} F\,d\gamma$.
(Oba integrala treba izračunati prema definiciji.)

10. Izračunajte $\int\limits_\gamma x\,dy - y\,dx$ gdje je $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $t > 0$.

11. Izračunajte $I = \displaystyle\int_\gamma \frac{x\,dy - (x^3 + y)dx}{(x]2 + 2y + y^2)^3}$ gdje je put $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiran s $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, -1 + \sqrt{2}\sin t)$.

12. Neka je $\gamma(t) = \big(\frac{t^4}{4}, \sin^3\frac{t\pi}{2}\big)$, $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Izračunajte $\int\limits_\gamma y\,dx + x\,dy$.

13. Neka je $\gamma(t) = \big(e^{t-1}, \sin\frac{\pi}{t}\big)$, $t \in [1,2]$ i $F(x,y) = (2x\cos y, -x^2\sin y)$. Izračunajte $\int\limits_\gamma F\,d\gamma$.

14. Neka je $F(x,y,z) = (y, z\cos xz + x, y\cos yz)$. Odredite, ako postoji, funkciju f takvu da je $\nabla f(x,y,z) = F(x,y,z)$.

15. Izračunajte $\int\limits_\gamma (x^2+2x)e^{x+y}dx + (x^2e^{x+y} - 4yz\cos y^2)\,dy - 2\sin y^2 dz$, gdje je $\gamma(t) = \left(e^{t^2}, \sqrt{\arcsin t}, \frac{1-2t}{1+t}\right)$, $t \in [0,1]$.

16. Izračunajte $\displaystyle\int_\gamma \frac{2xy^3dx + (x^4 - x^2y^2)dy}{(x^2+y^2)^2}$, gdje je put $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ zadan s $\gamma(t) = \left(\frac{3\sqrt{3}+3}{2}\sqrt{t} - \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}+3}{2}\sqrt[3]{t} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

17. Odredite sve vrijednosti koje može poprimiti integral $\int\limits_\Gamma F\,d\gamma$ za
$$F(x,y,z) = \left(\frac{2xz}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2yz}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\right)$$
kad je Γ bilo koja zatvorena krivulja u $\mathbb{R}^3$ koja ne siječe os z.

18. Izračunajte integral $I = \int\limits_\Gamma \left(y\sqrt{x} - \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$, gdje je Γ luk krivulje $y^2 = x^3 + 2x$ od točke $A = (2-\sqrt{2}, 4-\sqrt{8})$ do točke $B = (2+\sqrt{2}, 4+\sqrt{8})$.

19. Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferencijabilno preslikavanje klase C^1. Pokažite da je $\int\limits_\Gamma f(x+y)(dx+dy) = \int\limits_0^{a+b} f(w)\,dw$ za svaku po dijelovima glatku krivulju Γ od ishodišta do točke (a,b), $a,b > 0$.

20. Neka je $F(x,y) = -y$, $G(x,y) = x$ i neka je $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ pozitivno orijentirana po dijelovima glatka kontura. Čemu je jednak integral $\int\limits_\Gamma F\,dx + G\,dy$?

21. Izračunajte $\int\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy$ za $P(x,y) = x$, $Q(x,y) = xy$, a Γ je pozitivno orijentirana kružnica zadana s $x^2+y^2 = 1$, i to: *a*) direktno, *b*) primjenom Greenove formule.

22. Izračunajte površinu lika omeđenog
a) kardioidom (zad. 5), *b*) hipocikloidom (zad. 6), *c*) deltoidom (zad. 7).

23. Izračunajte integral $\int\limits_\Gamma (yx^3 + e^y)\,dx + (xy^3 + xe^y - 2y)\,dy$ gdje je Γ bilo koja po dijelovima glatka kontura centralno simetrična s obzirom na ishodište.

24. Izračunajte integral $\int\limits_\Gamma \frac{1}{x} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\, dx + y^3 e^{-y} dy$ gdje je Γ pozitivno orijentiran rub isječka kružnog vijenca u prvom kvadrantu omeđenog pravcima $y = 0$ i $y = x$ i kružnicama radijusa 1 i 2 sa središtem u ishodištu.

25. Izračunajte $\int\limits_\Gamma \big(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 + y\, e^{xy}\big)\, dx + \big(x + x\, e^{xy}\big)\, dy$ po gornjem luku jedinične kružnice $x^2 + y^2 = 1$ od točke $(1, 0)$ do točke $(-1, 0)$.

26. Izračunajte $\int\limits_\Gamma y\, dx + 2x\, dy$ gdje je Γ pozitivno orijentiran rub skupa $S = \big\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 < 1 \text{ ili } x^2 + (y-1)^2 < 1 \,\big\}$.

27. Neka su Γ_1 i Γ_2 pozitivno orijentirane kružnice oko ishodišta radijusa r_1 i r_2, $r_1 > r_2$. Izračunajte integral $I = \int\limits_{\Gamma_1} P\, dx + Q\, dy - \int\limits_{\Gamma_2} P\, dx + Q\, dy$ za $P(x, y) = 2x^3 - y^3$ i $Q(x, y) = x^3 + y^3$.

28. Neka je D područje omeđeno elipsom E s jednadžbom $3x^2 + 2y^2 = 6$, i neka je $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neka diferencijabilna funkcija klase C^∞ koja je konstantna izvan jediničnoga kruga. Izračunajte $\int\limits_D \big(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big)\, dx\, dy$.

5

Kompleksne funkcije

U ovom ćemo poglavlju započeti proučavanje kompleksnih funkcija jedne kompleksne varijable. Skup kompleksnih brojeva označavat ćemo s $\mathbb{C}$. Njegovi su elementi uređeni parovi realnih brojeva, $\mathbb{C} := \{\, z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R} \,\}$, dakle, kao skup, $\mathbb{C}$ je isto što i $\mathbb{R}^2$. Prva komponenta x kompleksnog broja $z = (x, y)$ naziva se njegov *realni dio*, i označava se $\Re(z)$ ili $\operatorname{Re} z$, a druga komponenta, tj. realan broj y, naziva se *imaginarni dio*, i označava se $\Im(z)$ ili $\operatorname{Im} z$.

I kao abelova grupa, $\mathbb{C}$ se podudara s $\mathbb{R}^2$ — zbrajanje je definirano *po koordinatama*, kao i u $\mathbb{R}^2$. *Modul* $|z|$ kompleksnog broja $z = (x, y)$, definira se kao $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$, pa je to isto što i (euklidska) norma u $\mathbb{R}^2$. To omogućuje definiciju *udaljenosti, metrike*, pa $\mathbb{C}$ dobiva i strukturu metričkog prostora. I kao metrički prostor, $\mathbb{C}$ se podudara s $\mathbb{R}^2$. Otvoreni, zatvoreni, kompaktni, ... skupovi su, dakle, isti kao u $\mathbb{R}^2$ — o njima nemamo stoga ništa novoga reći. Kako neprekidnost funkcija ovisi samo o topološkoj strukturi, niti o tome nemamo ništa novoga reći: funkcija $f\colon \mathbb{C} \supseteq S \to \mathbb{C}$ neprekidna je u točki $z_0 \in S \subseteq \mathbb{C}$, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $z \in S$ za koje je $|z - z_0| < \delta$, vrijedi $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Isto tako je i konvergencija nizova u $\mathbb{C}$ ista kao i konvergencija u $\mathbb{R}^2$, a isto vrijedi i za Cauchyjevo svojstvo, pa je $\mathbb{C}$, između ostalog, potpun metrički prostor.

Novost nastupa uvođenjem *množenja kompleksnih brojeva* $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, formulom

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2\,,\; x_1 y_2 + x_2 y_1)\ .$$

Ovako definirano množenje je asocijativno, komutativno, ima neutralni element — kompleksan broj $(1, 0)$, distributivno je prema zbrajanju, i svaki kompleksan broj $z=(x,y) \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ ima inverz

$$\frac{1}{z} := z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) .$$

Tako $\mathbb{C}$ postaje polje.

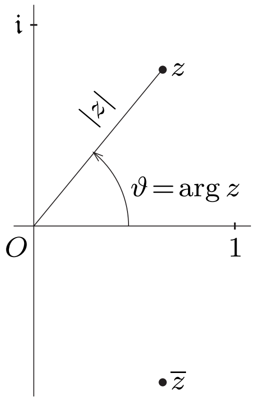
Kompleksni brojevi oblika $(x,0)$ ponašaju se kao realni brojevi, tj. vrijedi $(x_1,0)+(x_2,0) = (x_1+x_2,0)$ i $(x_1,0)\cdot(x_2,0) = (x_1\cdot x_2,0)$. Stoga realne brojeve identificiramo s kompleksnim brojevima kojima je imaginarni dio jednak nuli, $x \equiv (x,0)$. Tako $\mathbb{R}$ postaje podskupom od $\mathbb{C}$, a kako su algebarske i topološke strukture usklađene, to je, algebarski gledano, $\mathbb{R}$ potpolje od $\mathbb{C}$, a topološki gledano, $\mathbb{R}$ je (metrički) potprostor od $\mathbb{C}$. Ovako smješten skup $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, tj. skup brojeva oblika $x \equiv (x,0)$, $x \in \mathbb{R}$, naziva se *realna os*.

Kompleksan broj $(1,0)$, koji je, uz identifikaciju $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, zapravo realan broj 1, ima ulogu jedinice za množenje. S druge strane, vrijedi $(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) \equiv -1$, pa se broj $(0,1)$ naziva *korijen od* -1, ili *imaginarnom jedinicom*, i standardno se označava s $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Tako dolazimo i do uobičajene oznake za kompleksne brojeve, $z = x + \mathrm{i}\,y$, jer je

$$(x,y) = (x,0)\cdot(1,0) + (y,0)\cdot(0,1) \equiv x\cdot 1 + y\cdot \mathrm{i} .$$

Skup brojeva oblika $\mathrm{i}\,y \equiv (0,y)$, $y \in \mathbb{R}$, naziva se *imaginarna os*.

I za funkciju $f\colon \mathbb{C} \supseteq S \to \mathbb{C}$ često pišemo $f = u + \mathrm{i}\,v$, tj. $f(z) = (u(z), v(z))$, gdje su $u, v\colon S \to \mathbb{R}$ realne funkcije, jedne kompleksne, odnosno dvije realne, varijable. Kako se topološke strukture prostora $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}^2$ podudaraju, to je funkcija f neprekidna ako, i samo ako su obje funkcije u i v neprekidne.



Zrcaljenje kompleksne ravnine s obzirom na realnu os, naziva se *konjugiranje* kompleksnih brojeva. To je funkcija $z \mapsto \overline{z}$ definirana kao $\overline{z} := (x,-y)$, tj. $\overline{x+\mathrm{i}\,y} := x - \mathrm{i}\,y$. Konjugiranje je neprekidna funkcija, i često se koristi. Vrijedi, naprimjer, $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$ i $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Kompleksni broj, kao točka u ravnini, može se reprezentirati i *polarnim koordinatama*, $z = |z|(\cos\vartheta + \mathrm{i}\,\sin\vartheta)$, pri čemu je ϑ kut između pozitivnog smjera realne osi i radijvektora točke z. Kut ϑ naziva se *argument* kompleksnog broja, i označava s $\arg z$.

Uz oznaku $e^{\mathrm{i}\,\vartheta} := \cos\vartheta + \mathrm{i}\,\sin\vartheta$, može se pisati $z = |z|(\cos\vartheta + \mathrm{i}\,\sin\vartheta) = |z|\,e^{\mathrm{i}\,\vartheta}$. Lako je pokazati da se ovakav zapis kompleksnog broja u mnogočemu ponaša kao uobičajena eksponencijalna funkcija. Naprimjer, vrijedi $e^{\mathrm{i}\,\vartheta}e^{\mathrm{i}\,\varphi} = e^{\mathrm{i}\,(\vartheta+\varphi)}$, pa za množenje dobivamo $z_1\, z_2 = |z_1||z_2|e^{\mathrm{i}\,(\vartheta_1+\vartheta_2)}$.

Prema svemu dosad rečenom, izgleda kao da će se analiza kompleksnih funkcija jedne kompleksne varijable svesti na analizu funkcija dviju realnih varijabli, točnije na analizu funkcija iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$. To je, međutim, daleko od istine. Velike razlike nastaju uvođenjem derivacije kompleksne funkcije.

§ 31 Derivacija kompleksne funkcije

Derivaciju kompleksne funkcije definiramo na isti način kao i derivaciju realne funkcije jedne realne varijable.

Definicija 31.1 Za funkciju $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, gdje je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, kažemo da je ***derivabilna u točki*** $z_0 \in \Omega$, ako postoji limes $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$. U tom slučaju taj limes označavamo $f'(z_0)$ i zovemo ***derivacija*** funkcije f u točki z_0.

Za funkciju $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ kažemo da je ***derivabilna***, ako je derivabilna u svim točkama skupa Ω.

Skup svih funkcija derivabilnih na Ω, označavat ćemo s $D(\Omega)$.

Kao i u slučaju realne funkcije realne varijable, direktno se iz definicije lako pokazuje da se derivabilnost čuva sumom, produktom, kompozicijom, ... , da vrijede uobičajene formule za derivacije, i da je svaka derivabilna funkcija neprekidna.

Primjer 31.1 Potencija, $f(z) := z^n$, derivabilna je na cijeloj kompleksnoj ravnini, i njezina derivacija je, kao i u slučaju realne funkcije realne varijable, jednaka $f'(z) = n\, z^{n-1}$. To se lako dokaže, bilo neposredno iz definicije, bilo indukcijom korištenjem formule za derivaciju produkta.

Funkcija $f(z) := \frac{1}{2}(z+\overline{z})$ *nije* derivabilna, iako je, do na faktor $\frac{1}{2}$, suma dviju 'lijepih' funkcija — identitete i konjugiranja. Zaista, kada bi f bila derivabilna, postojao bi u $z_0 = (x_0, y_0)$ limes kvocijenta $\left|\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| = \left|\dfrac{x - x_0}{z - z_0}\right| = |\cos\vartheta|$, gdje je $\vartheta = \arg(z - z_0)$. Međutim, limes ovog izraza ne postoji, jer $|\cos\vartheta|$ oscilira između 0 i 1.

To znači da konjugiranje $z \mapsto \overline{z}$ *nije* derivabilna funkcija, iako su joj i realni i imaginarni dio, s aspekta realnih funkcija, diferencijabilne funkcije, čak klase C^∞.

Sljedeći teorem daje nužne i dovoljne uvjete koje moraju zadovoljavati realne funkcije u i v, da bi kompleksna funkcija $f = u + \mathrm{i}\, v$ bila derivabilna.

Teorem 31.1 (Cauchy-Riemannov teorem) *Kompleksna funkcija* $f = u + \mathrm{i}\, v : \Omega \to \mathbb{C}$ *derivabilna je u točki* $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ *ako, i samo ako su funkcije* u *i* v*, kao realne funkcije dviju realnih varijabli, diferencijabilne u točki* (x_0, y_0)*, i zadovoljavaju ove* ***Cauchy-Riemannove uvjete****:*

$$\begin{aligned} \partial_x u(x_0, y_0) &= \partial_y v(x_0, y_0) \\ \partial_y u(x_0, y_0) &= -\partial_x v(x_0, y_0)\ . \end{aligned} \tag{CR}$$

Dokaz: Neka je funkcija f derivabilna u $z_0 = (x_0, y_0)$ i neka je $f'(z_0) = a + \mathrm{i}\, b \in \mathbb{C}$. Tada je

$$\Big| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - (a + \mathrm{i}\, b) \Big| =$$

$$= \frac{\big| u(x,y) + \mathrm{i}\, v(x,y) - u(x_0,y_0) - \mathrm{i}\, v(x_0,y_0) - (a + \mathrm{i}\, b)\big((x - x_0) + \mathrm{i}\,(y - y_0)\big)\big|}{|z - z_0|}$$

$$= \frac{\big| u(x,y) - u(x_0,y_0) - a(x - x_0) + b(y - y_0) + \mathrm{i}\,\big(v(x,y) - v(x_0,y_0) - a(y - y_0) - b(x - x_0)\big)\big|}{|z - z_0|}\ .$$

Kako je $\lim_{z \to z_0} \Big| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - (a + \mathrm{i}\, b) \Big| = 0$, i $|z - z_0| = \|(x - x_0, y - y_0)\|$, to je i

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{|u(x,y) - u(x_0,y_0) - a(x - x_0) + b(y - y_0)|}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} &= 0\ , \text{ i} \\ \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{|v(x,y) - v(x_0,y_0) - b(x - x_0) - a(y - y_0)|}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} &= 0\ . \end{aligned}$$

To znači da su funkcije $u, v \colon \Omega \to \mathbb{R}$ diferencijabilne u $(x_0, y_0) = z_0$, i da je

$$\begin{aligned} \partial_x u(x_0, y_0) &= a = \partial_y v(x_0, y_0) \\ \partial_y u(x_0, y_0) &= -b = -\partial_x v(x_0, y_0)\,. \end{aligned}$$

Time je nužnost dokazana. Obrnutim redoslijedom zaključivanja, dobivamo i dovoljnost. ■

Korolar 31.2 *Ako je funkcija* $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *derivabilna u* $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, *onda je*

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \partial_x u(x_0,y_0) + \mathrm{i}\,\partial_x v(x_0,y_0) =: \partial_x f(z_0) \\ &= \partial_x u(x_0,y_0) - \mathrm{i}\,\partial_y u(x_0,y_0) \\ &= \partial_y v(x_0,y_0) - \mathrm{i}\,\partial_y u(x_0,y_0) =: -\mathrm{i}\,\partial_y f(z_0) = \frac{1}{\mathrm{i}}\partial_y f =: \frac{\partial f}{\partial(\mathrm{i}\,y)} =: \partial_{\,\mathrm{i}y} f \\ &= \partial_y v(x_0,y_0) + \mathrm{i}\,\partial_x v(x_0,y_0)\ . \end{aligned}$$

Uz oznake uvedene u ovim formulama, oba Cauchy-Riemannova uvjeta možemo zapisati jednom formulom: $\partial_x f(z_0) = \partial_{\mathrm{i}y} f(z_0)$. ■

Korolar 31.3 *Ako je funkcija* $f = u + \mathrm{i}\,v\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *derivabilna, a realne funkcije* u *i* v *su diferencijabilne klase* C^2 *(vidjet ćemo kasnije da to već slijedi iz derivabilnosti kompleksne funkcije* f*), onda su* u *i* v ***harmoničke funkcije****, tj. obje zadovoljavaju Laplaceovu*[1] *diferencijalnu jednadžbu*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ .$$

Dokaz: Zbog Cauchy-Riemannovih uvjeta je $\partial_x u = \partial_y v$, pa deriviranjem po x dobivamo

$$\partial_x\partial_x\, u = \partial_x\partial_y\, v \overset{\text{Schwarz}}{=} \partial_y\partial_x\, v \overset{\text{(CR)}}{=} -\partial_y\partial_y\, u\ ,$$

i slično za funkciju v. ■

Napomena 31.1 Teorem 31.1 i Korolar 31.3 pokazuju kako su strogi zahtjevi na realne funkcije u i v da bi kompleksna funkcija $f = u + \mathrm{i}\,v$ bila derivabilna. S druge strane, za neprekidnost od f bila je dovoljna samo neprekidnost od u i v, i nije se zahtijevala nikakva međusobna veza tih funkcija. Otkuda tolika restrikcija kada se radi o derivabilnosti?

Uzrok tome je sljedeći. Diferencijabilnost funkcije u nekoj točki, što je za funkcije jedne varijable ekvivalentno derivabilnosti u toj točki, znači da se prirast te funkcije može aproksimirati linearnom funkcijom (linearnim operatorom). Kod kompleksnih funkcija to znači $\mathbb{C}$-*linearnim operatorom.* Međutim, $\mathbb{C}$-linearnih operatora $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ima manje nego $\mathbb{R}$-linearnih operatora $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kakvi se koriste za aproksimaciju vektorskih funkcija dviju realnih varijabli, točnije funkcija $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

[1] Pierre-Simon Laplace (1749–1827), francuski matematičar

Naime, da bi $\mathbb{R}$-linearan operator $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ reprezentiran matricom $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ bio, shvaćen kao funkcija $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, i $\mathbb{C}$-linearan, nužno je i dovoljno da vrijedi $a = d$ i $b = -c$. Zaista, ako je $A\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kompleksno-linearan operator, onda za skalar $\mathfrak{i} \in \mathbb{C}$ i svaki $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, mora vrijediti $A(\mathfrak{i}\, z) = \mathfrak{i}\, A(z)$, odakle specijalno za $z = (1, 0)$, dobivamo $a = d$ i $b = -c$.

Da su ta dva uvjeta i dovoljna za $\mathbb{C}$-linearnost funkcije A, lako se provjeri direktno.

Tako dobivamo upravo Cauchy-Riemannove uvjete, jer je Jacobijeva matrica, a to je matrica koja reprezentira diferencijal funkcije $f = (u, v)\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$, jednaka $\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$.

Dakle, ako funkcija $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ima (kompleksnu) derivaciju (što je ekvivalentno diferencijabilnosti u smislu kompleksnih funkcija), onda je f shvaćena kao funkcija iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$ diferencijabilna, ali obratno vrijedi samo ako su još zadovoljeni i Cauchy-Riemannovi uvjeti.

Korolar 31.4 *Ako je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren i povezan skup, a $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija takva da je $f'(z) = 0$ za sve $z \in \Omega$, onda je f konstantna funkcija.* ■

Primjer 31.2 Navedimo nekoliko osnovnih primjera derivabilnih kompleksnih funkcija:

Identiteta $f(z) = z$ je derivabilna, i $f'(z) = 1$ za sve $z \in \mathbb{C}$.

Polinomi, tj. funkcije oblika $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, gdje su $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, \ldots, n$, derivabilne su funkcije, i derivacija je jednaka $p'(z) = n\, a_n z^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + a_1$.

Racionalne funkcije, tj. kvocijenti dvaju polinoma, derivabilne su svuda gdje su definirane, dakle, svuda osim u nultočkama nazivnika.

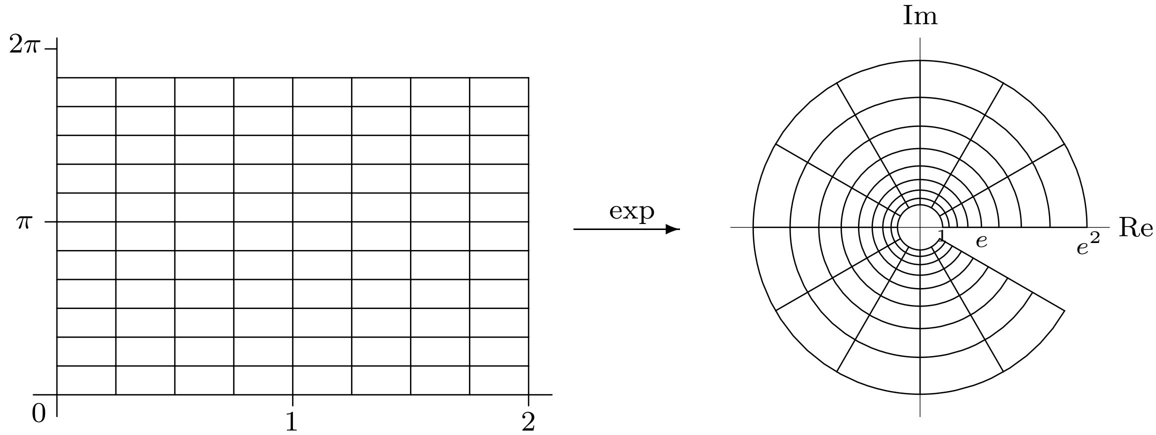
Eksponencijalna funkcija kompleksne varijable je funkcija $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definirana s

$$\exp z = e^z = e^{x + \mathfrak{i}\, y} := e^x (\cos y + \mathfrak{i}\, \sin y)\ .$$

Realni i imaginarni dio funkcije exp očito jesu diferencijabilne funkcije, a Cauchy-Riemannovi uvjeti lako se provjere. Stoga je (kompleksna) eksponencijalna funkcija derivabilna, i za derivaciju nalazimo

$$\exp' z = \partial_x u(z) + \mathfrak{i}\, \partial_x v(z) = \exp z\ , \quad \text{tj. } (e^z)' = e^z\ .$$

Primijetimo da je $e^{z+2\mathfrak{i}\pi} = e^z$, pa je kompleksna eksponencijalna funkcija periodička, i to s osnovnim periodom $2\mathfrak{i}\pi$.



Tu smo funkciju, ali shvaćenu kao preslikavanje $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, promatrali već ranije, Primjer 12.1, i vidjeli da ona nije injektivna (jer je periodička u drugoj varijabli), ali je injektivna na svakoj 'horizontalnoj' prugi širine 2π, i slika takve otvorene pruge je cijela kompleksna ravnina bez jednog polupravca s početkom u ishodištu.

Na prethodnoj slici je prikazano kako eksponencijalna funkcije preslikava prugu $\mathbb{R} \times \langle 0, 2\pi\rangle = \{z = x + \mathfrak{i}y : x \in \mathbb{R}, y \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$ na komplement pozitivnog dijela realne osi. Slike točaka $z = x + \mathfrak{i}y$ za koje je $x > 0$ nalaze se izvan jediničnog kruga, a za $x < 0$ unutar jediničnog kruga. Slično, slika pruge $\mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi\rangle$ je komplement negativnog dijela realne osi.

Logaritamska funkcija kompleksne varijable nije definirana na cijeloj kompleksnoj ravnini. Naime, željeli bismo da je, kao kod realnih funkcija realne varijable, logaritamska funkcija inverzna eksponencijalnoj, ali kako kompleksna eksponencijalna funkcija nije bijekcija, inverzna funkcija ne postoji. Međutim, kako smo vidjeli, eksponencijalna funkcija jeste injektivna na svakoj horizontalnoj prugi širine 2π, pa restrikcija eksponencijalne funkcije na svaku takvu prugu ima svoju inverznu funkciju, koja je definirana na slici te pruge. Prirodno je zahtijevati da takva inverzna funkcija proširuje realnu logaritamsku funkciju $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \to \mathbb{R}$, koju ćemo privremeno označavati s $\ln_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Stoga za domenu treba uzeti takav skup koji sadrži pozitivan dio realne osi. Uobičajeno je za domenu kompleksne logaritamske funkcije uzeti komplement negativnog dijela realne osi, dakle sliku pruge $\mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi\rangle$.

Označimo s $\mathbb{C}_\pi := \mathbb{C} \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ komplement negativnog dijela realne osi u kompleksnoj ravninikomplement negativnog dijela realne osi, a s $U_{-\pi}^{\pi} := \{x + \mathrm{i}\, y : y \in \langle -\pi, \pi\rangle\} \subseteq \mathbb{C}$ odgovarajuću horizontalnu prugu. Želimo, dakle, derivabilnu funkciju $\ell\colon \mathbb{C}_\pi \to U_{-\pi}^{\pi}$ koja je inverzna funkciji $\exp\colon U_{-\pi}^{\pi} \to \mathbb{C}_\pi$. Mora dakle vrijediti $\ell \circ \exp = \mathrm{id}$, tj.

$$\ell(e^z) = z \ , \ \text{za sve } z \in U_{-\pi}^{\pi} \ , \tag{1}$$

i $\exp \circ\, \ell = \mathrm{id}$, tj.

$$e^{\ell(z)} = z \ , \ \text{za sve } z \in \mathbb{C}_\pi \ . \tag{2}$$

Budući da eksponencijalna funkcija preslikava sumu u produkt, mora njezina inverzna funkcija preslikavati produkt u sumu, tj. logaritam produkta mora biti jednak sumi logaritama. Zapišemo li $z \in \mathbb{C}_\pi$ kao $z = |z|\, e^{\mathrm{i}\, \arg z}$, zbog (1) dobivamo

$$\ell(z) = \ell(|z|\, e^{\mathrm{i}\, \arg z}) = \ell(|z|) + \ell(e^{\mathrm{i}\, \arg z}) \overset{(1)}{=} \ell(|z|) + \mathrm{i}\, \arg z \ ,$$

a jer je $|z|$ pozitivan realan broj, i želimo da se za pozitivne realne brojeve funkcija ℓ podudara s realnom logaritamskom funkcijom, dobivamo

$$\ell(z) = \ln_{\mathbb{R}} |z| + \mathrm{i}\, \arg z \ . \tag{3}$$

Umjesto ℓ, kompleksnu logaritamsku funkciju ćemo, kao i realnu, označavati s $\ln\colon \mathbb{C}_\pi \to U_{-\pi}^{\pi} \subseteq \mathbb{C}$. Prema (3), ona je definirana s

$$\ln z := \ln_{\mathbb{R}} |z| + \mathrm{i}\, \arg z \ , \tag{4}$$

Za pozitivne realne brojeve $z \in \mathbb{R}_+$ je $\arg x = 0$ pa je $\ln z = \ln_{\mathbb{R}} |z| = \ln_{\mathbb{R}} z$, tj. „kompleksna" logaritamska funkcija ln zaista proširuje „realnu" logaritamsku funkciju $\ln_{\mathbb{R}}$.

Zapisano u koordinatama, kompleksna logaritamska funkcija jednaka je

$$\ln z = \ln(x + \mathrm{i}\, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \mathrm{i}\, \arg z \ , \tag{5}$$

a funkciju $\arg\colon \mathbb{C}_\pi \to \mathbb{R}$ možemo zapisati formulama

$$\arg z = \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} & , \ x > 0 \ \text{(desna poluravnina)} \\ \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{y} & , \ y > 0 \ \text{(gornja poluravnina)} \\ \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{y} - \pi & , \ y < 0 \ \text{(donja poluravnina)} \end{array} \right. . \tag{6}$$

Kao i za funkciju ϑ u Primjeru 25.2, lako se provjeri da je formulom (6) funkcija $z \mapsto \arg z$ dobro definirana.

Pokažimo da je funkcija ln definirana formulama (5) i (6) zaista derivabilna, i nađimo njezinu derivaciju. Na skupu $\{ x + \mathrm{i}\, y : x > 0 \}$, tj. na desnoj poluravnini vrijedi

$$\ln(z) = \ln(x + \mathrm{i}\, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \mathrm{i} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} ,$$

pa je

$$\partial_x \ln(z) = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + y^2} + \mathrm{i} \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} (-\frac{y}{x^2}) = \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i} \frac{y}{x^2 + y^2} ,$$

i

$$\partial_y \ln(z) = \frac{1}{2} \frac{2y}{x^2 + y^2} + \mathrm{i} \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \frac{1}{x} = \frac{y}{x^2 + y^2} + \mathrm{i} \frac{x}{x^2 + y^2} .$$

Prema Cauchy-Riemannovu teoremu, Teorem 31.1, zaključujemo da je funkcija ln derivabilna na desnoj poluravnini, i njezina je derivacija jednaka

$$\ln'(z) = \partial_x \ln(z) = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z} .$$

Na gornjoj poluravnini vrijedi $\ln(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \mathrm{i} \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{y}$, a na donjoj je $\ln(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \mathrm{i}\,(\operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{y} - \pi)$, usporedi s funkcijom ϑ u Primjeru 25.2, pa se, kao i ranije, pokazuje da je i tamo ln derivabilna i derivacija je $\frac{1}{z}$, tj. funkcija ln je derivabilna, i na cijelom skupu $\mathbb{C}_\pi$ je $\ln'(z) = \frac{1}{z}$.

Nema ništa posebnog u skupu $U_{-\pi}^{\pi}$. Eksponencijalna funkcija isto tako ostvaruje bijekciju pruge $U_0^{2\pi} := \{ z = x + \mathrm{i}\, y : 0 < y < 2\pi \}$ na komplement pozitivnog dijela realne osi, tj. na skup $\mathbb{C}_0 := \mathbb{C} \setminus \{ z = (x, 0) : x \geq 0 \}$, i općenito, bilo koje pruge $U_\vartheta^{\vartheta+2\pi} := \{ z = x + \mathrm{i}\, y : \vartheta < y < \vartheta + 2\pi \}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, na skup $\mathbb{C}_\vartheta$ — komplement polupravca iz ishodišta koji s pozitivnim dijelom realne osi zatvara kut ϑ. Stoga za svaki ϑ postoji pripadna kompleksna logaritamska funkcija $\mathbb{C}_\vartheta \to U_\vartheta^{\vartheta+2\pi}$, inverzna restrikciji funkcije $z \mapsto e^z$ na $U_\vartheta^{\vartheta+2\pi}$.

Trigonometrijske i ***hiperbolne funkcije*** kompleksne varijable definiraju se pomoću eksponencijalne funkcije formulama:

$$\sin z := \frac{e^{\mathrm{i}\, z} - e^{-\mathrm{i}\, z}}{2\mathrm{i}} \qquad \cos z := \frac{e^{\mathrm{i}\, z} + e^{-\mathrm{i}\, z}}{2}$$
$$\operatorname{sh} z := \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z := \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \,.$$

Sve su to derivabilne funkcije, i derivacije su jednake onima u realnom slučaju. I algebarski, tj. kod 'računanja' te se funkcije ponašaju kako smo naučeni iz realne analize.

§ 32 Integral kompleksne funkcije

Kompleksne funkcije kompleksne varijable integriramo po putevima, odnosno krivuljama. U ovoj točki definirat ćemo integral, nabrojati neka osnovna svojstva, i započeti ispitivanje neovisnosti integrala o putu integracije, čime ćemo se detaljnije baviti u idućem paragrafu.

Neka je $\gamma = \xi + \mathrm{i}\,\eta\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ po dijelovima gladak put, $\gamma^{\clubsuit} = \gamma([a,b]) \subseteq \mathbb{C}$ neka je njegova slika (trag), i neka je $f = u + \mathrm{i}\,v\colon \gamma^{\clubsuit} \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija. ***Integral funkcije*** f ***duž puta*** γ definiramo kao (kompleksan) broj

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma f\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt \\
&:= \int_a^b \big(u(\gamma(t))\,\xi'(t) - v(\gamma(t))\,\eta'(t)\big)\,dt + \mathrm{i}\int_a^b \big(v(\gamma(t))\,\xi'(t) + u(\gamma(t))\,\eta'(t)\big)\,dt \\
&= \int_\gamma u\,dx - v\,dy + \mathrm{i}\int_\gamma v\,dx + u\,dy \,.
\end{aligned}$$

U zadnjem retku radi se o dva integrala diferencijalnih 1-formi duž puta γ. To opravdava i uvođenje oznake $dz := dx + \mathrm{i}\,dy$, jer tada formalnim množenjem, dobivamo

$$\int_\gamma f\,dz = \int_\gamma (u + \mathrm{i}\,v)(dx + \mathrm{i}\,dy) = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + \mathrm{i}\int_\gamma v\,dx + u\,dy \,, \tag{1}$$

a uz taj formalizam je i

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\Big(\int_\gamma f\,dz\Big) &= \int_\gamma \mathrm{Re}(f\,dz)\\ \mathrm{Im}\Big(\int_\gamma f\,dz\Big) &= \int_\gamma \mathrm{Im}(f\,dz)\,.\end{aligned}$$

Lako se pokazuje da ovako definiran integral ima uobičajena svojstva, tj. da je linearan funkcional na prostoru neprekidnih kompleksnih funkcija definiranih na $\gamma^\clubsuit$, i da je aditivna funkcija puta integracije. Također se, kao i kod integrala diferencijalne 1-forme duž puta, tj. integrala druge vrste, lako pokazuje da su integrali duž algebarski ekvivalentnih puteva jednaki.

Kao i u § 30 za integral diferencijalne 1-forme, i ovdje se definira ***integral*** $\int_\Gamma f\,dz$ ***kompleksne funkcije duž*** orijentirane po dijelovima glatke ***krivulje*** $\Gamma = (\Gamma, \mathcal{G}_o)$, kao integral $\int_\gamma f\,dz$ po proizvoljnom po dijelovima glatkom putu γ koji parametrizira orijentiranu krivulju Γ. Da je ta definicija dobra, tj. da ne ovisi o odabranoj po dijelovima glatkoj parametrizaciji γ krivulje Γ, pokazuje se bilo direktno, koristeći se Teoremom 30.1, bilo rabeći (1) i činjenicu da integral diferencijalne 1-forme ne ovisi o odabranoj parametrizaciji krivulje Γ.

Napomena 32.1 U prethodnoj smo definiciji prešutno istakli i što podrazumijevamo pod integralom kompleksne funkcije jedne realne varijable. Naime, ako je naprimjer, $g = g_{\mathrm{Re}} + \mathrm{i}\, g_{\mathrm{Im}} : [a,b] \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija, onda, po definiciji, smatramo da je

$$\int_a^b g(t)\,dt := \int_a^b \big(g_{\mathrm{Re}}(t) + \mathrm{i}\, g_{\mathrm{Im}}(t)\big)\,dt := \int_a^b g_{\mathrm{Re}}(t)\,dt + \mathrm{i}\int_a^b g_{\mathrm{Im}}(t)\,dt\,.$$

To je usaglašeno i s inkluzijom $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, tj. s identifikacijom $x \equiv (x,0)$. Naime, tom će identifikacijom, segment realnih brojeva $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ biti identificiran sa skupom $[a,b] \times \{0\} = \{z = x + \mathrm{i}\,y : x \in [a,b],\ y = 0\} \subseteq \mathbb{C}$, pa na identitetu $\mathrm{id}\colon [a,b] \to [a,b]$ možemo gledati kao na put $\iota\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ dân s $\iota(t) := (t,0)$. Ako sada na $g = g_{\mathrm{Re}} + \mathrm{i}\, g_{\mathrm{Im}}$ gledamo kao na funkciju $g\colon \iota^\clubsuit \to \mathbb{C}$, dakle, umjesto

$g(t)$ pišemo $g(t,0)$, i slično za realne funkcije g_{Re} i g_{Im}, onda je

$$
\begin{aligned}
\int_\iota g\,dz &= \int_a^b g(\iota(t))\,\iota'(t)\,dt \\
&= \int_a^b \big(g_{\mathrm{Re}}(t,0)\,\iota'_{\mathrm{Re}}(t) - g_{\mathrm{Im}}(t,0)\,\iota'_{\mathrm{Im}}(t)\big)dt + \\
&\qquad\qquad + \mathrm{i}\int_a^b \big(g_{\mathrm{Im}}(t,0)\,\iota'_{\mathrm{Re}}(t) + g_{\mathrm{Re}}(t,0)\,\iota'_{\mathrm{Im}}(t)\big)dt \\
&= \int_a^b g_{\mathrm{Re}}(t)\,dt + \mathrm{i}\int_a^b g_{\mathrm{Im}}(t)\,dt\ ,
\end{aligned}
$$

jer je $\iota'_{\mathrm{Re}}(t) = 1$ i $\iota'_{\mathrm{Im}}(t) = 0$ za sve t, a upravo smo tako, prešutno, u definiciji integrala kompleksne funkcije duž puta, bili i definirali $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$.

Dokažimo sada jednu ocjenu modula integrala, koju ćemo često koristiti.

Lema 32.1 (o ocjeni integrala) *Neka je $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ po dijelovima gladak put duljine $\ell(\gamma)$, i neka je $f\colon \gamma^\clubsuit \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija, te neka je $M := \max\{|f(z)| : z \in \gamma^\clubsuit\}$. Tada je*

$$
\Big|\int_\gamma f\,dz\Big| \le M\,\ell(\gamma)\ .
$$

Dokaz: Primijetimo najprije, da, zbog kompaktnosti skupa $\gamma^\clubsuit$ i neprekidnosti funkcije f, maksimum M zaista postoji. Označimo s $J := \int_\gamma f\,dz = |J|e^{\mathrm{i}\,\vartheta}$ za neki $\vartheta \in \mathbb{R}$ (točnije, $\vartheta = \arg J$, ali nam ta činjenica neće trebati). Tada je

$$
\begin{aligned}
|J| = e^{-\mathrm{i}\,\vartheta}\int_\gamma f\,dz &= e^{-\mathrm{i}\,\vartheta}\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt \\
&= \int_a^b e^{-\mathrm{i}\,\vartheta} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt\ .
\end{aligned}
$$

Stoga je

$$
\begin{aligned}
|J| = \operatorname{Re}|J| &= \int_a^b \operatorname{Re}\big(e^{-\mathrm{i}\,\vartheta} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\big)\,dt \\
&\le \int_a^b \big|e^{-\mathrm{i}\,\vartheta} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\big|\,dt \\
&\le M \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = M\ell(\gamma)\,,
\end{aligned}
$$

jer je $|e^{-\mathrm{i}\,\vartheta}| = 1$. ■

Integral kompleksne funkcije, općenito, ovisi o putu integracije, ali uz neke uvjete — ne. Sada ćemo se pozabaviti upravo tim pitanjem — kada integral kompleksne funkcije *ne ovisi* o putu integracije. Kao što smo u Teoremu 25.2 bili pokazali za integral diferencijalne 1-forme, tako se i sada jednostavno vidi da je neovisnost integrala kompleksne funkcije o putu integracije, ekvivalentna tome da je integral po svakom po dijelovima glatkom zatvorenom putu jednak nuli. Tu ćemo činjenicu ubuduće koristiti bez posebnog naglašavanja.

Analogno Teoremu 25.2, vrijedi

Teorem 32.2 (Cauchyjev teorem za derivaciju) *Neka je $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija definirana na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Tada je $\int_\gamma f\,dz = 0$ za sve po dijelovima glatke zatvorene puteve γ u Ω ako i samo ako postoji derivabilna funkcija $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ za koju je $F' = f$ na Ω.*

Dokaz: $\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija takva da je $F' = f$, i neka je $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ PDG put koji je zatvoren, tj. $\gamma(a) = \gamma(b)$. Tada je

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma f\,dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt \\
&= \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0\,.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Obratno, uz pretpostavku da integral funkcije f ne ovisi o putu, tj. da je integral po svakom zatvorenom PDG putu jednak nuli, treba definirati funkciju $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ takvu da je $F' = f$. Dovoljno je funkciju F definirati zasebno na svakoj komponenti povezanosti skupa Ω, jer su te komponente međusobno disjunktni otvoreni skupovi, a derivabilnost je lokalno svojstvo. Drugim riječima, dovoljno je definirati funkciju F u slučaju kada je otvoren skup Ω povezan.

Fiksirajmo točku $z_0 \in \Omega$, i za $z \in \Omega$ definirajmo

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f\,dz\ ,$$

gdje je γ_z bilo koji PDG put u Ω od z_0 do z. Kako po pretpostavci, integral funkcije f ne ovisi o putu, F je dobro definirana funkcija. Pokažimo da je F derivabilna, i da je $F'(z) = f(z)$ za sve $z \in \Omega$. Neka je $z \in \Omega$ i $r_z > 0$ takav da je $K(z, r_z) \subseteq \Omega$. Za 'malene' $h \in \mathbb{C}$, takve da je $|h| < r_z$, neka je $\sigma_h\colon [0,1] \to \Omega$ put definiran sa $\sigma_h(t) := z + th$, dakle jedna parametrizacija segmenta $[z, z+h] \subseteq K(z, r_z) \subseteq \Omega$. Kako u definiciji vrijednosti funkcije F u točki $z + h$ možemo uzeti proizvoljan put (u Ω) od z_0 do $z + h$, možemo uzeti i put $\gamma + \sigma_h$. Stoga je

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\int_{\gamma+\sigma_h} f\,dz - \int_\gamma f\,dz\Big) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{\sigma_h} f\,dz \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th)\,h\,dt = \lim_{h\to 0} \int_0^1 f(z+th)\,dt\ .\end{aligned}$$

Kako je funkcija $(t, h) \mapsto f(z + th)$ neprekidna, limes po h i integral po t komutiraju, Korolar 19.6, pa je to dalje jednako

$$= \int_0^1 \lim_{h\to 0} f(z+th)\,dt\ ,$$

što je, zbog neprekidnosti funkcije $h \mapsto f(z + th)$, jednako

$$= \int_0^1 f(z)\,dt = f(z) \int_0^1 dt = f(z)\ .$$

Dakle, funkcija F derivabilna je, i njezina je derivacija zaista jednaka f. ■

Za neprekidnu funkciju $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ kažemo da ima *primitivnu funkciju* na Ω, ako postoji funkcija $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ takva da je $F'(z) = f(z)$ za sve $z \in \Omega$. Funkcija f ima na Ω *lokalno primitivnu funkciju*, ako oko svake točke $z \in \Omega$ postoji okolina (npr. otvoren krug) na kojoj f ima primitivnu funkciju.

Korolar 32.3 *Ako neprekidna funkciju $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ima primitivnu funkciju, tj. ako postoji derivabilna funkcija $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ takva da je $F' = f$, onda za svaki po dijelovima gladak put $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ vrijedi*

$$\int_\gamma f\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\,.$$ ■

Primjer 32.1 Promotrimo integral funkcije $f(z) := (z-z_0)^n$ po, pozitivno orijentiranoj, kružnici Γ radijusa r sa središtem u z_0. Jednostavna parametrizacija kružnice dana je funkcijom $\gamma(t) := z_0 + r\,e^{\mathrm{i}\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$, pa, za $n \neq -1$, imamo

$$\begin{aligned}\int_\Gamma (z-z_0)^n\,dz &= \int_0^{2\pi} \left(r\,e^{\mathrm{i}\,t}\right)^n r\,e^{\mathrm{i}\,t}\,\mathrm{i}\,dt \\ &= r^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}\,(n+1)t}\,\mathrm{i}\,dt = \frac{r^{n+1}}{n+1}\,e^{\mathrm{i}\,(n+1)t}\Big|_0^{2\pi} = 0\,,\end{aligned}$$

što smo mogli zaključiti i na temelju Cauchyjeva teorema za derivaciju, Teorem 32.2, jer je, za $n \neq -1$, funkcija $z \mapsto (z-z_0)^n$ derivacija funkcije $z \mapsto \dfrac{1}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ na probušenoj ravnini $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

Za $n = -1$ nalazimo

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r\,e^{\mathrm{i}\,t}}\,r\,\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\,t}\,dt = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} dt = 2\pi\mathrm{i}\,,$$

dakle, integral je različit od nule.

Specijalno je, dakle, integral $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{z} = 2\pi\mathrm{i} \neq 0$, što znači da *ne postoji* funkcija definirana na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ čija je derivacija jednaka $\dfrac{1}{z}$, što opet pokazuje da ne postoji funkcija $\ln\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$.

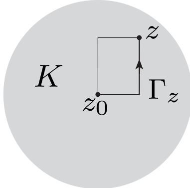
Pod *pravokutnikom* podrazumijevat ćemo uvijek pravokutnik kome su stranice paralelne koordinatnim osima (tj. *realnoj* i *imaginarnoj* osi). Ponekad se takav pravokutnik naziva *standardni* ili *koordinatni pravokutnik*.

U idućoj ćemo točki trebati sljedeću varijantu jednog smjera (nužnost) Cauchyjeva teorema za derivaciju:

Teorem 32.4 (o postojanju primitivne funkcije na krugu) *Neka je $K \subseteq \mathbb{C}$ otvoren krug, a $f\colon K \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija sa svojstvom da je $\int_{\partial I} f\,dz = 0$ po rubu svakog pravokutnika $I \subseteq K$. Tada f ima primitivnu funkciju na K.*

Dokaz: Neka je z_0 središte kruga K. Za svaki $z \in K$, pravokutnik I_z, kome su nasuprotni vrhovi z_0 i z, leži u K. Neka je $\Gamma_z \subseteq \partial I_z$ dio ruba pravokutnika I_z od z_0 do z (najprije 'horizontalno', tj. paralelno realnoj osi, a onda 'vertikalno', tj. paralelno imaginarnoj osi). Definirajmo

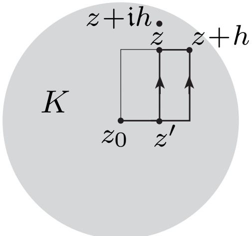
$$F(z) = U(z) + \mathrm{i}\, V(z) := \int_{\Gamma_z} f\, dz\ ,$$



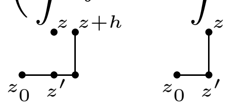
i pokažimo da je to derivabilna funkcija kojoj je derivacija jednaka f.

Za $z \in K$, neka je $r_z > 0$ takav da je $K(z, r_z) \subseteq K$. Za $h \in \mathbb{R}$ takav da je $|h| < r_z$, je segment $[z, z+h] \subseteq K$, pa je

$$\partial_x F(z) = \partial_x U(x,y) + \mathrm{i}\, \partial_x V(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h}$$

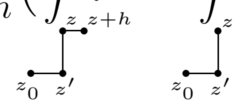


$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \Big(\int f\, dz - \int f\, dz \Big)$$



što je, jer je integral po rubu svakog pravokutnika u K jednak nuli, jednako

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \Big(\int f\, dz - \int f\, dz \Big) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f\, dz\ .$$



Parametriziramo li segment $[z, z+h]$ funkcijom $t \mapsto z + th$, $t \in [0,1]$, to je jednako

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th)\, h\, dt\ .$$

Kako je funkcija $(t,h) \mapsto f(z+th)$ neprekidna, to integral po t i limes po h komutiraju, Korolar 19.6, pa je to jednako

$$= \int_0^1 \lim_{h\to 0} f(z+th)\, dt = \int_0^1 f(z)\, dt = f(z)\ .$$

Na sličan način nalazimo

$$\partial_y F(z) = \partial_y U(x,y) + \mathrm{i}\, \partial_y V(x,y) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{F(z+\mathrm{i}\, h) - F(z)}{h} = \cdots = \mathrm{i}\, f(z)\ .$$

Kako je f neprekidna, zaključujemo da su funkcije $\partial_x U$, $\partial_x V$, $\partial_y U$ i $\partial_y V$ neprekidne u točki $z = (x,y)$, pa su, prema Teoremu 9.1, funkcije U i V diferencijabilne u $z = (x,y)$. Nadalje, iz dobivenih izraza za $\partial_x F$ i $\partial_y F$, vidimo da vrijede Cauchy-Riemannovi uvjeti, pa je F derivabilna u točki z, i vrijedi $F'(z) = f(z)$.

Budući je z bila proizvoljna točka kruga K, zaključujemo da je $F' = f$. ■

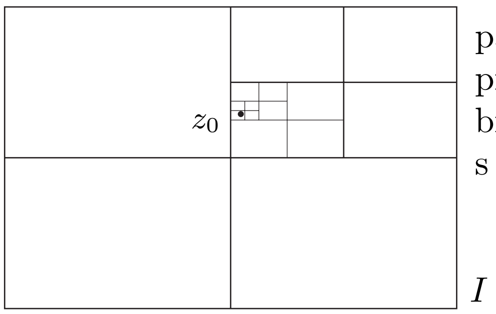
§ 33 Cauchyjev teorem

Fundamentalan teorem u teoriji funkcija kompleksne varijable je Cauchyjev teorem, koji govori o iščezavanju integrala derivabilne funkcije po zatvorenoj krivulji. Taj je teorem dokazao već sâm Cauchy uz pretpostavku da je derivacija funkcije koju integriramo, neprekidna. Važan je napredak bio dokaz Cauchyeva teorema *bez* pretpostavke o neprekidnosti derivacije. Ključni korak u tom dokazu je sljedeći teorem:

Teorem 33.1 (Goursat[1]-Pringsheimov[2] teorem) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $I \subseteq \Omega$ pravokutnik, a $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija. Tada je* $\int\limits_{\partial I} f\, dz = 0$.

Dokaz: Označimo s $J(I) := \bigl|\int\limits_{\partial I} f\, dz\bigr|$. Razdijelimo I na četiri međusobno sukladna pravokutnika Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, koji su svi slični pravokutniku I. Kako je $\int_{\partial I} = \int_{\partial Q_1} + \cdots + \int_{\partial Q_4}$, to je

$$J(I) = \Bigl|\int_{\partial I} f\, dz\Bigr| \le \Bigl|\int_{\partial Q_1} f\, dz\Bigr| + \cdots + \Bigl|\int_{\partial Q_4} f\, dz\Bigr| \,,$$



pa je integral po rubu najmanje jednog od tih pravokutnika, po modulu barem jednak četvrtini broja $J(I)$. Označimo jedan takav pravokutnik s I_1, i neka je $J(I_1) := |\int_{\partial I_1} f\, dz|$. Dakle

$$J(I_1) \ge \frac{1}{4} J(I) \,.$$

Razdijelimo sada I_1 na četiri sukladna pravokutnika, pa na isti način zaključujemo da za barem jednog od njih, nazovimo ga s I_2, vrijedi

$$J(I_2) \ge \frac{1}{4} J(I_1) \ge \frac{1}{4^2} J(I) \,.$$

[1]Edouard Jean-Baptiste Goursat (1858–1936), francuski matematičar
[2]Alfred Pringsheim (1850–1941), njemački matematičar, rođen u Poljskoj

Nastavimo li na isti način, dolazimo do niza pravokutnika I_n, $n \in \mathbb{N}$, takvih da je $I_{n+1} \subseteq I_n$, za sve n, i da je

$$J(I_n) \geq \frac{1}{4^n} J(I) \ . \tag{1}$$

Za dijametre tih pravokutnika vrijedi $\operatorname{diam} I_n = \dfrac{1}{2^n} \operatorname{diam} I$, pa se radi o silaznom nizu zatvorenih skupova kojima dijametri teže nuli. Prema Cantorovom teoremu o presjeku, Teorem 4.13, presjek tih pravokutnika je neprazan i sastoji se od jedne jedine točke, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n =: \{z_0\}$.

Funkcija f derivabilna je u točki z_0, pa za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za $0 < |z - z_0| < \delta$, vrijedi $\left| \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$, tj.

$$|z - z_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0| \ . \tag{2}$$

Neka je n tako velik da je I_n sadržan u otvorenom krugu oko z_0 radijusa δ. Kako funkcija $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ ima na Ω, čak na čitavom $\mathbb{C}$, primitivnu funkciju, to je prema Cauchyjevom teoremu za derivaciju, Teorem 32.2,

$$\int_{\partial I_n} \big(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\big)\, dz = 0 \ . \tag{3}$$

Stoga je, prema Lemi o ocjeni integrala, Lema 32.1,

$$J(I_n) = \Big| \int_{\partial I_n} f\, dz \Big| = \Big| \int_{\partial I_n} \big(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\big)\, dz \Big| \leq M s_n \ , \tag{4}$$

gdje je $M := \max\{|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| : z \in \partial I_n\}$, a s_n je opseg pravokutnika I_n.

Međutim, za svaki $z \in \partial I_n$ je

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \overset{(2)}{\leq} \varepsilon\, |z - z_0| < \varepsilon \cdot \frac{1}{2} s_n \ ,$$

pa je $M < \dfrac{1}{2}\, \varepsilon s_n$, te zbog (4) vrijedi

$$J(I_n) < \frac{1}{2}\, \varepsilon s_n^2 \ . \tag{5}$$

Prema konstrukciji je $s_n = \frac{1}{2^n}\, s$, gdje je s opseg pravokutnika I, pa je

$$J(I) \overset{(1)}{\leq} 4^n J(I_n) \overset{(5)}{\leq} \frac{1}{2}\, 4^n \varepsilon s_n^2 = \frac{1}{2}\, 4^n \varepsilon \Big(\frac{1}{2^n}\Big)^2 s^2 = \frac{1}{2}\, \varepsilon s^2 \; .$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, zaključujemo da je $J(I) = 0$, pa je i $\int\limits_{\partial I} f\, dz = 0$. ■

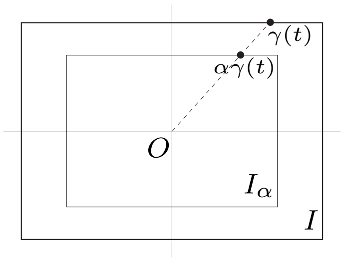
Goursat-Pringsheimov teorem govori da ako je funkcija $f\colon I \to \mathbb{C}$ derivabilna, tj. ima derivabilno proširenje na neku okolinu pravokutnika I, onda je integral funkcije f po rubu ∂I pravokutnika I, jednak nuli. U nekim je situacijama potreban nešto jači teorem — teorem koji daje isti zaključak, ali uz slabije pretpostavke.

Teorem 33.2 (Cauchyjev teorem za pravokutnik) *Neka je $f\colon I \to \mathbb{C}$ funkcija koja je neprekidna na zatvorenom pravokutniku $I \subseteq \mathbb{C}$ i takva da je derivabilna na otvorenom pravokutniku $\mathring{I} := I \setminus \partial I$, osim eventualno u konačno mnogo točaka (u kojima je samo neprekidna). Tada je $\int\limits_{\partial I} f\, dz = 0$.*

Dokaz: Dokažimo teorem najprije uz pretpostavku da je f derivabilna na cijelom otvorenom pravokutniku $\mathring{I}$. Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je središte pravokutnika I u ishodištu 0. U protivnom, zamjenom varijabli, $w := z - z_0$, gdje je z_0 središte pravokutnika I, dobivamo

$$\int_{\partial I} f(z)\, dz = \int_{\partial I_{z_0}} g(w)\, dw \; ,$$

pri čemu je $I_{z_0} := I - z_0 = \{z - z_0 : z \in I\}$ pravokutnik dobiven translacijom pravokutnika I za $-z_0$, tako da mu središte padne u ishodište, a funkcija $g(w) := f(w + z_0)$ je neprekidna na I_{z_0} i derivabilna na $\mathring{I}_{z_0}$.



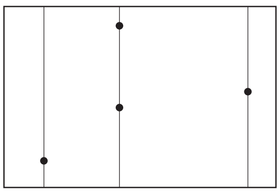
Za broj $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ označimo sada s I_α pravokutnik dobiven od pravokutnika I homotetijom iz ishodišta i koeficijentom α. Tada je $I_\alpha \subseteq \mathring{I}$, a kako je f derivabilna na $\mathring{I}$, po Goursat-Pringsheimovom teoremu zaključujemo da je $\int\limits_{\partial I_\alpha} f\, dz = 0$, za sve $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$.

Neka je $t \mapsto \gamma(t)$, $t \in [a, b]$, po dijelovima glatka parametrizacija ruba ∂I pravokutnika I. Tada je $t \mapsto \alpha\,\gamma(t)$, $t \in [a, b]$, po dijelovima glatka parametrizacija ruba ∂I_α pravokutnika I_α.

Da je parametrizacija γ glatka, tj. funkcija γ' neprekidna, bila bi neprekidna i funkcija $(\alpha, t) \mapsto f(\alpha\,\gamma(t))\,\alpha\,\gamma'(t)$, pa bi limes po α i integral po t komutirali. Imali bismo tada

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\alpha\to 1} \int_{\partial I_\alpha} f\,dz = \lim_{\alpha\to 1} \int_a^b f(\alpha\,\gamma(t))\,\alpha\,\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_a^b \lim_{\alpha\to 1} f(\alpha\,\gamma(t))\,\alpha\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_{\partial I} f\,dz\,. \end{aligned}$$

Kako je, međutim, parametrizacija γ samo po dijelovima glatka, to je njena derivacija γ' neprekidna osim u konačno mnogo točaka, tj. nije neprekidna u, naprimjer, tri točke. Stoga treba integral $\int_a^b f(\alpha\gamma(t))\alpha\gamma'(t)\,dt$ rastaviti na četiri dijela na kojima je γ' neprekidna, provesti gornji račun na svakom od tih dijelova, i rezultate zbrojiti. Opet dobijemo $\int_{\partial I} f\,dz = 0$.



U općem slučaju, kada f u konačno mnogo točaka možda nije derivabilna, kroz te točke povučemo paralele sa, naprimjer, imaginarnom osi, i tako razdijelimo pravokutnik I na nekoliko manjih pravokutnika. Na svakom od tako dobivenih pravokutnika funkcija f je neprekidna, a na nutrini i derivabilna, pa je, prema upravo dokazanom, integral po rubu svakog od tih pravokutnika, jednak nuli. Zbroj integrala po rubovima tih pravokutnika, jednak je integralu po rubu pravokutnika I, pa je $\int\limits_{\partial I} f\,dz = 0$. ■

Kombinacijom ranijih teorema, dobivamo sada

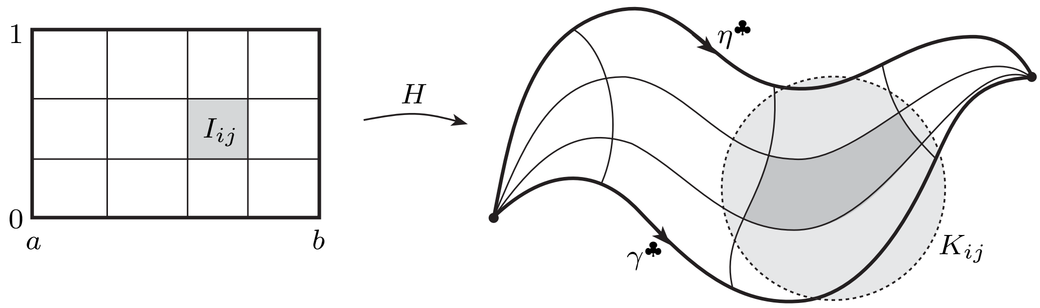
Teorem 33.3 (Cauchyjev teorem za krug) *Neka je $K \subseteq \mathbb{C}$ (otvoren) krug, a $f\colon K \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija, koja je i derivabilna, osim eventualno u konačno mnogo točaka. Tada je $\int\limits_\gamma f\,dz = 0$, za sve po dijelovima glatke zatvorene puteve γ u K.*

Dokaz: Prema Cauchyjevu teoremu za pravokutnik, $\int_{\partial I} f\,dz = 0$ za svaki pravokutnik $I \subseteq K$. Stoga, jer je funkcija f neprekidna, prema Teoremu o postojanju primitivne funkcije na krugu, Teorem 32.4, postoji derivabilna funkcija $F\colon K \to \mathbb{C}$ takva da je $F' = f$. Prema Cauchyjevom teoremu za derivaciju, Teorem 32.2, integral funkcije f ne ovisi o putu, tj. $\int\limits_\gamma f\,dz = 0$ za sve po dijelovima glatke zatvorene puteve u K. ■

Odgovarajućom modifikacijom, teorem o postojanju primitivne funkcije, nije teško poopćiti na konveksne ili čak na tzv. zvjezdaste skupove, pa se i prethodni teorem lako može poopćiti na takve skupove. Međutim, opći Cauchyjev teorem, koji ćemo sada dokazati, sve te varijante sadrži kao specijalne slučajeve.

Teorem 33.4 (Opći Cauchyjev teorem) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, i neka je $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija koja je i derivabilna, osim eventualno u konačno mnogo točaka. Tada je $\int\limits_\gamma f\,dz = 0$ za svaki zatvoren, u Ω nulhomotopan, po dijelovima gladak put γ.*

Dokaz: Dovoljno je dokazati da ako su $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ i $\eta\colon [a,b] \to \Omega$ homotopni po dijelovima glatki putevi sa zajedničkim krajevima, tj. $\gamma(a) = \eta(a)$ i $\gamma(b) = \eta(b)$, onda je $\int_\gamma f\,dz = \int_\eta f\,dz$.



Dokaz je gotovo identičan dokazu Teorema 26.3 da su integrali zatvorene diferencijalne 1-forme po homotopnim putevima jednaki. Neka je, dakle, $H\colon [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ PDG homotopija od γ do η. Odaberimo razdiobu ρ pravokutnika $I = [a,b] \times [0,1]$ tako da H preslikava svaki pravokutnik I_{ij} te razdiobe, u neki krug K_{ij} koji je sadržan u Ω. Restrikcija homotopije H na rub ∂I_{ij} je zatvoren PDG put u krugu K_{ij}, pa je, prema Cauchyjevu teoremu za krug, $\int_{H|_{\partial I_{ij}}} f\,dz = 0$. Sumiranjem svih tih integrala, zaključujemo da je $\int_{H|_{\partial I}} f\,dz = 0$. Kako su restrikcije preslikavanja H na lijevu i desnu stranicu pravokutnika I konstantni putevi, to je $\int_{H|_{\partial I}} f\,dz = \int_\gamma f\,dz - \int_\eta f\,dz$, odakle slijedi tvrdnja teorema. ■

Korolar 33.5 (Cauchyjev teorem za jednostavno povezano područje) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jednostavno povezano područje, a $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija, koja je i derivabilna, osim eventualno u konačno mnogo točaka. Tada je $\int\limits_\gamma f\,dz = 0$ za svaki po dijelovima gladak zatvoren put γ u Ω.* ■

Napomena 33.1 Postoji i "kraći dokaz" Cauchyjeva teorema. Naime, za derivabilnu funkciju $f = u + \mathrm{i}\,v\colon \Omega \to \mathbb{C}$ i, barem za jednostavno zatvorenu krivulju Γ, koja je nulhomotopna u Ω, tj. takva je da je i njezino unutrašnje područje B sadržano u Ω, koristeći se Greenovim teoremom, Teorem 27.5, i Cauchy-Riemannovim uvjetima, Teorem 31.1, dobivamo

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f\,dz &= \int_\Gamma u\,dx - v\,dy \;+\; \mathrm{i}\int_\Gamma v\,dx + u\,dy \\ &\overset{\text{Green}}{=} \iint_B (-\partial_x v - \partial_y u)\,dx\,dy \;+\; \mathrm{i}\iint_B (\partial_x u - \partial_y v)\,dx\,dy \overset{\text{(CR)}}{=} 0\,.\end{aligned}$$

Međutim, da bismo mogli koristiti Greenov teorem, morale bi funkcije u i v biti diferencijabilne klase C^1, tj. derivacija f' morala bi biti neprekidna, dok smo mi bili pretpostavili samo postojanje derivacije, a u konačno mnogo točaka čak samo neprekidnost. To je značajna razlika, i, kao što ćemo kasnije vidjeti, važno je imati dokaz Cauchyjeva teorema *bez pretpostavke o neprekidnosti derivacije.*

Povijest ovog važnog teorema, koji predstavlja veleban ulaz u teoriju funkcija kompleksne varijable, dugačka je i zanimljiva. Originalni je dokaz dao Cauchy 1825. godine, uz dodatnu pretpostavku da je derivacija neprekidna. Kasnije tokom devetnaestog stoljeća, pojavilo se više dokaza tog teorema i uz različite pretpostavke o tipu puta integracije — nekad uz prešutno, a nekad uz eksplicitno pretpostavljenu neprekidnost derivacije. Godine 1884. Goursat je objavio jedan jednostavniji dokaz ovog teorema, uz samo jednu, 'očitu' pretpostavku, da teorem vrijedi za dvije jednostavne funkcije: konstantnu funkciju i identitetu, ali bez pretpostavke o neprekidnosti derivacije. Barem je tako Goursat tvrdio.

Alfred Pringsheim je 1895. pomno analizirajući Goursatov dokaz, ustvrdio da se u dokazu prešutno pretpostavlja *uniformna derivabilnost*, za što je pokazao da je ekvivalentno pretpostavci o neprekidnosti derivacije. Stoga Goursatov dokaz predstavlja samo pojednostavljenje drugih dokaza Cauchyjeva teorema, ali ne i oslabljenje pretpostavki. Pringsheim je izrazio svoje uvjerenje da teorem vrijedi samo uz pretpostavku da derivacija postoji, bez pretpostavke o njezinoj neprekidnosti, ali je taj problem još uvijek ostao otvoren.

Ova Pringsheimova kritika proizvela je pravu buru, pa su, između ostalog, 1900. objavljena dva nova dokaza. U jednom je Goursat ponovio svoj raniji dokaz, ali uz više pažnje i uz izvjesne pretpostavke o tipu puta integracije, a u drugom je Moore[1] dao svoj dokaz Cauchyjeva teorema, uz nešto drugačije pretpostavke. U svom odgovoru 1901. Pringsheim je prigovorio da su u oba rada pretpostavke o tipu puta integracije previše restriktivne, pa je kombinirajući i profinivši te dokaze, dobio Cauchyjev teorem bez pretpostavke o neprekidnosti derivacije, i to za zatvorene rektifikabilne puteve. Dvije godine kasnije,

[1]Eliakim Hastings Moore (1862–1932), američki matematičar

Pringsheim se vratio Cauchyjevu teoremu, i dao dokaz u kojem koristi tehniku dijeljenja pravokutnika na četiri sukladna pravokutnika, kao što smo mi radili u dokazu Teorema 33.1 (s tim da je on radio s trokutima, a ne s pravokutnicima). Zato smo ovdje taj teorem i nazvali Goursat-Pringsheimovim.

Time, međutim, priča o Cauchyjevu teoremu nije bila gotova. Još su se idućih tridesetak godina matematičari, među njima i neki vrlo ugledni, prepucavali o detaljima, prioritetima i atribucijama. Mnogi zanimljivi detalji o događanjima vezanim uz Cauchyjev teorem mogu se naći u članku J. Graya[1].

Dokaz činjenice, da je derivacija kompleksne funkcije uvijek neprekidna, a koji se ne oslanja na Cauchyjev teorem, napravljen je istom početkom 1960-tih godina, i, naravno, nije ništa kraći niti jednostavniji od dokaza kojeg ćemo mi prikazati, tj. dokaza koji koristi Cauchyjev teorem.

§ 34 Cauchyjeva integralna formula

Kao posljedicu Cauchyjevog teorema, dokazat ćemo sada Cauchyjevu integralnu formulu — rezultat iz kojeg će, kao posljedice, slijediti mnogi, često i neočekivani rezultati o kompleksnim funkcijama.

Dokažimo najprije jedan pomoćni rezultat:

Propozicija 34.1 *Neka je γ po dijelovima gladak zatvoren put u $\mathbb{C}$, i neka je $z_0 \notin \gamma^\clubsuit$. Tada je vrijednost*

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

cijeli broj.

Dokaz: Neka je $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ po dijelovima gladak zatvoren put, $\gamma(a) = \gamma(b)$. Definirajmo funkciju $h\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ s

$$h(t) := \int_a^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u) - z_0}\, du \,.$$

To je neprekidna funkcija, a u točkama u kojima je γ' neprekidna, h ima i derivaciju jednaku

$$h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} \,.$$

[1] Jeremy Gray. Goursat, Pringsheim, Walsh, and the Cauchy integral Theorem, *Mathematical Intelligencer*, **22** (4) (2000), 60–66,77.

Primijetimo, nadalje, da je $h(a) = 0$.

Promotrimo funkciju $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ definiranu s

$$\varphi(t) := e^{-h(t)}(\gamma(t) - z_0)\ .$$

Funkcija φ derivabilna je tamo gdje je i h derivabilna, i vrijedi

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= -e^{-h(t)}\, h'(t)\,(\gamma(t) - z_0) + e^{-h(t)}\,\gamma'(t) \\ &= -e^{-h(t)}\,\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}\,(\gamma(t) - z_0) + e^{-h(t)}\,\gamma'(t) = 0\ .\end{aligned}$$

Iako za funkciju φ znamo samo da je po dijelovima derivabilna, jer je γ samo po dijelovima glatka, ipak, zbog neprekidnosti funkcije φ, zaključujemo da je ona konstantna. Stoga je $\varphi(b) = \varphi(a)$, tj.

$$e^{-h(b)}\,(\gamma(b) - z_0) = e^{-h(a)}\,(\gamma(a) - z_0)\ .$$

Kako je $\gamma(b) = \gamma(a)$ i $h(a) = 0$, odavde slijedi $e^{h(b)} = 1$, tj. $h(b) = 2k\pi\mathrm{i}$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. Dakle,

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_a^b \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u) - z_0}\,du = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}h(b) = k \in \mathbb{Z}\ . \qquad \blacksquare$$

Korolar 34.2 *Za po dijelovima gladak zatvoren put γ u $\mathbb{C}$ i točku $z_0 \notin \gamma^\clubsuit$, broj $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$ jednak je indeksu puta γ s obzirom na točku z_0, tj.*

$$\nu(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}\ .$$

(Definicijom 25.2 smo indeks zatvorenog puta γ s obzirom na točku P_0, bili definirali kao $\nu(\gamma, P_0) := \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \omega_{\vartheta,P_0}$, gdje je ω_{ϑ,P_0} kutna diferencijalna 1-forma, definirana s $\omega_{\vartheta,P_0}(x,y) := \frac{-(y - y_0)\,dx + (x - x_0)\,dy}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.)

Dokaz: Napravit ćemo dokaz za točku $z_0 = 0$. Opći slučaj dobije se translacijom za $-z_0$, tj. zamjenom $w := z - z_0$. Prema definiciji integrala je

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{dz}{z} &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{x-\mathrm{i}\,y}{x^2+y^2}\,(dx+\mathrm{i}\,dy)\\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\Big(\int_\gamma \frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\int_\gamma \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}\Big)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2} - \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_\gamma \frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}\,. \qquad (*)\end{aligned}$$

Prema prethodnoj propoziciji je $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{dz}{z}$ cijeli, dakle realan broj pa je njegov imaginarni dio jednak nuli. Stoga je drugi od dva integrala diferencijalnih 1-formi duž puta γ u posljednjem retku prethodne formule, jednak nuli, pa je

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \omega_\vartheta\ ,$$

što je, prema definiciji, upravo indeks puta γ s obzirom na ishodište $O = (0,0)$. ■

Napomena 34.1 Da je imaginaran dio u formuli $(*)$ jednak nuli, mogli smo se uvjeriti i direktno. Naime, na probušenoj ravnini $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, diferencijalna 1-forma $\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$ je egzaktna, jer je jednaka (vanjskom) diferencijalu funkcije $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, pa je, prema Teoremu 25.2, njezin integral po zatvorenom PDG putu γ koji ne prolazi ishodištem, jednak nuli.

Primjer 34.1 Geometrijsku interpretaciju indeksa, kao broja obilazaka zatvorenog puta oko, naprimjer, ishodišta, možemo, koristeći kompleksnu logaritamsku funkciju, opisati i ovako. Neka je γ PDG put u skupu $\mathbb{C}_\pi$ — komplementu negativnog dijela realne osi, od točke z_0 do z_1. Tada je

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \ln z\,\Big|_{z_0}^{z_1} = \ln\left|\frac{z_1}{z_0}\right| + \mathrm{i}\,(\arg z_1 - \arg z_0)\ .$$

Ista će formula vrijediti i ako se čitav put γ nalazi u skupu $\mathbb{C}_\vartheta$ — komplementu polupravca iz ishodišta koji s pozitivnim dijelom realne osi zatvara kut ϑ, s tim da treba koristiti i odgovarajuću logaritamsku funkciju $\mathbb{C}_\vartheta \to \mathbb{C}$.

Ako je put γ zatvoren, podijelimo ga točkama $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_k = z_0$ na dijelove, tako da se svaki dio puta između točaka z_{j-1} i z_j nalazi čitav u nekom $\mathbb{C}_{\vartheta_j}$.

Kako je $z_k = z_0$, zbrajanjem dobivamo

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} (\arg z_j - \arg z_{j-1}) \;,$$

gdje u j-tom sumandu treba za kutove $\arg z$ uzimati one koji pripadaju skupu $\mathbb{C}_{\vartheta_j}$. Suma svih tih razlika kutova bit će upravo broj obilazaka puta γ pomnožen s 2π.

Dokažimo sada nekoliko osnovnih svojstava indeksa zatvorenog puta s obzirom na točku. Ta smo svojstva mogli, koristeći se Teoremom 26.4 i njegovom posljedicom Korolarom 26.5, dokazati i ranije, u četvrtom poglavlju. Kako će nam ta svojstva zaista trebati istom sada, dokazat ćemo ih ovdje koristeći Cauchyjev teorem, i činjenicu dokazanu prethodnim Korolarom 34.2, da se indeks može definirati i kao integral odgovarajuće kompleksne funkcije.

Propozicija 34.3 (osnovna svojstva indeksa)

(*i*) *Za čvrstu točku z_0, indeks $\nu(\gamma, z_0)$ ne mijenja se ako se γ neprekidno deformira, i niti u jednom času ne prolazi kroz z_0, tj. $\nu(\gamma_1, z_0) = \nu(\gamma_2, z_0)$ ako su zatvoreni putevi γ_1 i γ_2 homotopni u $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.*

(*ii*) *Za čvrst put γ, funkcija $z \mapsto \nu(\gamma, z)$ konstantna je na svakom krugu koji je disjunktan s $\gamma^\clubsuit$. Stoga je indeks $\nu(\gamma, z)$ konstantan na komponentama povezanosti komplementa od $\gamma^\clubsuit$, tj. skupa $\mathbb{C} \setminus \gamma^\clubsuit$.*

(*iii*) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jednostavno povezano područje, γ po dijelovima gladak zatvoren put u Ω i $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Tada je $\nu(\gamma, z_0) = 0$.*

Stoga, ako je γ proizvoljan zatvoren PDG put u $\mathbb{C}$, a z_0 točka iz neomeđene komponente povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus \gamma^\clubsuit$, onda je $\nu(\gamma, z_0) = 0$.

(*iv*) *Neka je Γ (pozitivno orijentirana) kružnica sa središtem u z_0 i radijusom r. Tada je*

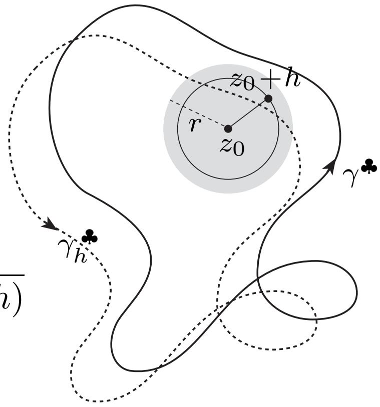
$$\nu(\Gamma, z) = \begin{cases} 1 \,, & \text{za } |z - z_0| < r \\ 0 \,, & \text{za } |z - z_0| > r \end{cases} .$$

Nije teško pokazati da se pri prijelazu iz jedne komponente povezanosti skupa $\mathbb{C} \setminus \gamma^\clubsuit$ u susjednu, tj. pri prijelazu jednom preko krivulje $\gamma^\clubsuit$, indeks promijeni za ± 1 (i to ako gledamo u smjeru orijentacije krivulje, onda se pri prelasku slijeva nadesno indeks smanji za 1, a pri prelasku zdesna nalijevo, poveća za 1).

Dokaz: (i) Kako je funkcija $z \mapsto \dfrac{1}{z-z_0}$ derivabilna na $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, to slijedi neposredno iz općeg Cauchyjeva teorema, Teorem 33.4.

(ii) Neka je $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ po dijelovima gladak zatvoren put, neka je $z_0 \notin \gamma^\clubsuit$, i neka je $r > 0$ takav da krug $K(z_0, r)$ ne siječe $\gamma^\clubsuit$. Za $h \in \mathbb{C}$ takav da je $|h| < r$, označimo s $\gamma_h := \gamma - h$ put koji dobijemo tako da γ translatiramo za $-h$. Tada su γ i γ_h homotopni, s međunivoima $\gamma_{sh} := \gamma - sh$, $s \in [0,1]$, i homotopija ne prolazi točkom z_0. Prema (i) je, dakle, $\nu(\gamma_h, z_0) = \nu(\gamma, z_0)$. Međutim, položaj točke z_0 prema putu γ_h isti je kao položaj točke $z_0 + h$ prema putu γ, pa je $\nu(\gamma_h, z_0) = \nu(\gamma, z_0 + h)$. Točnije,

$$\begin{aligned}\nu(\gamma_h, z_0) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_h} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_a^b \frac{\gamma'(t)\,dt}{(\gamma(t) - h) - z_0} \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_a^b \frac{\gamma'(t)\,dt}{\gamma(t) - (z_0 + h)} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{dz}{z - (z_0 + h)} \\ &= \nu(\gamma, z_0 + h)\,.\end{aligned}$$



Stoga je $\nu(\gamma, z_0 + h) = \nu(\gamma, z_0)$ za $|h| < r$, tj. funkcija $z \mapsto \nu(\gamma, z)$ je konstantna na krugu $K(z_0, r)$.

(iii) Prvi dio tvrdnje je neposredna posljedica Cauchyjeva teorema za jednostavno povezano područje, Korolar 33.5. Naime, funkcija $z \mapsto \dfrac{1}{z - z_0}$ je derivabilna na $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, pa je derivabilna i na Ω, a svaki zatvoren PDG put γ u Ω je nulhomotopan u Ω zbog jednostavne povezanosti.

Za dokaz drugog dijela tvrdnje, primijetimo, najprije, da se komplement $\mathbb{C} \setminus \gamma^\clubsuit$ traga zatvorenog puta γ u ravnini, sastoji od nekoliko, možda i beskonačno mnogo, komponenti povezanosti, od kojih je jedna, i samo jedna, neomeđen skup, a ostale, ima ih barem jedna, su omeđeni otvoreni skupovi. Kako je skup $\gamma^\clubsuit$ kompaktan, dakle i omeđen, postoji dovoljno velik otvoren krug koji ga sadrži. Prema prvom dijelu tvrdnje, indeks puta γ obzirom na svaku točku izvan tog velikog kruga, jednak je nuli. Zbog tvrdnje (ii) je onda indeks puta γ jednak nuli i obzirom na svaku točku neomeđene komponente skupa $\mathbb{C} \setminus \gamma^\clubsuit$.

(iv) Da je indeks kružnice Γ s obzirom na svaku točku otvorenog kruga koju ta kružnica obrubljuje, jednak 1, slijedi iz (ii) i činjenice da je $\int\limits_\Gamma \dfrac{dz}{z - z_0} = 2\pi\mathrm{i}$, vidi Primjer 32.1. S druge strane, prema tvrdnji (iii), indeks kružnice jednak je nuli za svaku točku izvan tog kruga. ∎

Sada možemo dokazati najavljivan

Teorem 34.4 (Cauchyjeva integralna formula) *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *otvoren skup,* $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *derivabilna funkcija, a* γ *u* Ω *nulhomotopan, po dijelovima gladak zatvoren put. Tada za svaku točku* $z_0 \in \Omega \setminus \gamma^\clubsuit$ *vrijedi*

$$\nu(\gamma, z_0)\, f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz\ . \tag{C}$$

Dokaz: Definirajmo funkciju $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ s

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & , \ z \neq z_0 \\ f'(z_0) & , \ z = z_0 \end{cases} .$$

Funkcija g derivabilna je na $\Omega \setminus \{z_0\}$, i neprekidna je na čitavom skupu Ω. Prema općem Cauchyjevu teoremu, Teorem 33.4, $\int_\gamma g\, dz = 0$. Stoga je

$$0 = \int_\gamma g\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \ - \underbrace{\int_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz}_{= f(z_0)\, \nu(\gamma, z_0)\, 2\pi\mathrm{i}}\ ,$$

odakle slijedi Cauchyjeva integralna formula (C). ∎

U primjenama je γ najčešće jednostavno zatvoren po dijelovima gladak put koji jednom obilazi točku z_0, tj. trag takvog puta je kontura u čijem se unutrašnjem području nalazi točka z_0, pa je indeks puta γ s obzirom na z_0 jednak 1. U tom slučaju, Cauchyjeva integralna formula poprima sljedeći jednostavan oblik:

Korolar 34.5 *Neka je* $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *derivabilna funkcija,* $\Gamma \subseteq \Omega$ *pozitivno orijentirana kontura čije je unutrašnje područje sadržano u* Ω*, i neka točka* z_0 *pripada tom unutrašnjem području. Tada je*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz\ .$$ ∎

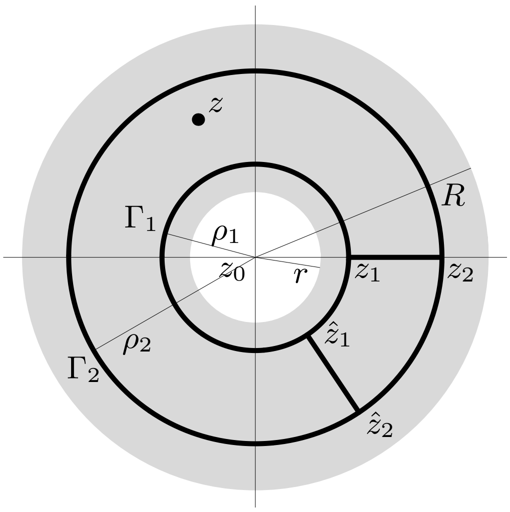
Ovaj korolar pokazuje da ako je f derivabilna funkcija na nekom području, i njezine su vrijednosti poznate u svim točkama neke nulhomotopne konture, onda su poznate vrijednosti funkcije f i u svim točkama unutrašnjeg područja te konture. U narednim ćemo teoremima ovu činjenicu još bolje razjasniti.

Odsada će nam točka z_0 biti varijabilna, pa ćemo ju označavati sa z, a varijablu integracije sa ζ.

Korolar 34.6 *Neka je* $V := V(z_0; r, R) := \{z : r < |z - z_0| < R\} \subseteq \mathbb{C}$ *kružni vijenac, neka je* $f\colon V \to \mathbb{C}$ *derivabilna funkcija, te neka su* Γ_1 *i* Γ_2 *pozitivno orijentirane kružnice oko* z_0 *radijusa* ρ_1 *i* ρ_2*, gdje je* $0 < r < \rho_1 < \rho_2 < R$*. Tada za svaku točku* $z \in V(z_0; \rho_1, \rho_2)$*, tj.* $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$*, vrijedi*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\ .$$

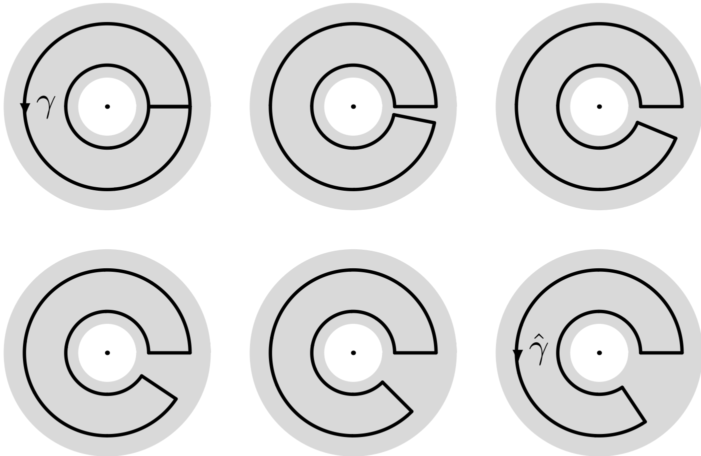
Dokaz: Neka je z neka točka vijenca između kružnica Γ_1 i Γ_2. Odaberimo dva bliska radijusa veće kružnice, Γ_2, tako da kružni isječak određen tim radijusima ne sadrži točku z, i neka su z_1, $\hat{z}_1$, z_2 i $\hat{z}_2$ točke tih radijusa koje leže na kružnicama Γ_1 odnosno Γ_2 (vidi sliku). Neka je γ zatvoren put koji počinje u točki z_1 i trag mu je $\gamma^\clubsuit = [z_1, z_2] + \Gamma_2 + [z_2, z_1] - \Gamma_1$, a $\hat{\gamma}$ neka je put koji počinje također u točki z_1, a trag mu je $\hat{\gamma}^\clubsuit = [z_1, z_2] + \hat{\Gamma}_2 + [\hat{z}_2, \hat{z}_1] - \hat{\Gamma}_1$, gdje su $\hat{\Gamma}_1$ i $\hat{\Gamma}_2$ dijelovi kružnica Γ_1 i Γ_2, iz kojih su izvađeni mali lukovi od z_1 do $\hat{z}_1$, odnosno od z_2 do $\hat{z}_2$.



Putevi γ i $\hat{\gamma}$ su homotopni u $V \setminus \{z\}$, i na tom je otvorenom skupu funkcija $\zeta \mapsto \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ derivabilna, pa su njezini integrali po tim putevima jednaki. Kako je $\hat{\gamma}^\clubsuit$ kontura i z se nalazi u njezinom unutrašnjem području, to je prema prethodnom korolaru,

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\hat{\gamma}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\ , \end{aligned}$$

jer se integrali po segmentima $[z_2, z_1]$ i $[z_1, z_2]$ uzajamno dokidaju. ■



Početni i završni stadij homotopije $\hat{\gamma} \simeq \gamma$, i četiri međunivoa.

Cauchyjeva integralna formula i njezini korolari pokazuju da se vrijednost derivabilne funkcije na odgovarajućem području može izračunati kao integral po nekom putu. Zato je od interesa proučavati funkcije koje su tako i definirane.

Teorem 34.7 (o derivabilnosti funkcije definirane integralom) *Neka je γ po dijelovima gladak put u $\mathbb{C}$ (ne nužno zatvoren), neka je $\gamma^\clubsuit \subseteq \mathbb{C}$ njegov trag, i neka je $\psi\colon \gamma^\clubsuit \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija. Tada je funkcija $f\colon \mathbb{C} \setminus \gamma^\clubsuit \to \mathbb{C}$ definirana s*

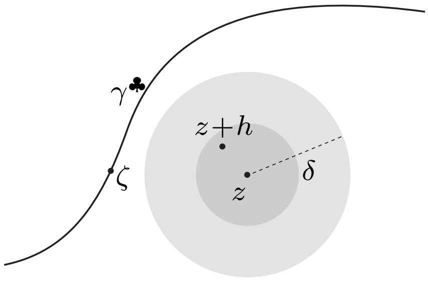
$$f(z) := \int_\gamma \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

derivabilna na $\mathbb{C} \setminus \gamma^\clubsuit$, i njezina je derivacija jednaka

$$f'(z) = \int_\gamma \frac{\psi(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta\ . \tag{1}$$

Štoviše, funkcija $f'\colon \mathbb{C} \setminus \gamma^\clubsuit \to \mathbb{C}$ je neprekidna.

Dokaz: Fiksirajmo točku $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^\clubsuit$ i pokažimo da je formulom (1) dâna derivacija funkcije f u točki z. Neka je $\delta > 0$ takav da je $K(z,\delta) \subseteq \mathbb{C} \setminus \gamma^\clubsuit$. Tada za sve $h \in \mathbb{C}$ takve da je $|h| < \frac{1}{2}\,\delta$, i sve $\zeta \in \gamma^\clubsuit$, vrijedi



$$\begin{aligned} |\zeta - z| &> \delta \\ |\zeta - (z+h)| &> \tfrac{1}{2}\,\delta\ . \end{aligned} \tag{2}$$

Stoga je

$$
\begin{aligned}
\Big|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &- \int_\gamma \frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{h}\Big(\int_\gamma \frac{\psi(\zeta)}{\zeta-z-h}\,d\zeta - \int_\gamma \frac{\psi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\Big) - \int_\gamma \frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\Big| \\
&= \Big|\int_\gamma \frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}\,d\zeta - \int_\gamma \frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\Big| \\
&= |h|\cdot\Big|\int_\gamma \frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}\,d\zeta\Big|\,.
\end{aligned}
$$

Označimo li s $M := \max\{|\psi(\zeta)| : \zeta \in \gamma^\clubsuit\}$, primjenom Leme 32.1 o ocjeni integrala, zbog nejednakosti (2), to je dalje

$$
\le |h|\,\frac{M}{\frac{1}{2}\,\delta\cdot\delta^2}\,\ell(\gamma)\;,
$$

gdje je, kao i inače, $\ell(\gamma)$ duljina puta γ.

Odavde slijedi da je $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \int_\gamma \frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta$, tj. funkcija f derivabilna je u točki z, a kako je $z \in \mathbb{C}\setminus\gamma^\clubsuit$ bila proizvoljna točka, zaključujemo da je f derivabilna, i njezina je derivacija zaista dâna formulom (1).

Ostaje pokazati da je ta derivacija neprekidna funkcija. Uz iste oznake z, δ, h i M kao ranije, koristeći Lemu o ocjeni integrala i nejednakosti (2), imamo

$$
\begin{aligned}
|f'(z+h)-f'(z)| &= \Big|\int_\gamma \Big(\frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z-h)^2} - \frac{\psi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\Big)\,d\zeta\Big| \\
&\overset{\text{(razlika kvadrata)}}{=} \Big|\int_\gamma \frac{h\,\psi(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}\Big(\frac{1}{\zeta-z-h}+\frac{1}{\zeta-z}\Big)\,d\zeta\Big| \\
&\le |h|\,\frac{M}{\frac{1}{2}\,\delta^2}\Big(\frac{1}{\frac{1}{2}\,\delta}+\frac{1}{\delta}\Big)\,\ell(\gamma) = |h|\,\frac{6M}{\delta^3}\,\ell(\gamma)\;,
\end{aligned}
$$

pa je $\lim\limits_{h\to 0} f'(z+h) = f'(z)$, tj. f' je neprekidna. ■

Definicija 34.1 Za funkciju $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ kažemo da je ***holomorfna*** ako je derivabilna i derivacija f' je neprekidna na Ω. Za funkciju f kažemo da je ***holomorfna u točki*** z_0 ako postoji okolina točke z_0 na kojoj je f holomorfna.

Skup svih funkcija holomorfnih na otvorenom skupu Ω, označavat ćemo s $H(\Omega)$.

Prethodni teorem kaže, dakle, da je svaka funkcija koja je definirana pomoću neke neprekidne funkcije integralom kao u (1), holomorfna na komplementu traga puta integracije.

Koristeći se prethodnim teoremom i Cauchyjevom integralnom formulom, točnije Korolarom 34.5, dobivamo

Korolar 34.8 (Teorem o holomorfnosti derivabilne funkcije) *Svaka je derivabilna funkcija $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna, tj. $D(\Omega) = H(\Omega)$.*

Dokaz: Oko zadane točke $z_0 \in \Omega$ odaberemo dovoljno malenu kružnicu Γ_0, tako da zajedno s krugom kojeg obrubljuje, leži u Ω. Prema Korolaru 34.5, za svaki z iz toga kruga je $f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$. Budući da je funkcija f, koja se nalazi u brojniku razlomka pod integralom, neprekidna, prema prethodnom Teoremu 34.7, funkcija f holomorfna je na krugu unutar Γ_0, tj. na okolini točke z_0. Zbog proizvoljnosti odabira točke z_0, f je holomorfna na Ω. ■

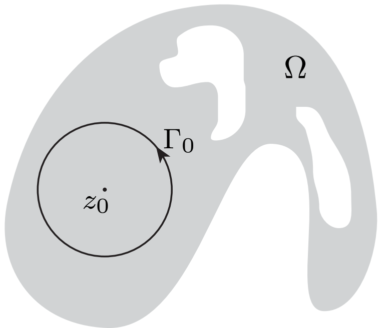
Ovaj, upravo dokazan rezultat, vrlo je važan. On pokazuje da je zahtjev derivabilnosti kompleksne funkcije tako jak, da ima za posljedicu ne samo postojanje, nego i neprekidnost derivacije, tj. holomorfnost. Stoga, za kompleksne funkcije (jedne) kompleksne varijable, nema smisla govoriti da su, naprimjer, *klase* C^1 — sve derivabilne funkcije automatski su takve. Dokazat ćemo još mnogo više:

Teorem 34.9 (o višim derivacijama derivabilne funkcije) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup a $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija. Tada f ima derivacije svakog reda, i sve su one holomorfne funkcije na Ω.*

Nadalje, ako je γ bilo koji, u Ω nulhomotopan, po dijelovima gladak zatvoren put, a točka $z \in \Omega \setminus \gamma^\clubsuit$, onda je

$$\nu(\gamma, z)\, f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta\ . \tag{3}$$

Dokaz: Znamo već, prema prethodnom Korolaru 34.8, da je derivacija f' funkcije f, neprekidna. Neka je $z_0 \in \Omega$ neka točka, i neka je $r > 0$ takav da kružnica Γ_0



radijusa r oko točke z_0, zajedno s krugom $K(z_0, r)$ kojeg obrubljuje, leži u Ω. Za svaki $z \in K(z_0, r)$ je, prema Cauchyjevoj integralnoj formuli, točnije Korolaru 34.5, $f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$, pa je, prema Teoremu 34.7, i formuli (1) za derivaciju takve funkcije,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta\ , \quad z \in K(z_0, r)\ . \tag{4}$$

Odavde, parcijalnom integracijom, dobivamo

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_0} \underbrace{f(\zeta)}_{\alpha}\ \underbrace{\frac{1}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta}_{d\beta} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_0} \frac{f'(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\ , \quad z \in K(z_0, r)\ . \tag{5}$$

Pritom smo rabili činjenicu da se radi o integralu po *zatvorenom* putu, pa je, kod parcijalne integracije, sumand koji ne sadrži integral, jednak nuli, tj. općenito, formula za parcijalnu integraciju duž zatvorenog puta γ ima oblik $\oint_\gamma \alpha\, d\beta = -\oint_\gamma \beta\, d\alpha$.

Iz prethodne formule, i već dokazane neprekidnosti funkcije f', ponovnom primjenom Teorema 34.7, zaključujemo da je f' holomorfna na krugu $K(z_0, r)$. Kako je z_0 bila proizvoljna točka, dokazano je tako da je f' holomorfna na Ω.

Indukcijom se sada jednostavno pokazuje da funkcija f ima derivacije svakog reda, i da su sve one holomorfne funkcije na Ω.

Ostaje još dokazati formulu (3). Neka je γ, u Ω nulhomotopan, zatvoren po dijelovima gladak put, i neka je $z \in \Omega \setminus \gamma^\clubsuit$. Prema već dokazanom, n-ta derivacija $f^{(n)}$ funkcije f je holomorfna, pa je, prema Cauchyjevoj integralnoj formuli,

$$\nu(\gamma, z)\, f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f^{(n)}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\ .$$

Odavde, uzastopnom parcijalnom integracijom, dobivamo

$$\begin{aligned}
\nu(\gamma,z)\, f^{(n)}(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f^{(n)}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \underbrace{\frac{1}{\zeta - z}}_{\alpha}\, \underbrace{f^{(n)}(\zeta)\, d\zeta}_{d\beta} \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma f^{(n-1)}(\zeta)\, \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \underbrace{\frac{1}{(\zeta - z)^2}}_{\alpha}\, \underbrace{f^{(n-1)}(\zeta)\, d\zeta}_{d\beta} \\
&= \frac{1\cdot 2}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma f^{(n-2)}(\zeta)\, \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^3} = \frac{2!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \underbrace{\frac{1}{(\zeta - z)^3}}_{\alpha}\, \underbrace{f^{(n-2)}(\zeta)\, d\zeta}_{d\beta} \\
&\;\;\vdots \\
&= \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta\,.
\end{aligned}$$

■

Kako sada znamo da je za kompleksne funkcije derivabilnost na otvorenom skupu isto što i holomorfnost, odsada ćemo koristiti gotovo isključivo termin *holomorfan*.

Na sljedeći teorem možemo gledati kao na neku vrstu obrata Cauchyjeva teorema.

Teorem 34.10 (Morerin[1] teorem) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, a $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija sa svojstvom, da za svaku točku $z \in \Omega$, postoji $r_z > 0$, dovoljno malen da je $K(z, r_z) \subseteq \Omega$, i takav da za svaki pravokutnik $I \subseteq K(z, r_z)$ vrijedi $\int\limits_{\partial I} f\, dz = 0$. Tada je f holomorfna na Ω.*

Dokaz: Neka je $z \in \Omega$ i $r_z > 0$ kao u pretpostavci teorema, te označimo s $K_z := K(z, r_z)$. Prema Teoremu 32.4 o postojanju primitivne funkcije na krugu, postoji derivabilna funkcija $F_z\colon K_z \to \mathbb{C}$ takva da je $F_z' = f\big|_{K_z}$, tj. za sve $\zeta \in K_z$, je $F_z'(\zeta) = \big(f\big|_{K_z}\big)(\zeta) = f(\zeta)$. Prema prethodnom teoremu 34.9, funkcija F_z ima derivacije svakog reda na K_z, pa specijalno postoji $F_z''(z)$. Kako se funkcije F_z' i f podudaraju na krugu K_z oko točke z, i jedna od njih je

[1] Giacinto Morera (1856–1909), talijanski matematičar

derivabilna u z, to je i druga derivabilna u z (i njihove su derivacije jednake, što nam ovdje nije važno). Stoga je funkcija f derivabilna u točki z.

Kako je z proizvoljna točka iz Ω, f je derivabilna na Ω, pa je, prema teoremu o holomorfnosti derivabilne funkcije, Korolar 34.8, holomorfna. ■

Na kraju, dokažimo jednu činjenicu, koja, na prvi pogled, sugerira da smo možda nepotrebno mistificirali pretpostavke u Cauchyjevim teoremima.

Korolar 34.11 *Neka je $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija koja je i derivabilna osim eventualno u konačno mnogo točaka. Onda je f derivabilna svuda, dakle i holomorfna na čitavom otvorenom skupu Ω.*

Dokaz: Zbog otvorenosti skupa Ω, za svaku točku $z \in \Omega$, postoji $r_z > 0$ takav da je $K(z, r_z) \subseteq \Omega$. Za svaki pravokutnik $I \subseteq K(z, r_z)$ je, prema Cauchyjevu teoremu za pravokutnik, Teorem 33.2, $\int_{\partial I} f\, dz = 0$, pa prema Morerinom teoremu zaključujemo da je f holomorfna na Ω. ■

Ovaj korolar pokazuje kako funkcija koja je neprekidna na otvorenom skupu i derivabilna je u svim, osim možda u konačno mnogo točaka, ne može zaista ne biti derivabilna u tih nekoliko točaka. Zašto onda nismo u Cauchyjevim teoremima — za pravokutnik, krug i, konačno, u općem Cauchyjevom teoremu, jednostavno pretpostavili da je funkcija derivabilna? Razlog je sljedeći: za dokaz prethodnog korolara, kojim smo ustanovili da zapravo ovih konačno mnogo izuzetaka — točaka u kojima neprekidna funkcija nije derivabilna — ne može postojati, poslužili smo se Morerinim teoremom, a za dokaz kojega smo rabili teorem o postojanju viših derivacija derivabilne funkcije, koji je pak bio posljedica Cauchyjeve integralne formule. A u dokazu Cauchyjeve integralne formule, primijenili smo opći Cauchyjev teorem na izvjesnu pomoćnu funkciju g, za koju smo, u tom času, znali da je neprekidna i da je derivabilna u svim točkama osim jedne. Nije bilo načina da tada ustanovimo njezinu derivabilnost i u toj jednoj jedinoj točki. To je bilo jedino mjesto gdje smo zaista koristili punu snagu Cauchyjeva teorema. Sada, naravno, znamo da je ta funkcija g bila zapravo i u toj jednoj točki derivabilna, ali tada to zaista nismo mogli tvrditi.

Sljedećim dijagramom rekapitulirani su odnosi među osnovnim svojstvima kompleksne funkcije koja smo promatrali u ovom poglavlju.

$$
\begin{array}{ccc}
\boxed{\begin{array}{c}\displaystyle\int_\gamma f\,dz = 0\\ \text{za svaki zatvoren}\\ \text{PDG put } \gamma \text{ u } \Omega\end{array}} & \begin{array}{c}\text{za } \Omega \text{ jednostavno}\\ \text{povezano područje}\\ \Longleftarrow\!=\!=\!=\end{array} & \boxed{f \in H(\Omega)} \\
\text{Tm. 32.2} \Updownarrow & & \begin{array}{r}\text{Tm. 32.2}\\ \text{Tm. 34.10}\end{array}\Uparrow \quad \Downarrow\begin{array}{l}\text{Tm. 33.4}\\ \text{Tm. 32.2}\end{array} \\
\boxed{\begin{array}{c}f \text{ ima na } \Omega\\ \text{primitivnu funkciju}\end{array}} & \begin{array}{c}\text{trivijalno}\\ \Longrightarrow\end{array} & \boxed{\begin{array}{c}f \text{ ima na } \Omega \text{ lokalno}\\ \text{primitivnu funkciju}\end{array}}
\end{array}
$$

6

Nizovi i redovi funkcija

U ovom ćemo se poglavlju baviti nizovima i redovima funkcija. Većina od tih stvari zapravo spada već u prvo poglavlje, gdje smo razmatrali pitanja konvergencije nizova. Međutim, osnovno svojstvo koje ćemo koristiti pri proučavanju nizova i redova kompleksnih funkcija — lokalno uniformna konvergencija — dosad nam nije trebalo, pa o tome govorimo istom sada.

§ 35 Uniformna i lokalno uniformna konvergencija

Određenosti radi, govorit ćemo o nizovima i redovima kompleksnih funkcija kompleksne varijable, jer ćemo u idućem poglavlju upravo to trebati. Međutim, većina pojmova i svojstva koja ćemo dokazati, imaju smisla i vrijede i u drugim, često općenitijim, situacijama.

Prisjetimo se najprije pojmova obične i uniformne konvergencije niza funkcija, kojima smo se već bavili u prvom poglavlju, § 4.

Definicija 35.1 Neka je $S \subseteq \mathbb{C}$ neki skup i $f_n \colon S \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, niz funkcija. Kažemo da niz $(f_n)_n$ ***konvergira*** (*obično* ili *po točkama*) ako za svaki $z \in S$ niz brojeva $\big(f_n(z)\big)_n$ konvergira. U tom slučaju, funkciju $f \colon S \to \mathbb{C}$ definiranu s $f(z) := \lim\limits_n f_n(z)$ zovemo *limes niza* $(f_n)_n$, i označavamo s $f = \lim\limits_n f_n$. Piše se također $f_n \to f$ ili $f_n \xrightarrow{n} f$.

Dakle, niz funkcija $(f_n)_n$ konvergira funkciji f, ako

$$\forall z \in S, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ t.d. } \forall n \geq n_0 \text{ vrijedi } |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \,.$$

Definicija 35.2 Za niz funkcija $f_n \colon S \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, kažemo da ***konvergira uniformno*** ili ***jednoliko*** na S, ako postoji funkcija $f \colon S \to \mathbb{C}$, takva da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $z \in S$ i sve $n \geq n_0$ vrijedi $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. Označavat ćemo to s $f_n \rightrightarrows f$. Dakle, niz $(f_n)_n$ konvergira uniformno funkciji f, ako

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \text{t.d. } \forall z \in S,\ \forall n \geq n_0 \text{ vrijedi } |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \,.$$

Očito je da ako niz funkcija $(f_n)_n$ konvergira uniformno funkciji f, onda taj niz konvergira i obično, ali obratno ne.

Napomena 35.1 S uniformnom konvergencijom bili smo se već bavili u § 4 u prvom poglavlju. Tamo smo promatrali skup $B(S, \mathbb{C})$ svih *omeđenih* funkcija sa S u $\mathbb{C}$ (zapravo umjesto $\mathbb{C}$ tamo je bio općenito, metrički prostor Y). U tom smo skupu definirali metriku ρ formulom $\rho(f, g) := \sup\limits_{z \in S} |f(z) - g(z)|$, i time je $B(S, \mathbb{C})$ postao metrički prostor, a konvergencija s obzirom na metriku ρ je bila upravo uniformna konvergencija. Kako je prostor $\mathbb{C}$ potpun, pokazali smo i da je $B(S, \mathbb{C})$ potpun. Važan je njegov potprostor $BC(S, \mathbb{C})$ svih omeđenih neprekidnih funkcija, za koji smo pokazali da je zatvoren potprostor, pa je također potpun. To je, specijalno, značilo da je uniformni limes niza (omeđenih) neprekidnih funkcija ponovno neprekidna funkcija.

Nas sada zanimaju i funkcije koje *nisu* omeđene, pa formalno uzevši ne možemo koristiti navedene rezultate. Međutim, isti dokaz kojim smo u Teoremu 4.16 pokazali da je uniformni limes niza omeđenih neprekidnih funkcija, ponovno neprekidna funkcija, bez ikakve promjene vrijedi i bez pretpostavke o omeđenosti funkcija. Osim toga, u Teoremu 35.4 mi ćemo taj dokaz napraviti i u nešto općenitijoj situaciji.

Druga mogućnost da koristimo navedene rezultate iz prvog poglavlja, bez da ih ponovno dokazujemo, je sljedeća. Ako za proizvoljne funkcije $f, g \colon S \to \mathbb{C}$ definiramo $\rho'(f, g) := \sup\limits_{z \in S} \big(\min\{|f(z) - g(z)|, 1\} \big)$, dobit ćemo metriku na skupu *svih* funkcija sa S u $\mathbb{C}$, i konvergencija s obzirom na tu metriku je upravo uniformna konvergencija. Za prostor $(C(S, \mathbb{C}), \rho')$ svih neprekidnih funkcija sa S u $\mathbb{C}$ vrijedi sve što smo bili dokazali za $BC(S, \mathbb{C})$. Topologija, dakle i konvergencija, koju metrika ρ' inducira na podskupu $B(S, \mathbb{C})$, ista je kao i ona koju definira metrika ρ, iako su sâme metrike različite. Isto vrijedi i za Cauchyjeve nizove.

Primjeri 35.1

(*i*) Niz funkcija $f_n \colon [2, \infty\rangle \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definiranih s $f_n(x) := \dfrac{1}{x^n}$ konvergira uniformno konstantnoj funkciji 0, $f_n \rightrightarrows 0$.

(*ii*) Niz funkcija $g_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definiranih s $g_n(x) := x^n$, konvergira funkciji $g \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiranoj s $g(x) := \begin{cases} 0 & , \ x \in [0, 1\rangle \\ 1 & , \ x = 1 \end{cases}$, ali ta konvergencija nije uniformna, jer limes nije neprekidna funkcija.

(*iii*) Neka je $f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da je $f(0) = f(1) = 0$ i neka f nije svuda nula, $f \not\equiv 0$, te neka je $g_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, niz funkcija definiranih s $g_n(x) := f(x^n)$. Tada niz $(g_n)_n$ konvergira konstantnoj funkciji 0, ali ta konvergencija nije uniformna, iako su g_n i $0 = \lim\limits_n g_n$ neprekidne funkcije na kompaktnom skupu $[0, 1]$.

Zaista, kada bi $g_n \rightrightarrows 0$, onda bi

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \text{ t.d. } \forall n \geq n_0 \text{ i } \forall x \in [0, 1] \text{ vrijedi } |g_n(x)| < \varepsilon \ .$$

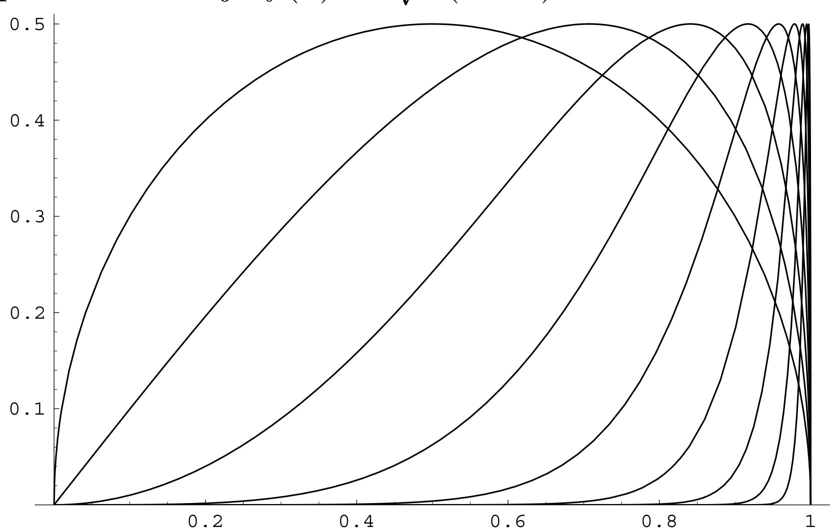
Pokažimo da $g_n \not\rightrightarrows 0$, tj. da

$$\exists \varepsilon > 0, \ \text{t.d. } \forall n_0 \in \mathbb{N}, \ \exists n \geq n_0 \text{ i } \exists x_n \in [0, 1] \text{ t.d. je } |g_n(x_n)| \geq \varepsilon \ .$$

Neka je $\varepsilon := \max\limits_{x \in [0,1]} |f(x)| > 0$, i neka je $x_0 \in \langle 0, 1\rangle$ takav da je $|f(x_0)| = \varepsilon$. Za $n_0 \in \mathbb{N}$ neka je $n := n_0$ i $x_n := \sqrt[n]{x_0} \in \langle 0, 1\rangle$. Tada je

$$|g_n(x_n)| = |g_n(\sqrt[n]{x_0})| = |f(x_0)| = \varepsilon \ .$$

Na sljedećoj slici prikazani su grafovi funkcija g_1, g_2, g_4, g_8, g_{16}, $\dots$, g_{256}, i to za polaznu funkciju $f(x) := \sqrt{x(1-x)}$.



Sada ćemo definirati jedan novi tip konvergencije, koji će se pokazati vrlo korisnim pri proučavanju kompleksnih funkcija.

Definicija 35.3 Neka je $f_n \colon S \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, niz funkcija. Kažemo da niz $(f_n)_n$ ***konvergira lokalno uniformno*** na S, ako za svaki $z \in S$ postoji $r_z > 0$ takav da niz restrikcija $f_n\big|_{K(z,r_z)\cap S}$ konvergira uniformno na $S_z := K(z, r_z) \cap S$.

Lokalno uniformna konvergencija znači, da oko svake točke postoji okolina i na toj okolini neka funkcija kojoj niz restrikcija uniformno konvergira. Sljedeća propozicija kaže da se ipak radi o funkciji na čitavom skupu S, tako da možemo govoriti i o lokalno uniformnom limesu.

Propozicija 35.1 *Ako niz funkcija $f_n \colon S \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergira lokalno uniformno na S, onda postoji funkcija $f \colon S \to \mathbb{C}$ takva da niz $(f_n)_n$ konvergira lokalno uniformno prema f, tj. za svaki $z \in S$ postoji $r_z > 0$ takav da niz restrikcija $f_n\big|_{S_z}$ konvergira uniformno restrikciji $f\big|_{S_z}$, gdje je S_z kao u prethodnoj definiciji.*

Dokaz: Kako niz $(f_n)_n$ konvergira lokalno uniformno na S, za svaki $z \in S$ postoji $r_z > 0$ i funkcija $g_z \colon S_z \to \mathbb{C}$ tako da niz restrikcija $f_n\big|_{S_z}$ konvergira uniformno funkciji g_z na skupu S_z.

Pokažimo da se na presjecima $S_{z'} \cap S_{z''}$, $z', z'' \in S$, funkcije $g_{z'}$ i $g_{z''}$ podudaraju. Neka je $z \in S_{z'} \cap S_{z''}$. Tada je

$$g_{z'}(z) = \lim_n \big(f_n\big|_{S_{z'}}\big)(z) = \lim_n f_n(z) = \lim_n \big(f_n\big|_{S_{z''}}\big)(z) = g_{z''}(z)\,.$$

Stoga je dobro definirana funkcija $f \colon S \to \mathbb{C}$ takva da je $f\big|_{S_z} := g_z$, $z \in S$, i očito je $\lim_n f_n(z) = f(z)$, $z \in S$. ■

Primjer 35.2 Niz funkcija $g_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiranih s $g_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$, konvergira lokalno uniformno na poluotvorenom intervalu $[0,1\rangle$ konstantnoj funkciji 0, ali taj niz *ne* konvergira lokalno uniformno na segmentu $[0,1]$.

Primijetimo da niz $(g_n)_n$ *ne* konvergira uniformno na $[0,1\rangle$, jer bi tada konvergirao uniformno i na čitavom $[0,1]$, što prema Primjeru 35.1 nije istina.

Očito je da ako neki niz funkcija konvergira uniformno, onda on konvergira i lokalno uniformno. Da obratno ne vrijedi, pokazuje prethodni primjer. Međutim, na kompaktnim skupovima te se dvije vrste konvergencije podudaraju. Točnije, vrijedi

Propozicija 35.2 *Neka niz funkcija $f_n\colon S \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergira lokalno uniformno. Ako je skup S kompaktan, onda niz $(f_n)_n$ konvergira uniformno.*

Dokaz: Kako niz $(f_n)_n$ konvergira lokalno uniformno na S, to, prema prethodnoj Propoziciji 35.1, postoji funkcija $f\colon S \to \mathbb{C}$ takva da $(f_n)_n \overset{\text{lokalno}}{\rightrightarrows} f$. Stoga za svaki $z \in S$, postoji $r_z > 0$ takav da $\big(f_n\big|_{S_z}\big)_n \rightrightarrows f\big|_{S_z}$, gdje je, kao i ranije, $S_z := S \cap K(z, r_z)$.

Zbog kompaktnosti, postoje točke $z_1, \ldots, z_k \in S$ takve da je $S \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} K(z_i, r_{z_i})$, tj. $S = \bigcup\limits_{i=1}^{k} S_{z_i}$.

Budući niz $\big(f_n\big|_{S_{z_i}}\big)_n$ konvergira uniformno restrikciji $f\big|_{S_{z_i}}$, to za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_{0,i} \in \mathbb{N}$ takav da za sve $z \in S_{z_i}$ i sve $n \geq n_{0,i}$, vrijedi $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. Neka je $n_0 := \max\{n_{0,1}, \ldots, n_{0,k}\}$. Tada za sve $z \in S$ i sve $n \geq n_0$ vrijedi $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$, tj. niz $(f_n)_n$ konvergira uniformno na S. ■

Korolar 35.3 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, a $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, niz funkcija. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(*i*) *Niz $(f_n)_n$ konvergira lokalno uniformno na Ω.*

(*ii*) *Za svaki kompaktan skup $K \subseteq \Omega$, niz restrikcija $f_n\big|_K\colon K \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergira uniformno na K.*

(*iii*) *Za svaki zatvoreni krug $\overline{K}(z, r) \subseteq \Omega$, niz restrikcija $\big(f_n|_{\overline{K}(z,r)}\big)_n$ konvergira uniformno na $\overline{K}(z, r)$.*

Dokaz: Da (*ii*) slijedi iz (*i*), pokazuje prethodna propozicija. (*iii*) slijedi trivijalno iz (*ii*), jer je svaki zatvoreni krug kompaktan. A implikacija (*iii*) $\Rightarrow$ (*i*) je gotovo sâma definicija lokalno uniformne konvergencije. ■

Dokažimo sada da lokalno uniformna konvergencija čuva neprekidnost.

Teorem 35.4 *Neka je $f_n\colon S \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, niz neprekidnih funkcija koji lokalno uniformno konvergira funkciji $f\colon S \to \mathbb{C}$. Tada je i funkcija f neprekidna.*

Dokaz: Neka je $z_0 \in S$ proizvoljna točka. Na nekoj okolini $S_{z_0} := S \cap K(z_0, r_{z_0})$ točke z_0, niz $(f_n)_n$ konvergira uniformno funkciji f, pa za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za svaki $z \in S_{z_0}$ i svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Specijalno je $|f_{n_0}(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ za sve $z \in S_{z_0}$.

Kako je funkcija f_{n_0} neprekidna u z_0, postoji $\delta > 0$, $\delta < r_{z_0}$, takav da za sve $z \in S$ za koje je $|z - z_0| < \delta$, vrijedi $|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Tada za sve takve z vrijedi

$$|f(z) - f(z_0)| \le \underbrace{|f(z) - f_{n_0}(z)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_0}(z_0) - f(z_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon \ . \ \blacksquare$$

Zbog prethodnog teorema, kaže se da, u slučaju lokalno uniformne konvergencije, *limes (niza) i limes (funkcije), komutiraju.* Naime, ako je funkcija f lokalno uniformni limes niza funkcija neprekidnih u točki z_0, onda je i f neprekidna u z_0, pa je

$$\lim_{z\to z_0} \lim_n f_n(z) = \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) = \lim_n f_n(z_0) = \lim_n \lim_{z\to z_0} f_n(z) \ .$$

Naš glavni interes u ovom poglavlju su redovi funkcija. Kako redove dosad nismo spominjali, pođimo od definicije. Neka je X neki vektorski prostor snabdjeven nekom metrikom, ili barem nekom topologijom, naprimjer, neka je X normiran vektorski prostor, a $(x_n)_n$ niz u X. ***Red*** $\sum x_n$ je uređen par $\big((x_n)_n, (s_n)_n\big)$ niza $(x_n)_n$ i niza $(s_n)_n$ njegovih ***parcijalnih suma*** $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, $n \in \mathbb{N}$. Za red $\sum x_n$ kažemo da ***konvergira***, ako konvergira niz $(s_n)_n$. U tom slučaju limes $\lim\limits_n s_n$ niza parcijalnih suma zovemo ***sumom reda*** $\sum x_n$ i označavamo sa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

Nas će zanimati redovi funkcija, posebice redovi funkcija $\sum f_n$, gdje su $f_n \colon S \to \mathbb{C}$ kompleksne funkcije kompleksne varijable. Za takav red kažemo da ***konvergira*** (*obično*) ako za svaki $z \in S$ red $\sum f_n(z)$ kompleksnih brojeva konvergira.[1] Za red funkcija $\sum f_n$ kažemo da ***konvergira uniformno*** ako niz $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} f_k\right)_n$ konvergira uniformno, tj. konvergira u prostoru funkcija sa S u $\mathbb{C}$, snabdjevenom ranije spomenutom metrikom ρ'. Slično se definira lokalno uniformna konvergencija reda funkcija.

Korolar 35.5 *Ako je $\sum f_n$ red neprekidnih funkcija $f_n \colon S \to \mathbb{C}$ koji konvergira lokalno uniformno, onda je njegova suma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \colon S \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija.* $\blacksquare$

[1] Primijetimo da *ne* postoji metrika na prostoru svih funkcija sa S u $\mathbb{C}$ takva da konvergencija s obzirom na tu metriku bude upravo obična konvergencija niza funkcija. Za opis obične konvergencije potrebna je ne-metrizabilna topološka struktura na prostoru funkcija, vidi [6].

Kao kod nizova, ako red $\sum f_n$ funkcija neprekidnih u točki z_0 lokalno uniformno konvergira, onda se *limes po z sume reda dobije kao suma reda limesa po z*, tj.

$$\lim_{z\to z_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{z\to z_0} f_n(z)\,,$$

pa se kaže da *limes i suma reda komutiraju.*

Sljedeći teoremi govore o zamjeni limesa niza, odnosno sume reda, i integrala, odnosno derivacije.

Teorem 35.6 *Neka je $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ po dijelovima gladak put, a $f_n\colon \gamma^\clubsuit \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, niz neprekidnih funkcija koji konvergira lokalno uniformno funkciji $f\colon \gamma^\clubsuit \to \mathbb{C}$. Tada je $\int_\gamma f\,dz = \lim\limits_n \int_\gamma f_n\,dz$.*

U slučaju lokalno uniformne konvergencije, vrijedi, dakle

$$\lim_n \int_\gamma f_n\,dz = \int_\gamma \lim_n f_n\,dz\ ,$$

pa se kaže da *limes i integral komutiraju.*

Dokaz: Prema Teoremu 35.4, f je neprekidna funkcija na $\gamma^\clubsuit$, pa integral $\int_\gamma f\,dz$ ima smisla. Prema Lemi 32.1 o ocjeni integrala, vrijedi

$$\begin{aligned}\Big|\int_\gamma f_n\,dz - \int_\gamma f\,dz\Big| &= \Big|\int_\gamma \big(f_n(z) - f(z)\big)\,dz\Big| \\ &\le \max\{|f_n(z) - f(z)| : z \in \gamma^\clubsuit\} \cdot \ell(\gamma)\ .\end{aligned}$$

Kako je skup $\gamma^\clubsuit$ kompaktan, niz $(f_n)_n$ konvergira uniformno, pa za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \ge n_0$ i sve $z \in \gamma^\clubsuit$ vrijedi $\big|f_n(z) - f(z)\big| < \frac{\varepsilon}{\ell(\gamma)}$. Zbog toga, za $n \ge n_0$ vrijedi

$$\Big|\int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz\Big| \le \frac{\varepsilon}{\ell(\gamma)} \cdot \ell(\gamma) = \varepsilon\ ,$$

tj. niz brojeva $\big(\int_\gamma f_n\,dz\big)_n$ konvergira, i limes je $\int_\gamma f\,dz$. ■

Korolar 35.7 *Neka je γ po dijelovima gladak put u $\mathbb{C}$, a $f_n\colon \gamma^\clubsuit \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, niz neprekidnih funkcija takvih da red $\sum f_n$ konvergira lokalno uniformno na $\gamma^\clubsuit$. Tada red brojeva $\sum \int_\gamma f_n\,dz$ konvergira, i vrijedi*

$$\int_\gamma \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n\,dz\ .$$

Kaže se, stoga, da se lokalno uniformno konvergentan red može integrirati član po član. ■

Prethodna dva teorema i korolara o zamjeni limesa s limesom odnosno integralom, nepromijenjeno vrijede i za, naprimjer, realne funkcije realne varijable. Međutim, sljedeći teorem o zamjeni limesa i derivacije, kao i njegov korolar, bez dodatnih pretpostavki, ne vrijede u slučaju realnih funkcija.

Teorem 35.8 (Weierstrassov teorem o limesu niza holomorfnih funkcija) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $f_n \in H(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, niz holomorfnih funkcija koji na Ω konvergira lokalno uniformno funkciji $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Tada je i f holomorfna funkcija, $f \in H(\Omega)$. Štoviše, niz derivacija $(f_n')_n$ konvergira lokalno uniformno na Ω funkciji f', tj. vrijedi*

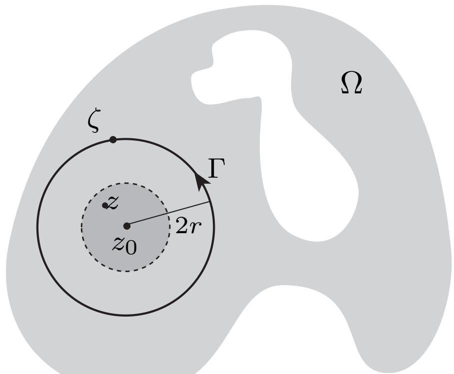
$$\lim_n f_n' = (\lim_n f_n)' .$$

Dokaz: Prema Teoremu 35.4 je funkcija $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna. Neka je $z \in \Omega$ proizvoljna točka i $r_z > 0$ takav da je $K(z, r_z) \subseteq \Omega$. Tada, prema Teoremu 35.6 i Cauchyjevu teoremu, za svaki pravokutnik $I \subseteq K(z, r_z)$ vrijedi

$$\int_{\partial I} f\, dz = \lim_n \int_{\partial I} f_n\, dz = 0 .$$

Prema Morerinom teoremu 34.10, zaključujemo da je f holomorfna na Ω.

Dokažimo i da niz $(f_n')_n$ lokalno uniformno konvergira k f'. Neka je $z_0 \in \Omega$ proizvoljna točka i neka je $r > 0$ takav da je $\overline{K}(z_0, 2r) \subseteq \Omega$, te neka je



$\Gamma := \partial K(z_0, 2r)$ pozitivno orijentirana obrubljujuća kružnica. Kako je skup Γ kompaktan, niz $(f_n)_n$ konvergira na Γ uniformno funkciji f, pa za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ i sve $\zeta \in \Gamma$ vrijedi $|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \varepsilon \frac{r}{2}$. Nadalje, kako su funkcije f i f_n, $n \in \mathbb{N}$, holomorfne na Ω, prema Cauchyjevoj integralnoj formuli, točnije Korolaru 34.5, i Teoremu 34.7 o derivaciji funkcije definirane integralom, za svaki $z \in K(z_0, r)$ vrijedi

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta$$

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta , \quad n \in \mathbb{N} .$$

Kako za sve $z \in K(z_0, r)$ i sve $\zeta \in \Gamma$ vrijedi $|\zeta - z| > r$, to je, prema Lemi 32.1,

$$|f_n'(z) - f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}\, d\zeta \right| < \frac{1}{2\pi} \cdot \varepsilon \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 2 \cdot 2r\pi = \varepsilon\,,$$

pa $(f_n')_n \rightrightarrows f'$ na okolini $K(z_0, r)$ točke z_0. Stoga niz $(f_n')_n$ lokalno uniformno konvergira funkciji f'. ■

Za redove, kao posljedicu, dobivamo

Korolar 35.9 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, a $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, niz holomorfnih funkcija, takvih da red $\sum f_n$ lokalno uniformno konvergira. Tada je i suma reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ holomorfna funkcija na Ω, red $\sum f_n'$ konvergira lokalno uniformno na Ω, i $f' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$, tj.*

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'\,.$$

Kaže se da se lokalno uniformno konvergentan red derivira član po član. ■

Uniformna i lokalno uniformna konvergencija su svojstva redova koja su 'dobra' sa stajališta analize. Međutim za 'računanje' s redovima, naprimjer za zbrajanje, a posebno množenje, potrebna je jedna druga vrsta konvergencije.

Definicija 35.4 Za red brojeva $\sum a_n$ kažemo da ***apsolutno konvergira*** ako konvergira red $\sum |a_n|$. Analogno, za red $\sum f_n$ funkcija sa S u $\mathbb{C}$ kažemo da apsolutno konvergira, ako konvergira red $\sum |f_n|$.

Kod apsolutno konvergentnih redova, članovi se mogu po volji grupirati i permutirati, a da to nema utjecaja na njihovu konvergenciju niti na sâmu sumu. Mi te stvari nećemo dokazivati, a precizno iskazane tvrdnje i detaljni dokazi nalaze se u [6].

Važna je sljedeća, na prvi pogled očita, činjenica:

Teorem 35.10 *Neka je z_n, $n \in \mathbb{N}$, niz kompleksnih brojeva. Ako red $\sum z_n$ konvergira apsolutno, onda on i konvergira.*

Dokaz: Da red $\sum z_n$ apsolutno konvergira znači da konvergira red $\sum |z_n|$, tj. da konvergira njegov niz parcijalnih suma $\sigma_n := \sum\limits_{j=1}^{n} |z_j|$. Stoga je niz $(\sigma_n)_n$ Cauchyjev niz, pa za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq n_0$ i sve $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|\sigma_{n+k} - \sigma_n| = \sum_{j=1}^{n+k} |z_j| - \sum_{j=1}^{n} |z_j| = \sum_{j=n+1}^{n+k} |z_j| < \varepsilon\,.$$

Stoga za sve $n \geq n_0$ i sve $k \in \mathbb{N}$, za parcijalne sume s_n reda $\sum z_n$ vrijedi

$$|s_{n+k} - s_n| = \Big| \sum_{j=n+1}^{n+k} z_j \Big| \leq \sum_{j=n+1}^{n+k} |z_j| < \varepsilon \,,$$

pa je niz $(s_n)_n$ parcijalnih suma reda $\sum z_n$ Cauchyjev niz. Zbog potpunosti prostora $\mathbb{C}$, taj niz konvergira, tj. red $\sum z_n$ je konvergentan. ■

U dokazu prethodnog teorema koristili smo potpunost prostora kompleksnih brojeva. Iz sâmog se dokaza vidi da će u svakom Banachovom prostoru apsolutno konvergentni redovi biti i konvergentni. Međutim, u prostorima koji nisu potpuni postoje apsolutno konvergentni redovi koji ne konvergiraju.

Primjer 35.3 Konstruirat ćemo red racionalnih brojeva koji u $\mathbb{Q}$ apsolutno konvergira ali koji u $\mathbb{Q}$ nije konvergentan.

Neka su članovi redova $\sum a_n$ i $\sum b_n$ definirani s

$$\left.\begin{aligned} a_{2k} &:= \frac{1}{k!} - \frac{1}{2^k} \\ a_{2k+1} &:= 0 \end{aligned}\right\} k = 0, 1, 2, \ldots$$

i

$$\left.\begin{aligned} b_{2k} &:= 0 \\ b_{2k+1} &:= \frac{1}{k!} \end{aligned}\right\} k = 0, 1, 2, \ldots$$

Kako su redovi $\sum \frac{1}{k!}$ i $\sum \frac{1}{2^k}$, kao redovi u $\mathbb{R}$, apsolutno konvergentni, to su i redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ apsolutno konvergentni u $\mathbb{R}$. Zbog toga je u $\mathbb{R}$ apsolutno konvergentan i red $\sum q_n$ čiji su članovi definirani s

$$q_n := a_n + b_n = \begin{cases} \frac{1}{k!} - \frac{1}{2^k} & , \ n = 2k \\ \frac{1}{k!} & , \ n = 2k+1 \,. \end{cases}$$

Budući je $\mathbb{R}$ potpun, taj red u $\mathbb{R}$ i konvergira i suma mu je

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} q_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{2^k} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2e - 2 \,. \end{aligned}$$

Red $\sum q_n$ je red racionalnih brojeva, $q_n \in \mathbb{Q}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Ali broj $2e - 2$ nije racionalan, pa taj red ne konvergira u $\mathbb{Q}$, tj. kao red u $\mathbb{Q}$ on nije konvergentan. Pokažimo da je on ipak apsolutno konvergentan i u $\mathbb{Q}$.

Označimo sa σ_n parcijalne sume reda $\sum |q_n|$. Direktnim računom, vidi se da je $\sigma_7 = \frac{83}{24}$, a jer za sve $k \geq 4$ vrijedi $\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^k}$, to za $n \geq 4$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\sigma_{2n} &= \frac{83}{24} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^k} - \frac{1}{n!} \\
\sigma_{2n+1} &= \frac{83}{24} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^k} \\
\sigma_{2n+2} &= \frac{83}{24} + \sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{2^k} - \frac{1}{(n+1)!} \\
&= \sigma_{2n+1} + \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{(n+1)!} \right),
\end{aligned}$$

pa je $\sigma_{2n} < \sigma_{2n+1} < \sigma_{2n+2}$, $n \geq 4$, tj. niz $(\sigma_n)_n$ je monotono rastuć niz u $\mathbb{Q}$. Međutim, njegov podniz $(\sigma_{2n+1})_n$ konvergira u $\mathbb{Q}$. Zaista,

$$\sigma_{2n+1} = \frac{83}{24} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{83}{24} + \frac{\frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{10}{3} - \frac{1}{2^n},$$

pa je $\lim\limits_{n} \sigma_{2n+1} = \frac{10}{3}$. Zbog toga i sâm niz $(\sigma_n)_n$ konvergira (i limes mu je $\frac{10}{3}$), tj. promatrani red $\sum q_n$ je i u $\mathbb{Q}$ apsolutno konvergentan.

Iz prethodnog teorema i definicije konvergencije reda funkcija, slijedi

Korolar 35.11 *Svaki apsolutno konvergentan red kompleksnih funkcija konvergira (obično).* ■

Primijetimo da apsolutno konvergentan red funkcija ne mora konvergirati (lokalno) uniformno, niti obratno, uniformno konvergentan red ne mora konvergirati apsolutno.

Primjer 35.4

(*i*) Red $\sum f_n$ funkcija $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranih s $f_n(t) := (-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}$, konvergira uniformno na $\mathbb{R}$, ali ne konvergira apsolutno.

(*ii*) Red $\sum g_n$ funkcija $g_n\colon [0,1\rangle \to \mathbb{R}$ definiranih s $g_n(t) := t^n$, konvergira apsolutno, ali ne i uniformno. Naime, kada bi red $\sum g_n$ konvergirao uniformno, onda bi *opći član morao uniformno težiti nuli*, tj. niz funkcija $(g_n)_n$ bi na $[0,1\rangle$ morao konvergirati uniformno, što, kako smo vidjeli u Primjeru 35.1, nije istina.

Dokažimo na kraju ovog paragrafa jedan koristan dovoljan uvjet za apsolutnu i uniformnu konvergenciju, koji ćemo često koristiti.

Teorem 35.12 (Weierstrassov kriterij) *Neka je $\sum f_n$ red funkcija sa S u $\mathbb{C}$. Ako postoje nenegativni realni brojevi $\rho_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, takvi da red $\sum \rho_n$ konvergira i da je $|f_n(z)| \leq \rho_n$ za sve $z \in S$ i sve $n \in \mathbb{N}$, onda red $\sum f_n$ konvergira apsolutno i uniformno na S.*

Dokaz: Da bismo dokazali apsolutnu konvergenciju, dovoljno je pokazati da je za svaki $z \in S$, niz parcijalnih suma reda $\sum |f_n(z)|$ omeđen (jer će tada zbog monotonosti i konvergirati). No, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki $z \in S$ je

$$\sum_{k=1}^{n} |f_k(z)| \leq \sum_{k=1}^{n} \rho_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \in \mathbb{R}\,,$$

pa red $\sum f_n$ zaista konvergira apsolutno.

Pokažimo da red $\sum f_n$ konvergira i uniformno. Kako red $\sum \rho_n$ konvergira, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \rho_k < \varepsilon$.

Zbog toga, za svaki $n \geq n_0$ i svaki $z \in S$, vrijedi

$$\Big|\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)}_{\substack{\text{ova suma postoji}\\ \text{zbog već dokazane}\\ \text{(apsolutne) konvergencije}}} - \sum_{k=1}^{n} f_k(z)\Big| = \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho_k < \varepsilon\,,$$

pa red $\sum f_n$ konvergira uniformno. Gornji račun je korektan, jer, kako smo već bili pokazali, red $\sum f_n$ konvergira apsolutno, pa onda i konvergira. ∎

§ 36 Redovi potencija

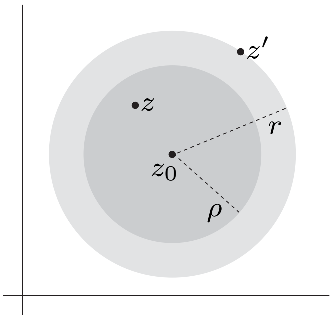
U ovom ćemo paragrafu promatrati neke posebne redove funkcija, i dokazati neka, za njih tipična, svojstva.

Red potencija je red oblika $\sum a_n(z-z_0)^n$, gdje su z_0 i koeficijenti a_n, $n \geq 0$, kompleksni brojevi. Uobičajeno je da kod redova potencija indeksi n uključuju, osim prirodnih brojeva, i nulu, pa ćemo sâm red označavati i sa $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$, a njegovu sumu, kada postoji, sa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

Često ćemo rabiti sljedeći teorem:

Teorem 36.1 (Abelova[1] lema) *Ako red potencija $\sum a_n(z-z_0)^n$ konvergira za neki $z' \neq z_0$, onda taj red konvergira apsolutno i lokalno uniformno na cijelom krugu $K(z_0, r)$, gdje je $r := |z'-z_0|$.*

Dokaz: Ako red $\sum a_n(z'-z_0)^n$ konvergira, onda je specijalno $\lim\limits_n a_n(z'-z_0)^n = 0$. Postoji stoga $M > 0$ takav da je $|a_n(z'-z_0)^n| \leq M$, za sve $n = 0, 1, 2, \ldots$



Neka je $0 < \rho < r = |z'-z_0|$. Tada za svaki $z \in K(z_0, \rho)$ vrijedi

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n(z'-z_0)^n| \cdot \left|\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right|^n < M\left(\frac{\rho}{r}\right)^n .$$

Kako je $\frac{\rho}{r} < 1$, red $\sum M\left(\frac{\rho}{r}\right)^n$ konvergira, pa prema Weierstrassovu kriteriju, Teorem 35.12, zaključujemo da red $\sum a_n(z-z_0)^n$ konvergira na $K(z_0, \rho)$ apsolutno i uniformno.

Budući da za svaki $z \in K(z_0, r)$ postoji ρ takav da je $|z-z_0| < \rho < r$, red $\sum a_n(z-z_0)^n$ konvergira apsolutno i lokalno uniformno na cijelom krugu $K(z_0, r)$. ■

Definicija 36.1 Neka je ρ_n, $n \in \mathbb{N}$, niz nenegativnih realnih brojeva. Ako je taj niz neograničen, definiramo $\limsup \rho_n := +\infty$. U protivnom, tj. ako je niz $(\rho_n)_n$ ograničen, označimo skup svih njegovih gomilišta sa S (taj je skup, prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu, neprazan), i definiramo $\limsup \rho_n := \sup S$.

Nije teško pokazati da je i $\limsup \rho_n$ također gomilište niza $(\rho_n)_n$, tj. vrijedi $\limsup \rho_n \in S$, i zbog toga naziv — najveće gomilište.

[1]Niels Henrik Abel (1802–1829), norveški matematičar

Neka jednostavna svojstva koja ćemo trebati, dana su sljedećom propozicijom:

Propozicija 36.2

(*i*) *Neka su* $(\alpha_n)_n$ *i* $(\beta_n)_n$ *nizovi nenegativnih realnih brojeva takvi da niz* $(\beta_n)_n$ *konvergira, te neka je* $b := \lim\limits_n \beta_n$ *i* $\alpha := \limsup \alpha_n$. *Tada je*

$$\begin{aligned} (a) &\quad \limsup \alpha_n \cdot \beta_n = \alpha \cdot b \\ (b) &\quad \limsup (\alpha_n)^{\beta_n} = \alpha^b \ . \end{aligned}$$

(*ii*) ***(Cauchyjev kriterij konvergencije reda)***
Neka je $(\alpha_n)_n$ *niz nenegativnih realnih brojeva i neka je* $A := \limsup \sqrt[n]{\alpha_n}$. *Onda*

ako je $A < 1$, *red* $\sum \alpha_n$ *konvergira, a*
ako je $A > 1$, *red* $\sum \alpha_n$ *divergira.* ■

Dokažimo sada osnovni teorem o redovima potencija:

Teorem 36.3 (Cauchy-Hadamardov[1] teorem) *Neka je*

$$\sum a_n (z - z_0)^n \tag{1}$$

red potencija i neka je

$$r := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{2}$$

(dogovorno uzimamo $r := 0$ *ako je* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, *a* $r := +\infty$ *ako je* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$*). Tada*

(*a*) *red* (1) *konvergira apsolutno i lokalno uniformno na krugu* $K(z_0, r)$, *i*

(*b*) *red* (1) *divergira za svaki* $z \in \mathbb{C}$ *za koji je* $|z - z_0| > r$.

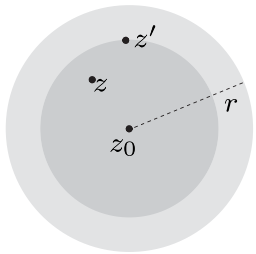
Broj r *zove se* ***radijus konvergencije****, a* $K(z_0, r)$ ***krug konvergencije*** *reda potencija* (1).

---

[1] Jacques Salamon Hadamard (1865–1963), francuski matematičar

Dokaz:

(a) Neka je $z \in K(z_0, r)$ proizvoljan. Odaberimo $z' \in K(z_0, r)$ takav da je $|z - z_0| < |z' - z_0| < r$. Tada je, prema prethodnoj Propoziciji 36.2 (i),

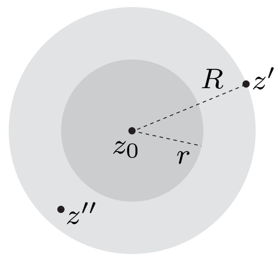


$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(z' - z_0)^n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z' - z_0| = \frac{1}{r}\,|z' - z_0| < 1 \,.$$

Prema Cauchyjevu kriteriju, Propozicija 36.2 (ii), red $\sum a_n(z' - z_0)^n$ konvergira apsolutno.

Prema Abelovoj lemi, Teorem 36.1, zaključujemo da red (1) konvergira apsolutno i lokalno uniformno na krugu $K(z_0, |z' - z_0|)$. Kako je $z \in K(z_0, r)$ bio proizvoljan, red (1) konvergira apsolutno i lokalno uniformno na cijelom krugu $K(z_0, r)$.

(b) Pretpostavimo da red (1) konvergira za neki z' takav da je $|z' - z_0| =: R > r$. Tada, prema Abelovoj lemi, Teorem 36.1, red (1) konvergira apsolutno na krugu $K(z_0, R)$, pa specijalno konvergira apsolutno za neki z'' takav da je $r < |z'' - z_0| < R$, tj. konvergira red $\sum |a_n(z'' - z_0)^n|$. Međutim,



$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(z'' - z_0)^n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z'' - z_0| = \frac{|z'' - z_0|}{r} > 1 \,,$$

što se protivi Cauchyjevu kriteriju, Propozicija 36.2 (ii). ∎

Dokažimo sada da su sume redova potencija uvijek 'dobre', tj. holomorfne, funkcije.

Teorem 36.4 (o holomorfnosti sume reda potencija) *Neka red potencija* $\sum a_n(z - z_0)^n$ *ima radijus konvergencije* $r > 0$. *Tada je funkcija* $f\colon K(z_0, r) \to \mathbb{C}$ *definirana s*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

holomorfna na $K(z_0, r)$, *i njezina derivacija jednaka je*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(z - z_0)^{n-1} \,. \tag{3}$$

Pritom, radijus konvergencije za f' *također jednak je* r.

Drugim riječima, red potencija predstavlja, na krugu konvergencije, holomorfnu funkciju, a derivacija se dobije deriviranjem reda član po član.

Dokaz: Holomorfnost funkcije f i formula (3) za njezinu derivaciju, slijede iz Cauchy-Hadamardova teorema 36.3 i Korolara 35.9. Treba još samo pokazati da je radijus konvergencije za derivaciju f' upravo r.

Promatrajmo red $\sum c_n(z-z_0)^n$, gdje je $c_n := (n+1)\,a_{n+1}$. Za radijus konvergencije toga reda, koristeći Propoziciju 36.2, nalazimo

$$\begin{aligned}
\limsup \sqrt[n]{|c_n|} &= \limsup \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} \\
&= \limsup \left(\sqrt[n+1]{n+1} \cdot \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \right)^{\frac{n+1}{n}} \\
&= \limsup \left(\sqrt[n+1]{n+1} \cdot \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \right) \\
&= \limsup \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} = \frac{1}{r}\,,
\end{aligned}$$

pa redovi $\sum a_n(z-z_0)^n$ i $\sum n\,a_n(z-z_0)^{n-1}$ imaju iste radijuse konvergencije. ■

Napomena[1] **36.1** Prethodni Teorem o holomorfnosti sume reda potencija, pokazuje da je na krugu konvergencije, suma reda potencija holomorfna funkcija. Prema Cauchy-Hadamardovu teoremu, taj red potencija ne konvergira niti u jednoj točki izvan zatvorenog kruga konvergencije. To specijalno znači da za svaku točku s ruba kruga konvergencije, red potencija ne konvergira niti na jednoj okolini te točke. To, međutim, ne znači da se funkcija definirana sumom reda potencija na krugu konvergencije, ne može proširiti do holomorfne funkcije i izvan toga kruga. Naprimjer, red $\sum(-1)^n z^{2n}$ konvergira na jediničnom krugu oko ishodišta, ali funkcija $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$, koja je na tom krugu jednaka sumi toga reda, definirana je na cijeloj kompleksnoj ravnini, osim u dvije točke: $\mathfrak{i}$ i $-\mathfrak{i}$. A te su dvije točke upravo na rubu kruga konvergencije. Za red $\sum z^n$, kome je krug konvergencije također jedinični krug, jedina "loša" točka je 1.

Jednostavna posljedica Taylorova teorema, kojeg ćemo dokazati u idućem poglavlju, je da na rubu kruga konvergencije uvijek postoji barem jedna točka takva da se suma reda potencija ne može proširiti do holomorfne funkcije niti na jednu okolinu te točke.

[1] vidi također Napomenu 37.1.

7

Razvoji kompleksnih funkcija u redove potencija

U ovom ćemo poglavlju najprije pokazati da je svaka holomorfna funkcija čak analitička, tj. da se može razviti u red potencija. Nakon toga ćemo pokazati da se i neke funkcije koje u ponekoj točki nisu holomorfne, mogu na nekoj okolini takve točke razviti u red sastavljen od pozitivnih, ali i negativnih potencija. Vidjet ćemo da ti redovi sadrže mnogo informacija o sâmim funkcijama i predstavljaju moćno oruđe u njihovom proučavanju.

§ 37 Taylorov red

Pokazat ćemo najprije da se svaka funkcija, koja je holomorfna na nekom krugu, može na tom krugu prikazati kao suma reda potencija.

Teorem 37.1 (Taylorov[1] teorem) *Neka je funkcija f holomorfna na krugu $K(z_0, r)$. Tada za svaki $z \in K(z_0, r)$ vrijedi $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, gdje su*

[1] Brook Taylor (1685–1731), engleski matematičar

koeficijenti a_n dani formulama

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)\ , \quad \textit{pritom je } f^{(0)}(z_0) := f(z_0) \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta\ , \tag{2}$$

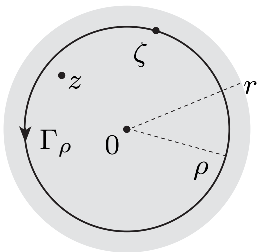
gdje je Γ_0 proizvoljna pozitivno orijentirana kružnica oko z_0 radijusa manjeg od r. To je ***Taylorov red funkcije*** *f u točki z_0.*

Uobičajeno je koeficijente Taylorova reda pisati u obliku (1), pa se najčešće Taylorov red piše kao

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)\,(z - z_0)^n\ .$$

Dokaz: Dokaz ćemo provesti za slučaj $z_0 = 0$. Opći se slučaj dobije translacijom, tj. jednostavnom zamjenom varijable z sa $z - z_0$.

Neka je, dakle, $f \in H(K(0,r))$ i neka je $z \in K(0,r)$ proizvoljna točka. Odaberimo ρ takav da je $|z| < \rho < r$, i neka je Γ_ρ pozitivno orijentirana kružnica oko 0 radijusa ρ. Prema Cauchyjevoj integralnoj formuli, točnije Korolaru 34.5, vrijedi



$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\ . \tag{3}$$

Za svaki $\zeta \in \Gamma_\rho$ je $\zeta \neq 0$ i $\left|\frac{z}{\zeta}\right| < 1$, pa vrijedi

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\,\frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}\ .$$

Uvrstimo li to u (3), dobivamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}\, f(\zeta)\, d\zeta\ . \tag{4}$$

Označimo s $M := \max\{|f(\zeta)| : \zeta \in \Gamma_\rho\}$. Tada je

$$\left|\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}\, f(\zeta)\right| \leq M\,\frac{1}{|\zeta|}\left|\frac{z}{\zeta}\right|^n = M\,\frac{1}{|\rho|}\left|\frac{z}{\rho}\right|^n\ .$$

Kako red $\sum \left|\frac{z}{\rho}\right|^n$ konvergira, to prema Weierstrassovom kriteriju, Teorem 35.12, red pod integralom u (4) konvergira uniformno na Γ_ρ, pa se, prema Korolaru 35.9, može integrirati član po član. Vrijedi zato

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} f(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta \Big) z^n \,.$$

Tako smo prikazali funkciju f kao sumu reda $\sum a_n z^n$, gdje su koeficijenti dâni formulom $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta$, $n \in \mathbb{N}$. Kako je funkcija $\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}$ holomorfna na probušenom krugu $K^*(0,r)$, a kružnica Γ_ρ je u $K^*(0,r)$ homotopna kružnici Γ_0, to su, prema Cauchyjevu teoremu, Teorem 33.4, integrali po tim kružnicama jednaki, pa dobivamo (2) za slučaj $z_0 = 0$.

Prema Teoremu 34.9 o višim derivacijama derivabilne funkcije, znamo da je

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \,,$$

pa je tako dokazana i formula (1) za slučaj $z_0 = 0$. ■

Kao posljedicu Taylorova teorema i Teorema 36.4, dobivamo

Korolar 37.2 (analitičnost holomorfne funkcije) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup. Funkcija $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ je holomorfna u točki $z_0 \in \Omega$ ako i samo ako postoji red potencija $\sum a_n(z - z_0)^n$ s radijusom konvergencije $r > 0$ takav da je*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

za sve z iz neke okoline točke z_0. ■

Ovaj korolar pokazuje, da je svaka derivabilna kompleksna funkcija ne samo holomorfna i da ima derivacije svih redova, kao što smo bili već dokazali u Teoremu 34.9 o višim derivacijama derivabilne funkcije, nego je svaka takva funkcija ujedno i ***analitička***, tj. *može se razviti u red potencija*, što je mnogo više.

Korolar 37.3 *Neka je $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija i $z_0 \in \Omega$. Ako je $f^{(n)}(z_0) = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, onda je f konstantna funkcija na svakom krugu $K(z_0, r)$ oko točke z_0, koji je sadržan u Ω.*

Dokaz: Prema Taylorovu teoremu, za svaki $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$, i svaki $z \in K(z_0, r)$ je $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n$. Ako je $f^{(n)}(z_0) = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, onda je $f(z) = f(z_0)$ za sve $z \in K(z_0, r)$, tj. funkcija f je na tom krugu konstantna. ■

Definicija 37.1 Za točku $z_0 \in \mathbb{C}$ za koju je $f(z_0) = 0$ kažemo da je ***nultočka*** funkcije f. Ako je f holomorfna na nekom krugu $K(z_0, r)$ oko nultočke z_0, i f nije konstantna funkcija 0 na tom krugu, onda, prema prethodnom korolaru, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Najmanji takav prirodan broj n zove se ***red nultočke***.

Teorem 37.4 (o izoliranosti nultočaka holomorfne funkcije) *Neka je funkcija f holomorfna na krugu $K(z_0, r)$ i neka je z_0 njezina nultočka reda n. Tada postoji funkcija g, holomorfna na krugu $K(z_0, r)$, takva da je $g(z_0) \neq 0$, i da za svaki $z \in K(z_0, r)$ vrijedi*

$$f(z) = (z - z_0)^n \, g(z) \, .$$

Štoviše, postoji $\delta > 0$ takav da je $g(z) \neq 0$ za sve $z \in K(z_0, \delta)$.

Dakle, holomorfna funkcija, ako se ne radi o trivijalnoj funkciji $f \equiv 0$, ima samo izolirane nultočke.

Dokaz: Prema Taylorovom teoremu, $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k$, za svaki $z \in K(z_0, r)$. Kako je z_0 nultočka reda n, to je $f^{(k)}(z_0) = 0$ za $k = 0, 1, \ldots, n-1$, pa je

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)\,(z - z_0)^k = (z - z_0)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)\,(z - z_0)^{k-n} \, .$$

Definiramo li funkciju g kao sumu $g(z) := \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)\,(z - z_0)^{k-n}$, bit će na tom krugu zaista $f(z) = (z - z_0)^n \, g(z)$ i $g(z_0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Da je funkcija g holomorfna na krugu $K(z_0, r)$ slijedi iz činjenice da red kojim je funkcija g definirana ima isti radijus konvergencije kao i Taylorov red funkcije f. Zaista, za svaki niz a_n, $n \in \mathbb{N}$, kompleksnih brojeva, prema Propoziciji 36.2 (i), vrijedi

$$\limsup_k \sqrt[k]{|a_{n+k}|} = \limsup_k \left(\sqrt[n+k]{|a_{n+k}|} \right)^{\frac{n+k}{k}} = \limsup_k \sqrt[n+k]{|a_{n+k}|} = \limsup_k \sqrt[k]{|a_k|} \, ,$$

odakle slijedi da redovi za g i f imaju jednake radijuse konvergencije.

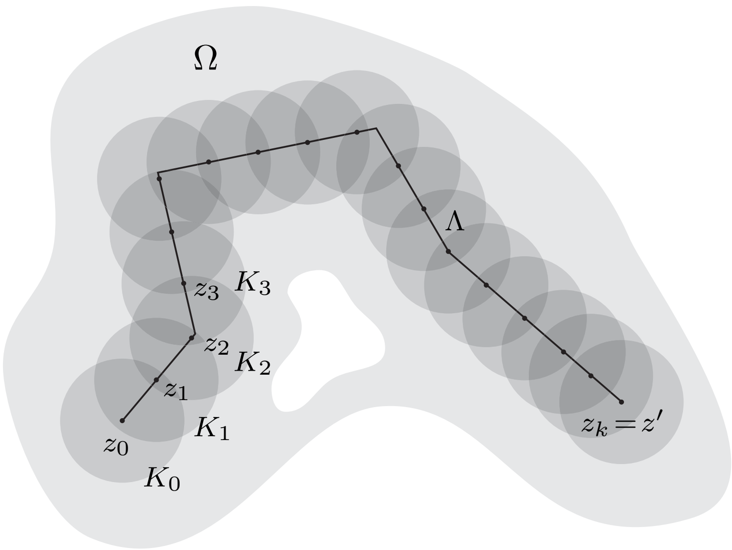
Nadalje, kako je funkcija g holomorfna, to je i neprekidna, a jer je $g(z_0) \neq 0$, postoji $\delta > 0$ takav da je $g(z) \neq 0$ i za sve $z \in K(z_0, \delta)$. Zbog toga je z_0 jedina nultočka funkcije f u krugu $K(z_0, \delta)$. ■

Teorem 37.5 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren i povezan skup, a $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Ako skup nultočaka funkcije f ima gomilište koje pripada skupu Ω, onda je $f(z) = 0$ za sve $z \in \Omega$, tj. $f \equiv 0$ na Ω.*

Dokaz: Neka je $z_0 \in \Omega$ gomilište skupa $f^{\leftarrow}(0)$, skupa nultočaka funkcije f. Tada je, zbog neprekidnosti, i točka z_0 nultočka funkcije f. Tvrdimo da je $f^{(n)}(z_0) = 0$ za sve $n \geq 0$. U protivnom bi z_0 bila nultočka funkcije f nekog, konačnog, reda, pa bi, prema prethodnom teoremu, to bila izolirana nultočka, što se protivi pretpostavci da je ona gomilište skupa nultočaka od f.

Kako je, dakle, $f^{(n)}(z_0) = 0$ za sve $n \geq 0$, iz Taylorovog razvoja funkcije f oko točke z_0, zaključujemo da je na svakom krugu K oko z_0 koji je sadržan u Ω, $f \equiv 0$, tj. $K \subseteq f^{\leftarrow}(0)$.

Pokažimo da je $f \equiv 0$ na cijelom Ω, tj. $f^{\leftarrow}(0) = \Omega$. Neka je $z' \in \Omega$ proizvoljna točka. Kako je Ω otvoren i povezan podskup od $\mathbb{C}$, postoji poligonalna linija $\Lambda \subseteq \Omega$ od točke z_0 do z'. Neka je $\varepsilon := d(\Lambda, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Zbog kompaktnosti je $\varepsilon > 0$ (vidi Korolar 5.10). Odaberimo točke $z_0, z_1, \ldots, z_k = z'$ na Λ tako da je $|z_j - z_{j-1}| < \varepsilon$, $j = 1, \ldots, k$, i neka su $K_j := K(z_j, \varepsilon)$, $j = 0, 1, \ldots, k$, ε-krugovi oko tih točaka. Tada je $K_j \subseteq \Omega$ i $z_j \in K_{j-1} \cap K_j$ za sve $j = 1, \ldots, k$.



Prema prvom dijelu dokaza, $f \equiv 0$ na K_0, tj. $K_0 \subseteq f^{\leftarrow}(0)$. Pretpostavimo, induktivno, da je $f \equiv 0$ na K_{j-1}. Kako je točka z_j gomilište skupa $K_{j-1} \subseteq f^{\leftarrow}(0)$, to je ona gomilište i skupa $f^{\leftarrow}(0)$, skupa nultočaka funkcije f, pa je, prema prvom dijelu dokaza, $f \equiv 0$ i na krugu K_j. Indukcijom zaključujemo da je $f \equiv 0$ i na K_{k-1}, pa je i $f(z') = 0$. ■

Kao posljedicu dobivamo činjenicu, da ako su dvije holomorfne funkcije jednake na, naprimjer, nekom malom luku, one tada moraju biti jednake svuda.

Točnije, vrijedi

Korolar 37.6 (Teorem o jedinstvenosti holomorfne funkcije) *Neka je skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren i povezan, a f i g holomorfne funkcije na Ω. Ako se f i g podudaraju na nekom skupu koji ima gomilište u Ω, onda je $f = g$ na Ω.*

Dokaz: Primijenimo prethodni teorem na funkciju $f - g \colon \Omega \to \mathbb{C}$. ∎

Teorem 37.7 (Cauchyjeve ocjene koeficijenata Taylorova reda) *Neka je $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ za $|z - z_0| < R$, i za pozitivan broj $r < R$ neka je $M(r) := \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}$. Tada je*

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}\,, \qquad \textit{za sve } n \geq 0\,.$$

Dokaz: Prema Teoremu 36.4 o holomorfnosti sume reda potencija, funkcija f je holomorfna na krugu $K(z_0, R)$, a prema definiciji funkcije f i formule za derivaciju iz istog teorema, slijedi da je

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)\,.$$

Zbog toga je, prema Teoremu 34.9 o višim derivacijama derivabilne funkcije,

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta\,,$$

gdje je Γ_0 pozitivno orijentirana kružnica oko z_0 radijusa r. Prema Lemi 32.1 o ocjeni integrala, imamo

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M(r)}{r^{n+1}} \cdot 2r\pi = \frac{M(r)}{r^n}\,.$$ ∎

Zašto za prethodni teorem kažemo da govori o ocjeni koeficijenata *Taylorova* reda, kad zapravo govori o proizvoljnom redu potencija

$$\sum a_n (z - z_0)^n \tag{$*$}$$

s radijusom konvergencije barem R? Ako je $(*)$ proizvoljan red potencija koji konvergira na krugu $K(z_0, R)$, pa s $f(z)$ označimo njegovu sumu, kao što smo učinili u dokazu prethodnog teorema, onda ćemo na isti način kao u prethodnom dokazu, zaključiti da je $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$, pa je red $(*)$ zapravo red $\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n$, dakle Taylorov red funkcije f oko točke z_0. Time je, zapravo, dokazan ***Teorem jedinstvenosti za redove potencija***, koji kaže da ako za svaki z iz nekog otvorenog kruga $K(z_0, R)$, za dva reda vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n ,$$

onda je $a_n = b_n$, za sve $n \geq 0$. Ovaj teorem nismo posebno iskazali i numerirali, jer je on specijalan slučaj općenitijeg Teorema 38.2, kojeg ćemo izreći i dokazati u idućem paragrafu.

Napomena[1] **37.1** Promotrimo funkciju $f\colon \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ definiranu s $f(z) := \frac{1}{1 - z}$. Na krugu $K(0, 1)$ oko 0 radijusa 1, f je holomorfna funkcija, i $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. To je, naravno, izraz koji znamo od ranije kao formulu za sumu geometrijskog reda za $|z| < 1$. To je ujedno i Taylorov red te funkcije na krugu $K(0, 1)$. Radijus konvergencije reda $\sum z^n$ jednak je 1. Zaista, krug $K(0, 1)$ je najveći krug sa središtem u 0, koji je sadržan u domeni funkcije f, tj. u skupu $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, a 'loša' točka za tu funkciju — točka 1, leži na rubu kruga konvergencije.

To nije slučajno. Neka je funkcija f holomorfna u točki z_0 i neka njezin Taylorov red $\sum a_n(z - z_0)^n$ ima radijus konvergencije $r < \infty$. Tada na rubu kruga konvergencije postoji točka u kojoj f nije holomorfna, tj. postoji točka z', $|z' - z_0| = r$, takva da f nije holomorfna niti na jednoj okolini te točke. Naime, kada bi oko svake točke kružnice oko z_0 radijusa r, postojala okolina na kojoj je funkcija f holomorfna, onda bi f bila holomorfna i na nekoj otvorenoj okolini zatvorenog kruga $\overline{K}(z_0, r)$, pa bi i za neki $R > r$, funkcija f bila holomorfna na krugu $K(z_0, R)$. No tada bi radijus konvergencije reda $\sum a_n(z - z_0)^n$ bio veći od r.

To pojašnjava i neke pojave kod realnih funkcija realne varijable. Naprimjer, funkcija $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s $\varphi(x) := \frac{1}{1 + x^2}$, definirana je i analitička na cijelom $\mathbb{R}$. Međutim, njezin Taylorov red oko 0 je $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, i radijus konvergencije tog reda jednak je 1, iako je u točkama ruba intervala konvergencije, dakle u točkama 1 i -1, funkcija φ analitička. Razlog zašto je radijus konvergencije Taylorova reda funkcije φ samo 1, postaje jasan ako na

[1] vidi također Napomenu 36.1.

funkciju φ gledamo kao na restrikciju kompleksne funkcije $f(z) := \dfrac{1}{1+z^2}$ na realnu os. Taylorov red oko 0 za funkciju f je $\sum(-1)^n z^{2n}$, i njegov radijus konvergencije je 1. I zaista se na rubu kruga konvergencije tog reda nalaze točke $\imath$ i $-\imath$ u kojima f nije niti definirana.

Korolar 37.8 *Neka je funkcija f holomorfna na otvorenom krugu $K(z_0, R)$, i neka je $|f(z)| \le M$ za svaki $z \in K(z_0, R)$. Tada je*

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!\,M}{R^n}\,, \qquad \textit{za sve } n \ge 0\,.$$

Dokaz: Prema prethodnom teoremu, uz iste oznake, za svaki $r < R$ je

$$|f^{(n)}(z_0)| = n!\,|a_n| \le \frac{n!\,M(r)}{r^n} \le \frac{n!\,M}{r^n}\,,$$

pa gledajući limes $\lim\limits_{r\to R}$, dobivamo traženu ocjenu. ∎

Ovaj ćemo korolar odmah iskoristiti u dokazu sljedećeg važnog teorema.

Teorem 37.9 (Liouvilleov[1] teorem) *Ako je funkcija f holomorfna na cijeloj kompleksnoj ravnini $\mathbb{C}$, i ako je ograničena, onda je f konstantna funkcija.*

Dokaz: Neka je $|f(z)| < M$ za sve $z \in \mathbb{C}$. Kako je $f \in H(\mathbb{C})$, to je i za svaki $R > 0$, f holomorfna na krugu $K(0, R)$. Prema prethodnom korolaru je

$$|f^{(n)}(0)| \le \frac{n!\,M}{R^n}\,,$$

pa kako to vrijedi za svaki $R > 0$, zaključujemo da je $f^{(n)}(0) = 0$ za sve $n \ge 1$. Prema Korolaru 37.3, f je konstantna funkcija. ∎

Liouvilleov teorem *ne* kaže da su ograničene holomorfne funkcije nužno konstantne. Samo ograničene funkcije koje su holomorfne na *cijeloj* kompleksnoj ravnini su konstantne. Funkcije koje su holomorfne na cijeloj kompleksnoj ravnini, zovu se ***cijele*** ili ***čitave funkcije***. Liouvilleov teorem kaže da su 'prave', tj. nekonstantne, cijele funkcije, uvijek neomeđene. To se možda kosi s našom predodžbom o, naprimjer, funkciji *sinus*, koja je cijela funkcija, i, *kao funkcija realne varijable*, ona je ograničena, ali sinus, kao funkcija kompleksne varijable *nije* ograničena funkcija.

[1] Joseph Liouville (1809–1882), francuski matematičar

Sljedeći teorem zapravo ne spada u analizu, nego u algebru. Međutim, svi njegovi dokazi, kako elementarni tako i sofisticirani, zahtijevaju sredstva analize i/ili topologije. Mi ćemo ovaj teorem ovdje dokazati kao jednostavnu posljedicu Liouvilleova teorema, koji nam je sada pri ruci. Postoje i elementarni dokazi koji koriste samo malo ε–δ tehnike iz realne analize.

Teorem 37.10 (Osnovni teorem algebre) *Neka je* $p(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$*, gdje su* $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$*,* $a_n \neq 0$*,* $n \geq 1$*, polinom s kompleksnim koeficijentima, stupnja barem* 1*. Tada* p *ima barem jednu nultočku, tj. postoji* $z_0 \in \mathbb{C}$ *takav da je* $p(z_0) = 0$*.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da p nema nultočke, dakle da je $p(z) \neq 0$ za sve $z \in \mathbb{C}$. Tada je i funkcija $q\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definirana s $q(z) := \frac{1}{p(z)}$, cijela funkcija. Nadalje,

$$|p(z)| = |z|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right| ,$$

pa je zbog $a_n \neq 0$, $\lim\limits_{|z| \to \infty} |p(z)| = +\infty$. Stoga je $\lim\limits_{|z| \to \infty} q(z) = 0$. To znači da za svaki $\varepsilon > 0$, specijalno za $\varepsilon = 1$, postoji $R > 0$ takav da za sve $z \in \mathbb{C}$, za koje je $|z| > R$, vrijedi $|q(z)| < 1$. Kako je zatvoren krug $\overline{K}(0, R)$ kompaktan, a q je neprekidna funkcija, to je funkcija q na tom krugu omeđena, tj. postoji $M > 0$ takav da je $|q(z)| < M$ za sve $|z| \leq R$, pa je $|q(z)| < M + 1$ za sve $z \in \mathbb{C}$. Prema Liouvilleovom teoremu je q konstantna funkcija, a zbog $\lim\limits_{|z| \to \infty} q(z) = 0$ je $q(z) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, što ne može biti jer je, prema definiciji, $q(z) = \frac{1}{p(z)}$. ∎

§ 38 Laurentov red

Pri proučavanju funkcija koje su holomorfne na nekom krugu oko točke z_0, koristi se razvoj u Taylorov red — red (pozitivnih) potencija od $z - z_0$. Međutim, ako je funkcija u točki z_0 'loša', ali je u drugim točkama holomorfna, koriste se redovi u kojima se osim pozitivnih, pojavljuju i negativne potencije.

Prije nego što iskažemo osnovni teorem, uvedimo neke oznake. Neka su $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, kompleksni brojevi. ***Dvostrani red***, tj. red kome su članovi numerirani (indeksirani) cijelim brojevima, u oznaci $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} c_n$, označavat će sumu dvaju redova, reda $\sum_{n\geq 0} c_n$ i reda $\sum_{n\leq -1} c_n$. Za red $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n$ kažemo da *konvergira*, ako konvergiraju oba reda $\sum_{n\geq 0} c_n$ i $\sum_{n\leq -1} c_n$, a sumu ćemo označavati sa

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n := \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \ .$$

Pritom je

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-1}^{-n} c_k \ ,$$

ili, ako umjesto n pišemo $-n$,

$$:= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \ .$$

Analogno ćemo govoriti o apsolutnoj, a u slučaju redova funkcija, i o uniformnoj i lokalno uniformnoj konvergenciji takvih redova.

Kao i u poglavlju 5, za točku $z_0 \in \mathbb{C}$ i pozitivne brojeve $0 < r < R$, označavat ćemo s $V := V(z_0; r, R)$ kružni vijenac, tj. skup $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$.

Teorem 38.1 (Laurentov[1] teorem) *Neka je funkcija f holomorfna na kružnom vijencu $V := V(z_0; r, R)$ oko točke z_0. Tada za svaki $z \in V$ vrijedi*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \ , \tag{1}$$

gdje su koeficijenti a_n dâni formulom

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \ , \tag{2}$$

a Γ_0 je pozitivno orijentirana kružnica oko z_0 proizvoljnog radijusa ρ, $r < \rho < R$.

*To je **Laurentov red** funkcije f oko točke z_0.*

Dokaz: Kao i kod Taylorova teorema, dokaz ćemo provesti za slučaj $z_0 = 0$, a opći se slučaj dobije zamjenom varijable z sa $z - z_0$. Trebamo, dakle, dokazati da za $z \in V := V(0; r, R)$ vrijedi

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \ , \tag{3}$$

[1] Pierre Alphonse Laurent (1813–1854), francuski inženjer

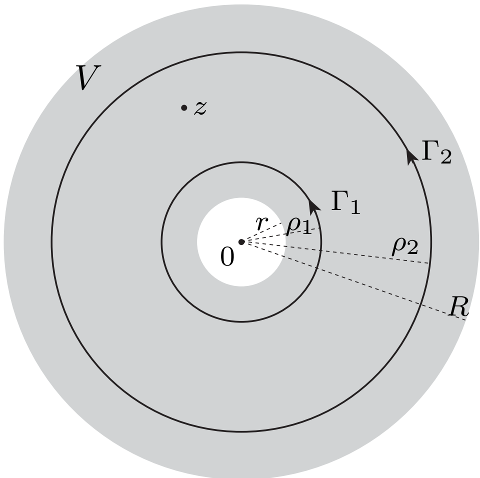
gdje su koeficijenti dâni formulom

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,, \tag{4}$$

a Γ_0 je proizvoljna kružnica oko 0 koja leži u V.

Neka je $z \in V$ i neka su Γ_1 i Γ_2 kružnice oko 0 radijusa ρ_1 i ρ_2 tako da je $r < \rho_1 < |z| < \rho_2 < R$. Prema Cauchyjevoj integralnoj formuli, točnije Korolaru 34.6, je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,. \tag{5}$$



Kao i u dokazu Taylorova teorema 13.1, jer je za sve $\zeta \in \Gamma_2$, $\left|\frac{z}{\zeta}\right| < 1$, u $\int_{\Gamma_2}$ stavimo

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}\,,$$

pa kao i kod Taylorova teorema, dobivamo

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n\,, \tag{6}$$

gdje je

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta\,, \qquad n \geq 0\,. \tag{7}$$

Da bismo izračunali integral $\int_{\Gamma_1}$ u (5), primijetimo da je za $\zeta \in \Gamma_1$, $\left|\frac{z}{\zeta}\right| > 1$, tj. $\left|\frac{\zeta}{z}\right| < 1$, pa $\frac{1}{\zeta - z}$ razvijemo po potencijama od $\frac{\zeta}{z}$. Dobivamo

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^{n-1}}{z^n} = \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

(za drugu jednakost zamijenili smo n s $n-1$, a za treću n s $-n$).

Kao i ranije, dokazavši uniformnu konvergenciju na Γ_1, odavde dobivamo

$$-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n\, z^n\,, \tag{8}$$

gdje je

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta \,, \qquad n \leq -1 \,. \tag{9}$$

Kako su kružnice Γ_1 i Γ_2 u vijencu V homotopne kružnici Γ_0, a funkcija $\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}$ je na V holomorfna, prema općem Cauchyjevom teoremu, Teorem 33.4, integrale po Γ_2 odnosno Γ_1 u (7) odnosno (9), možemo zamijeniti integralima po Γ_0, pa uvrštavanjem formula (6) i (8) u (5), dobivamo (3), a koeficijenti a_n dani su formulom (4). ■

Napomena 38.1 Laurentov teorem vrijedi i u slučaju kada se umjesto kružnog vijenca $V(z_0; r, R)$ radi o ***probušenom krugu*** $K^*(z_0, R) := K(z_0, R) \setminus \{z_0\}$, na koji možemo gledati i kao na degenerirani vijenac s $r = 0$. Najčešće ćemo Laurentov red i promatrati upravo na nekom $K^*(z_0, R)$. Odsada ćemo, za točku $z_0 \in \mathbb{C}$ i realne brojeve $0 \leq r < R$, vijencem $V := V(z_0; r, R)$ zvati otvoren skup, koji je u slučaju $r > 0$ pravi vijenac, a za $r = 0$ je to, zapravo, probušen krug $K^*(z_0, R)$.

Sljedeći teorem najavljivali smo već ranije.

Teorem 38.2 (o jedinstvenosti Laurentova reda)

(*i*) *Ako za svaki* $z \in V := V(z_0; r, R)$ *vrijedi*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n \,, \tag{10}$$

onda je $a_n = b_n$ *za sve* $n \in \mathbb{Z}$.

(*ii*) *Ako je funkcija* f *holomorfna na vijencu* V, *onda je* $f = f_1 + f_2$, *gdje je* f_2 *holomorfna na krugu* $K(z_0, R)$ *a* f_1 *je holomorfna izvan zatvorenog kruga* $\overline{K}(z_0, r)$, *tj. za* $|z - z_0| > r$. *Štoviše, ako je* $\lim_{|z|\to\infty} f_1(z) = 0$, *onda je rastav* $f = f_1 + f_2$ *jedinstven. Funkcija* f_1 *naziva se* ***glavni*** *ili* ***singularni dio***, *a funkcija* f_2 ***regularni dio*** *funkcije* f.

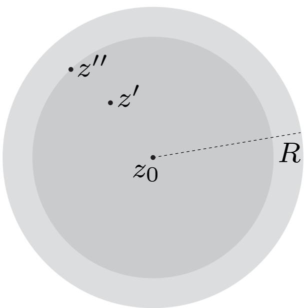
Dokaz: (i)

Pokažimo najprije, da oba reda u (10) konvergiraju lokalno uniformno na vijencu V. Prema definiciji je

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n\leq -1} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n \,. \tag{11}$$

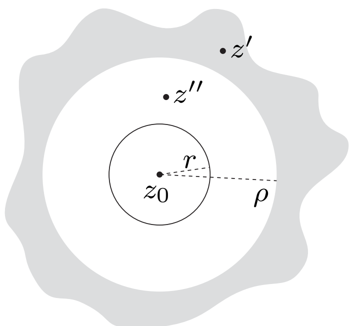
Treba pokazati da oba reda na desnoj strani u prethodnoj formuli, konvergiraju lokalno uniformno na V. Promotrimo najprije drugi od tih redova — red pozitivnih potencija, i pokažimo da on konvergira lokalno uniformno i na većem skupu $K(z_0,R)\supseteq V$.

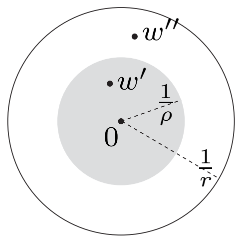
Neka je $z'\in K(z_0,R)$ proizvoljna točka. Odaberimo točku $z''\in V$ tako da



je $|z'-z_0|<|z''-z_0|<R$. Kako red $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(z''-z_0)^n$ konvergira, to prema Abelovoj lemi, Teorem 36.1, red $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ konvergira lokalno uniformno na krugu $K(z_0,|z''-z_0|)$, što, prema definiciji, znači da konvergira uniformno i na nekoj okolini točke z'. Stoga red $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ konvergira lokalno uniformno na $K(z_0,R)$.

Dokažimo sada da prvi od redova na desnoj strani u (11) — red negativnih potencija, konvergira lokalno uniformno *izvan* zatvorenog kruga $\overline{K}(z_0,r)$, tj. na većem skupu $\mathbb{C}\setminus\overline{K}(z_0,r)\supseteq V$. Neka je $z'\in\mathbb{C}\setminus\overline{K}(z_0,r)$. Uz supstituciju





$w:=\dfrac{1}{z-z_0}$ i zamjenu $k:=-n$, taj red postaje

$$\sum_{n\leq -1} a_n(z-z_0)^n = \sum_{k\geq 1} a_{-k}\, w^k \,. \tag{12}$$

Neka je $z''\in V$ takav da je $r<|z''-z_0|<|z'-z_0|$ i neka je ρ takav da je $|z''-z_0|<\rho<|z'-z_0|$. Kako je $z''\in V$, red $\sum\limits_{n\leq -1} a_n(z''-z_0)^n$ konvergira, pa za $w'':=\dfrac{1}{z''-z_0}$, konvergira i red $\sum\limits_{k\geq 1} a_{-k}\, w''^k$. Prema Abelovoj lemi, red $\sum\limits_{k\geq 1} a_{-k}\, w^k$ konvergira lokalno uniformno na krugu $K(0,|w''|)$, pa zbog $\dfrac{1}{\rho}<|w''|=\dfrac{1}{|z''-z_0|}$, konvergira uniformno na zatvorenom krugu $\overline{K}(0,\dfrac{1}{\rho})$, pa onda i na okolini $K(0, \frac{1}{\rho})$ točke w'. Stoga red $\sum\limits_{n\leq -1} a_n(z-z_0)^n$ konvergira uniformno na okolini $\mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0, \rho)$ točke z', pa taj red konvergira lokalno uniformno izvan zatvorenog kruga $\overline{K}(z_0, r)$.

Analogno se dokazuje da i red $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} b_n(z-z_0)^n$ konvergira lokalno uniformno na vijencu V.

Odaberimo $k \in \mathbb{Z}$, i podijelimo oba reda u (10) sa $(z-z_0)^{k+1}$. Dobivamo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{n-k-1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z-z_0)^{n-k-1} . \tag{13}$$

Neka je Γ_0 proizvoljna kružnica oko z_0 koja leži u V. Kako oba ova reda konvergiraju uniformno na kružnici Γ_0, možemo te redove integrirati član po član, Korolar 35.7. Međutim, $\displaystyle\int_{\Gamma_0} (z-z_0)^\ell \, dz = \begin{cases} 0 & , \ \ell \neq -1 \\ 2\pi\mathrm{i} & , \ \ell = -1 \end{cases}$, pa integrirajući (13) po kružnici Γ_0, dobivamo

$$a_k \cdot 2\pi\mathrm{i} = b_k \cdot 2\pi\mathrm{i} \ , \quad k \in \mathbb{Z} \ ,$$

te je $a_k = b_k$ za sve $k \in \mathbb{Z}$, čime je dokazano (i).

(ii) Neka je funkcija f holomorfna na vijencu V, i neka je $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z \in V$, njezin Laurentov razvoj. Definirajmo funkcije f_1 i f_2 formulama

$$f_1(z) := \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-z_0)^n \tag{14}$$

$$f_2(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \ . \tag{15}$$

Kao što smo pokazali u dokazu tvrdnje (i), red u (15) konvergira lokalno uniformno na krugu $K(z_0, R)$, pa je na tom krugu funkcija f_2 holomorfna, a red u (14) konvergira lokalno uniformno izvan zatvorenoga kruga $\overline{K}(z_0, r)$, pa je tamo funkcija f_1 holomorfna.

Ostaje pokazati da je, uz uvjet $\lim\limits_{|z|\to\infty} f_1(z) = 0$, takav rastav jedinstven. Neka je, također, $f = g_1 + g_2$, gdje je $g_2 \in H(K(z_0, R))$ i $g_1 \in H(\mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0, r))$, i vrijedi $\lim\limits_{|z|\to\infty} g_1(z) = 0$. Definirajmo funkciju $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s

$$h(z) := \begin{cases} f_1(z) - g_1(z) & , \ |z-z_0| > r \\ g_2(z) - f_2(z) & , \ |z-z_0| < R \end{cases} .$$

Funkcija h je dobro definirana, jer je za $r < |z - z_0| < R$, tj. za $z \in V$,

$$f_1(z) + f_2(z) = f(z) = g_1(z) + g_2(z)$$

pa je

$$f_1(z) - g_1(z) = g_2(z) - f_2(z) .$$

Iz definicije funkcije h, jasno je da je ona holomorfna na krugu $K(z_0, R)$ i izvan zatvorenog kruga $\overline{K}(z_0, r)$. No kako je presjek tih dvaju otvorenih skupova vijenac V, na kome se formule za h podudaraju, h je holomorfna na čitavoj kompleksnoj ravnini, tj. h je cijela funkcija. Nadalje, kako je $\lim\limits_{|z|\to\infty} f_1(z) = \lim\limits_{|z|\to\infty} g_1(z) = 0$, to je i $\lim\limits_{|z|\to\infty} h(z) = 0$, pa, kao i u dokazu Osnovnog teorema algebre, Teorem 37.10, slijedi da je funkcija h i omeđena. Prema Liouvilleovom teoremu, Teorem 37.9, zaključujemo da je h konstantna funkcija, a kako je $\lim\limits_{|z|\to\infty} h(z) = 0$, to je $h \equiv 0$, pa je $g_1 = f_1$ i $g_2 = f_2$, čime je dokazana jedinstvenost. ■

Upravo dokazan teorem o jedinstvenosti Laurentova reda, vrlo je koristan, kako teoretski, tako i u primjenama. Prvo, on pokazuje da je svaki red pozitivnih i negativnih potencija, koji funkciji f konvergira na nekom vijencu ili (probušenom) krugu, upravo Laurentov red te funkcije. Tu je sadržan i teorem o jedinstvenosti Taylorova reda. Jer i Taylorov red, dakle red sa sâmim nenegativnim potencijama, je također Laurentov red, samo što su svi koeficijenti uz negativne potencije jednaki nuli. Ako, dakle, krenemo razviti funkciju f u Laurentov red oko neke točke u kojoj je ona holomorfna, kao rezultat dobit ćemo njezin Taylorov red, tj. dobit ćemo da su koeficijenti uz sve negativne potencije jednaki nuli.

Drugo, kada trebamo neku funkciju razviti u red potencija — pozitivnih, negativnih — kako ispadne, onda tome obično ne pristupamo tako da počnemo derivirati ili integrirati ne bi li odredili koeficijente dâne formulama (1) i (2) na str. 130 ili (2) na str. 138, nego se nastojimo dočepati traženoga reda (najčešće je dovoljno naći samo nekoliko prvih članova) koristeći neke, od ranije poznate, redove.

Primjer 38.1 Za primjer odredimo Laurentov red funkcije

$$f(z) := \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

oko 0. Budući da f nije definirana u 1 i u 2, razvit ćemo ju u redove na krugu $K(0,1)$ i na vijencima $V(0;1,2)$ i $V(0;2,+\infty)$.

Za drugi sumand, za $|z|<1$, je $-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, dok je za $|z|>1$,

$$-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}=-\sum_{n=-1}^{-\infty} z^n\,.$$

Za prvi sumand, $\frac{1}{z-2}$, za $|z|<2$ vrijedi

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\,,$$

a za $|z|>2$ je

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}=\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\,.$$

Zbrajanjem, na sva tri područja, odgovarajućih redova, dobivamo

$$f(z)=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n & , \quad |z|<1\\ -\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} z^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\,z^n & , \quad 1<|z|<2\\ \sum\limits_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-1\right)z^n & , \quad 2<|z|\end{cases}\,.$$

Ako želimo tu istu funkciju razviti u red, naprimjer, na probušenom krugu $K^*(1,1)$, dakle po potencijama od $z-1$, onda za prvi sumand nalazimo

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{1-(z-1)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n\,,$$

dok je drugi sumand već zapisan kao red potencija od $z-1$, a svi koeficijenti a_n, osim a_{-1}, jednaki su nuli, i $a_{-1}=-1$. Tako dobivamo

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n\,,\quad 0<|z-1|<1\,.$$

Kao i u slučaju Taylorova reda, i kod Laurentova reda dokazuju se sljedeće ocjene za koeficijente:

Teorem 38.3 (Cauchyjeve ocjene koeficijenata Laurentova reda) *Neka je* $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ *za* $0 \leq r < |z-z_0| < R$, *i neka je za* $r < \rho < R$, $M(\rho) := \max\{|f(z)| : |z-z_0| = \rho\}$. *Tada je*

$$|a_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n}\,, \quad \textit{za sve } n \in \mathbb{Z}\,.$$

Dokaz: Prema prethodnom teoremu o jedinstvenosti dvostranih redova, red $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ je upravo Laurentov red funkcije f na vijencu $V(z_0; r, R)$, pa je, prema Laurentovom teoremu 38.1, $a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$, gdje je Γ_ρ kružnica radijusa ρ oko z_0. Tvrdnja se sada dobije, kao i u dokazu Teorema 37.7, korištenjem Leme 32.1 o ocjeni integrala. ■

§ 39 Singulariteti

Laurentovi redovi omogućuju proučavanje funkcija i u okolini točaka u kojima nisu holomorfne, tj. u okolini singulariteta.

Definicija 39.1 Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, a $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija. Kažemo da je točka $z_0 \in \operatorname{Int}\overline{\Omega} = \overline{\Omega} \setminus \partial\overline{\Omega}$ ***singularitet funkcije*** f, ili da funkcija f ***ima u točki*** z_0 ***singularitet***, ako u točki z_0 funkcija f nije holomorfna ili uopće nije definirana u toj točki.

Kako bismo mogli govoriti o tome je li neka točka z_0 singularitet funkcije f ili nije, točka z_0 mora biti okružena točkama u kojima f jeste definirana, točnije, mora biti $z_0 \in \operatorname{Int}\overline{\Omega}$, a je li funkcija f definirana u sâmoj točki z_0 ili nije — nije odlučujuće. Naprimjer, funkcija $f(z) := \frac{1}{1-z}$ ima u točki 1 singularitet, isto kao i funkcija f_1 definirana s $f_1(z) := \begin{cases} \frac{1}{1-z} & , \ z \neq 1 \\ 0 & , \ z = 1 \end{cases}$, iako prva nije definirana u 1, a druga jeste. U svim ostalim točkama kompleksne ravnine, obje su funkcije holomorfne. S druge strane, za funkciju f_2, definiranu s $f_2(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, ne možemo kazati da, u smislu gornje definicije, ima singularitet u točki 1, jer, kako je definirana kao suma reda potencija, njezino područje definicije je samo krug konvergencije toga reda, tj. otvoren krug $K(0,1)$, a točka 1 nije u nutrini zatvarača toga kruga. Druga je stvar što se funkcija f_2 na svojoj domeni podudara s restrikcijom funkcije f, a funkcija f zaista ima u točki 1 singularitet.

Singulariteta ima različitih i vrlo 'neugodnih'. Mi ćemo promatrati samo tzv. izolirane singularitete:

Definicija 39.2 Za singularitet z_0 kažemo da je ***izoliran singularitet*** funkcije f, ako je f holomorfna funkcija na nekom probušenom krugu $K^*(z_0, R)$ oko točke z_0.

Naprimjer, točka 1 je izoliran singularitet maloprije promatranih funkcija f i f_1. Isto je tako 0 izoliran singularitet funkcije $z \mapsto \sin\frac{1}{z}$, ali 0 nije izoliran singularitet funkcije $z \mapsto \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$. Prema gornjoj definiciji, za točku 1 ne možemo kazati da je izoliran singularitet funkcije f_2, jer ta funkcija, onako kako je zadana, definirana je samo tamo gdje red $\sum z^n$ konvergira, pa nije definirana niti u jednoj točki izvan zatvorenog kruga $\overline{K}(0,1)$, dakle, nije definirana niti na jednom probušenom krugu $K^*(1, R)$, $R > 0$. Ipak, funkcija f_2 podudara se s funkcijom f na krugu $K(0,1)$, pa na f možemo gledati kao na proširenje funkcije f_2, i u tom smislu može se ipak za točku 1 kazati da je izolirani singularitet funkcije f_2. Mi u tako detaljna razmatranja nećemo ulaziti, i bavit ćemo se samo 'pravim' izoliranim singularitetima koji su okruženi točkama u kojima promatrana funkcija je definirana, dakle točkama $z_0 \in \operatorname{Int}\overline{\Omega}$.

Napomena 39.1 Primijetimo da funkcija može imati i beskonačno mnogo izoliranih singulariteta. Ali, ako funkcija ima samo izolirane singularitete, onda skup singulariteta ne može imati gomilište koje je sadržano u Ω. Stoga niti jedan kompaktan podskup od Ω ne može sadržavati više od konačno mnogo izoliranih singulariteta takve funkcije f. Nadalje, svaki otvoren podskup od $\mathbb{C}$ je σ-kompaktan, tj. prebrojiva je unija kompaktnih podskupova, vidi Teorem 5.5, pa odavde slijedi da funkcija koja ima samo izolirane singularitete, može ih imati najviše prebrojivo mnogo.

Pokazat ćemo da postoje tri vrste izoliranih singulariteta: uklonjivi, polovi i bitni singulariteti. Pođimo redom:

Za izoliran singularitet z_0 funkcije f kažemo da je ***uklonjiv***, ako u točki z_0 možemo funkciju f predefinirati ili, ako u z_0 nije bila definirana, dodefinirati, tako da postane holomorfna na nekom (pravom, neprobušenom) krugu $K(z_0, R)$ oko točke z_0. Drugim riječima, singularitet je uklonjiv, ako ga možemo ukloniti.

Sljedeći teorem daje nekoliko karakterizacija uklonjivog singulariteta.

Teorem 39.1 (Karakterizacija uklonjivih singulariteta) *Neka je funkcija f holomorfna na probušenom krugu $K^*(z_0, R)$. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(*i*) *z_0 je uklonjiv singularitet funkcije f.*

(*ii*) *Postoji limes $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.*

(*iii*) *f je omeđena na nekoj okolini točke z_0.*

(*iv*) $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)\, f(z) = 0$

(*v*) *U Laurentovom razvoju funkcije f oko točke z_0 nema negativnih potencija, tj. svi koeficijenti uz negativne potencije jednaki su nuli.*

Dokaz: (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) Ako je z_0 uklonjiv singularitet funkcije f, onda, uklonivši ga, dobivamo funkciju, nazovimo ju $\hat{f}$, koja je holomorfna na nekoj okolini točke z_0, pa ona, zbog neprekidnosti, ima u z_0 limes. Kako je za limes neke funkcije nebitno je li i kako je ona definirana u točki u kojoj se promatra limes, to i funkcija f ima u točki z_0 limes.

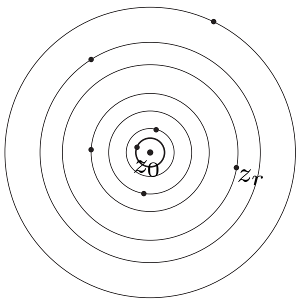
(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*) Ova implikacija slijedi iz sâme definicije limesa. Naime, neka je $\ell := \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$. To znači, da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $z \in K^*(z_0, \delta)$ vrijedi $|f(z) - \ell| < \varepsilon$. Stoga je $f(K(z_0, \delta)) \subseteq K(\ell, \varepsilon) \cup \{f(z_0)\}$ ako f jeste definirana u z_0, ili je $f(K^*(z_0, \delta)) \subseteq K(\ell, \varepsilon)$, ukoliko nije. U oba je slučaja f ograničena na δ-okolini točke z_0.

(*iii*) $\Rightarrow$ (*iv*) Ova je implikacija trivijalna, jer ako je f omeđena na nekoj okolini točke z_0, onda zbog $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) = 0$, slijedi da limes $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)\, f(z)$ postoji, i jednak je 0.

(*iv*) $\Rightarrow$ (*v*) Za broj $0 < r < R$, s $M(r)$ označimo maksimum modula funkcije f na kružnici oko z_0 radijusa r, dakle, $M(r) := \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}$. Dokažimo, najprije, da je

$$\lim_{r \to 0} r\, M(r) = 0\ . \tag{1}$$

Zbog kompaktnosti kružnice, za svaki $r < R$, postoji točka z_r, $|z_r - z_0| = r$, takva da je $M(r) = |f(z_r)|$. Označimo sa S skup tako odabranih točaka z_r. Zbog (*iv*) je i $\lim\limits_{z \to z_0} |z - z_0|\, |f(z)| = 0$, a kako je z_0 očito gomilište skupa S, to je i



$$0 = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in S}} |z - z_0|\, |f(z)| = \lim_{z_r \to z_0} |z_r - z_0|\, |f(z_r)| = \lim_{r \to 0} r\, M(r)$$

čime je dokazano (1).

Neka je $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ Laurentov razvoj funkcije f na probušenom krugu $K^*(z_0, R)$. Prema Cauchyjevim ocjenama koeficijenata Laurentova reda, Teorem 38.3, je $|a_{-n}| \leq r^n M(r)$ za sve $n \geq 1$, pa zbog (1) zaključujemo da je $a_{-n} = 0$ za sve $n \geq 1$, tj. koeficijenti uz sve negativne potencije u Laurentovom redu funkcije f oko točke z_0, jednaki su nuli.

$(v) \Rightarrow (i)$ Ova implikacija je opet jednostavna. Zaista, prema (v), Laurentov razvoj funkcije f na $K^*(z_0, R)$ ima oblik $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Definiramo li $f(z_0) := a_0$, singularitet smo uklonili, jer dobivena je funkciju na cijelom krugu $K(z_0, R)$ jednaka sumi reda (nenegativnih) potencija, pa je holomorfna na tom krugu. ■

Primjer 39.1 Kao primjer, promotrimo funkciju $f(z) := \frac{1-\cos 2z}{z^2}$, koja je holomorfna svuda osim u točki 0, gdje nije definirana. Pokažimo da je taj, očito izoliran, singularitet, uklonjiv. Kako je $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots$, to je

$$f(z) = \frac{1 - \left(1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - \frac{(2z)^6}{6!} + \cdots\right)}{z^2} = \mathbf{2} - \frac{2}{3}\, z^2 + \frac{4}{45}\, z^4 + \cdots .$$

Dakle, 0 je uklonjiv singularitet funkcije f, i definiramo li $f(0) := 2$ — uklonili smo ga.

Funkcije s uklonjivim singularitetima su gotovo tako dobre kao holomorfne funkcije. Specijalno, i za njih vrijedi opći Cauchyjev teorem:

Korolar 39.2 (Cauchyjev teorem za funkcije s uklonjivim singularitetima) *Neka je funkcija $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna, osim možda u nekim točkama, u kojima ima uklonjive singularitete. Tada je za svaki, u Ω nulhomotopan, zatvoren po dijelovima gladak put γ, $\int\limits_\gamma f\, dz = 0$.*

Dokaz: Uklonimo li singularitete funkcija f, dobivamo holomorfnu funkciju $\hat{f}$, pa na nju primijenimo opći Cauchyjev teorem, Teorem 33.4. Ako put integracije ne prolazi niti jednim uklonjivim singularitetom funkcije f, onda se $\hat{f}$ i f duž tog puta podudaraju, pa su im i integrali jednaki. Ali i ako put integracije prolazi nekim od uklonjivih singulariteta funkcije f, to na integral nema utjecaja. Naime, kako su uklonjivi singulariteti izolirani, na putu γ ih, prema Napomeni 39.1, ima samo konačno mnogo, a kao što znamo od ranije, promjena funkcije u konačno mnogo točaka ne utječe niti na njezinu integrabilnost, niti na sâm integral. ■

Drugi tip izoliranih singulariteta su polovi. Za izoliran singularitet z_0 funkcije f kažemo da je ***pol***, ako u Laurentovom razvoju funkcije f oko točke z_0 ima konačno mnogo (ali barem jedan) članova s negativnim potencijama, tj. s potencijama od $\frac{1}{z-z_0}$. ***Red pola*** je red najveće potencije od $\frac{1}{z-z_0}$ koja se u tom Laurentovom razvoju pojavljuje s koeficijentom različitim od nule.

Teorem 39.3 (Karakterizacija polova) *Neka je funkcija f holomorfna na probušenom krugu $K^*(z_0, R)$. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(*i*) *z_0 je pol funkcije f (reda m).*

(*ii*) *z_0 nije uklonjiv singularitet funkcije f, ali postoji prirodan broj k takav da je z_0 uklonjiv singularitet funkcije $z \mapsto (z-z_0)^k f(z)$. (Najmanji takav k upravo je m — red pola.)*

(*iii*) $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$.

Dokaz: (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) Ako je z_0 pol m-tog reda funkcije f, onda, prema definiciji, Laurentov razvoj funkcije f oko točke z_0 ima oblik $f(z) = \sum\limits_{n=-m}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, $a_{-m} \neq 0$, $m \geq 1$, pa prema Teoremu 39.1 kojim su karakterizirani uklonjivi singulariteti, z_0 nije uklonjiv singularitet funkcije f. Pomnožimo li f sa $(z-z_0)^k$, za svaki $k \geq m$ dobit ćemo funkciju koja u svom Laurentovom razvoju oko točke z_0 nema negativnih potencija, pa je, prema istom teoremu, z_0 uklonjiv singularitet te funkcije. Očito je najmanji prirodan broj s ovim svojstvom, upravo broj m — red pola.

(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*) Ako funkcija $g(z) := (z-z_0)^m f(z)$ ima u z_0 uklonjiv singularitet, onda, prema Teoremu 39.1, postoji limes $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) \in \mathbb{C}$, pa je, zbog $m \geq 1$, $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{|g(z)|}{|z-z_0|^m} = +\infty$.

(*iii*) $\Rightarrow$ (*i*) Pretpostavimo da je $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$. To znači da za svaki $M > 0$ postoji $\delta > 0$, takav da za svaki $z \in K^*(z_0, \delta)$ vrijedi $|f(z)| > M$. Specijalno (uzevši npr. $M = 1$), postoji $\delta > 0$ takav da je $f(z) \neq 0$ za sve $z \in K^*(z_0, \delta)$. Definirajmo funkciju $g\colon K^*(z_0, \delta) \to \mathbb{C}$ s $g(z) := \frac{1}{f(z)}$. Funkcija g je holomorfna na $K^*(z_0, \delta)$ i $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = 0$. Prema Teoremu 39.1, g ima u z_0

uklonjiv singularitet, i ako definiramo $g(z_0) := 0$, dobivamo holomorfnu funkciju na cijelom krugu $K(z_0, \delta)$.

Točka z_0 je jedina nultočka funkcije g, i označimo njezin red s m. Prema Teoremu 37.4, na krugu $K(z_0, \delta)$ postoji holomorfna funkcija h takva da je

$$g(z) = (z - z_0)^m \, h(z) \ , \quad |z - z_0| < \delta \ , \tag{2}$$

i $h(z) \neq 0$ za sve $|z - z_0| < \delta$. Zbog toga je i funkcija $\frac{1}{h}$ holomorfna na $K(z_0, \delta)$, i neka je $\frac{1}{h(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ njezin Taylorov razvoj oko z_0. Tada je, prema (2),

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{g(z)} &= \frac{1}{(z - z_0)^m} \, \frac{1}{h(z)} \ , \quad 0 < |z - z_0| < \delta \\ &= \sum_{n=-m}^{\infty} b_{m+n} (z - z_0)^n \ , \end{aligned}$$

pa f ima u z_0 pol m-tog reda, jer je $b_0 = \frac{1}{h(z_0)} \neq 0$. ∎

Primjeri 39.2

(i) Za $k \in \mathbb{N}$, funkcija $z \mapsto \frac{1}{z^k}$, ima u $z_0 = 0$ pol k-tog reda.

(ii) Funkcija $f(z) := \frac{1}{\sin z}$ ima u $z_0 = 0$ pol prvog reda. Zaista, 0 je izoliran singularitet funkcije f, jer, kako je sinus holomorfna funkcija, sve njezine nultočke, pa tako i 0, su izolirane. Da je 0 pol funkcije f slijedi već iz činjenice da je $\lim\limits_{z \to 0} \frac{1}{|\sin z|} = +\infty$. Kojega je reda taj pol? Kako nemamo na raspolaganju Laurentov razvoj funkcije f, možemo razmišljati ovako:

Promatrajmo funkciju

$$z \mapsto z f(z) = z \, \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{\frac{\sin z}{z}} \ .$$

Funkcija $z \mapsto \frac{\sin z}{z}$ ima u 0 uklonjiv singularitet, jer je njezin Laurentov razvoj oko 0 (prvih nekoliko članova)

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\Big(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\Big) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots \ ,$$

pa je $\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1$. Odavde slijedi da je $\lim_{z\to 0} z\,\frac{1}{\sin z} = 1$, pa, prema Teoremu 39.1, funkcija $z \mapsto z\,\frac{1}{\sin z}$ ima u 0 uklonjiv singularitet. Primijenimo li sada prethodni teorem kojim su karakterizirani polovi, zaključujemo da funkcija $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ ima u 0 pol, i to prvoga reda.

Definicija 39.3 Za funkciju f kažemo da je ***meromorfna*** na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ako ima samo uklonjive singularitete i polove, i ako skup singulariteta nema gomilište u Ω.

Tipični primjeri meromorfnih funkcija su racionalne funkcije. One, ako su brojnik i nazivnik relativno prosti, tj. razlomak je 'skraćen do kraja', od singulariteta imaju samo polove, i to u nultočkama nazivnika. Ima međutim i drugih meromorfnih funkcija. Naprimjer, funkcija $z \mapsto \frac{1}{\sin z}$ također je meromorfna na $\mathbb{C}$, jer ona, od singulariteta u $\mathbb{C}$, ima samo polove, i to u nultočkama funkcije sinus. Treba ipak malo pripaziti. Funkcija $z \mapsto \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ meromorfna je na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, ali nije meromorfna na $\mathbb{C}$, jer 0 jeste singularitet te funkcije, ali nije izoliran (pa ne može biti pol niti uklonjiv singularitet).

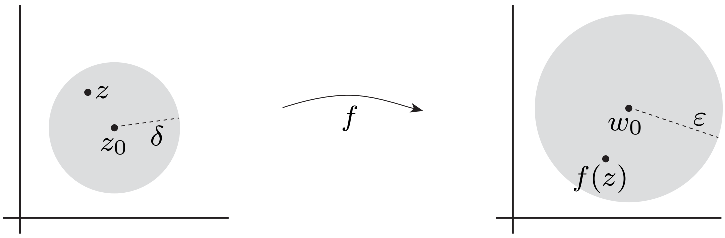
Promatrajući Laurentov razvoj funkcije oko singulariteta z_0, ostaje još jedna mogućnost — da je glavni dio beskonačan. Za izoliran singularitet z_0 kažemo da je ***bitan singularitet*** ako u Laurentovom razvoju funkcije f oko točke z_0 ima beskonačno mnogo članova s negativnim potencijama, tj. beskonačno mnogo koeficijenata uz negativne potencije je različito od nule.

Iz već dokazanog o ponašanju funkcije u okolini uklonjivih singulariteta i polova, vidimo da funkcija ne može biti ograničena niti na jednoj okolini bitnog singulariteta, ali ne može niti po modulu težiti u $+\infty$. Ona je, dakle, neomeđena na svakoj okolini točke z_0, i čak njezin modul nema niti konačnog niti beskonačnog limesa. Preciznije o ponašanju funkcije u okolini bitnog singulariteta, govori sljedeći teorem.

Teorem 39.4 (Casorati[1]-Weierstrass-Sohockij[2]) *Neka je funkcija f holomorfna na probušenom krugu $K^*(z_0,R)$. Točka z_0 je bitan singularitet funkcije f ako i samo ako je za svaki $\delta > 0$, slika probušenog kruga $K^*(z_0,\delta)$ gusta na $\mathbb{C}$, tj. za svaki $w \in \mathbb{C}$ i svaki $\varepsilon > 0$, postoji $z \in K^*(z_0,\delta)$, takav da je $|f(z) - w| < \varepsilon$.*

[1] Felice Casorati (1835–1890), talijanski matematičar

[2] Julian-Karl Vasilievič Sohockij (1842–1927), ruski matematičar, rođen u Poljskoj



Dokaz: Neka je z_0 bitan singularitet funkcije f, i odaberimo δ, w i ε kao u iskazu teorema. Ako postoji $z \in K^*(z_0, \delta)$ takav da je $f(z) = w$, tvrdnja je dokazana.

Pretpostavimo, dakle, da je $f(z) \neq w$ za svaki $z \in K^*(z_0, \delta)$. Tada je i funkcija $g\colon K^*(z_0, \delta) \to \mathbb{C}$, definirana s $g(z) := \dfrac{1}{f(z) - w}$, holomorfna na $K^*(z_0, \delta)$. Funkcija g ima u z_0 izoliran singularitet.

Ako je funkcija g omeđena na nekoj okolini točke z_0, onda je z_0 uklonjiv singularitet, pa postoji limes $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) =: \ell \in \mathbb{C}$.

Ako je $\ell \neq 0$, onda je $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \dfrac{1}{\ell} + w$, pa bi, prema Teoremu 39.1, funkcija f imala u z_0 uklonjiv singularitet, i u njezinom Laurentovom razvoju oko z_0 ne bi bilo negativnih potencija.

Ako je $\ell = 0$, onda je $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z) - w| = +\infty$, pa je i $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$, što bi, prema Teoremu 39.3, značilo da f ima u z_0 pol, dakle, u Laurentovom razvoju bilo bi samo konačno mnogo negativnih potencija.

Prema tome, otpadaju obje mogućnosti, pa je funkcija g neomeđena na svakoj okolini točke z_0. To specijalno znači, da i za odabrane δ i ε, postoji $z \in K^*(z_0, \delta)$ takav da je $|g(z)| > \dfrac{1}{\varepsilon}$, tj. $|f(z) - w| < \varepsilon$.

Obrat je jednostavan. Naime, ako je za svaki $\delta > 0$, slika probušenog δ-kruga oko z_0 gusta na $\mathbb{C}$, onda niti može f biti omeđena na nekoj okolini točke z_0, niti može limes modula biti jednak $+\infty$. Prema karakterizacijama uklonjivih singulariteta, odnosno polova, zaključujemo da u Laurentovom razvoju funkcije f oko točke z_0 mora biti beskonačno mnogo negativnih potencija, pa je z_0 bitan singularitet funkcije f. ■

Primjeri funkcija s bitnim singularitetom su $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$ i $z \mapsto \sin \dfrac{1}{z}$. Obje ove funkcije imaju bitan singularitet u 0, što se jednostavno vidi iz njihovih Laurentovih razvoja.

§ 40 Reziduumi

U ovoj ćemo točki dokazati teorem o reziduumima, koji je vrlo koristan i teoretski i u primjenama.

Definicija 40.1 Neka je funkcija f holomorfna na probušenom krugu $K^*(z_0, r)$ i neka je $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ njezin Laurentov red oko točke z_0. Koeficijent a_{-1} uz $\dfrac{1}{z-z_0}$ naziva se ***reziduum*** funkcije f u točki z_0, i označavamo ga $\operatorname{res}(f, z_0)$.

Promotrimo li Laurentov razvoj funkcije $z \mapsto f(z) - \dfrac{\operatorname{res}(f,z_0)}{z-z_0}$ oko točke z_0, vidimo da ona ima na probušenom krugu $K^*(z_0, r)$ primitivnu funkciju. Tako na reziduum funkcije u nekoj točki, možemo gledati kao na mjeru koliko se ta funkcija razlikuje od derivacije neke holomorfne funkcije definirane na okolini te točke.

Prema formuli (2) na str. 138, za koeficijente Laurentova reda, vidimo da je

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_0} f(\zeta)\, d\zeta \ ,$$

gdje je Γ_0 neka dovoljno mala pozitivno orijentirana kružnica oko z_0. Napišemo li tu formulu kao

$$\int_{\Gamma_0} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi \mathrm{i} \operatorname{res}(f, z_0) \ ,$$

dobivamo korisnu formulu za nalaženje integrala kompleksne funkcije u slučajevima kada znamo njezin Laurentov razvoj, ili barem koeficijent uz $\dfrac{1}{z-z_0}$. Teorem o reziduumima, koji ćemo sada dokazati, poopćuje tu formulu.

Teorem 40.1 (o reziduumima za funkcije s konačno mnogo singulariteta) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija koja je holomorfna osim u točkama $s_1, s_2, \ldots, s_k$, u kojima ima izolirane singularitete, i neka je γ zatvoren, u Ω nulhomotopan, po dijelovima gladak put, koji ne prolazi niti jednom od tih točaka. Tada je*

$$\int_\gamma f\, dz = 2\pi \mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} \nu(\gamma, s_j) \cdot \operatorname{res}(f, s_j) \ . \tag{1}$$

Dokaz: Neka je $g_j(z) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(j)} (z - s_j)^{-n}$ glavni dio Laurentova razvoja funkcije f oko točke s_j, $j = 1, \ldots, k$. Definirajmo funkciju $h \colon \Omega \to \mathbb{C}$ formulom

$$h(z) := f(z) - \sum_{j=1}^{k} g_j(z) \,. \tag{2}$$

Svaka od funkcija g_j je holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \{s_j\}$, pa je funkcija h holomorfna, osim u točkama $s_1, s_2 \ldots, s_k$, u kojima ima uklonjive singularitete. Primijenimo li sada Cauchyjev teorem za funkcije s uklonjivim singularitetima, Korolar 39.2, dobivamo

$$\int_\gamma h \, dz = 0 \,. \tag{3}$$

Za svaki $j \in \{1, \ldots, k\}$ je

$$\int_\gamma g_j \, dz = 2\pi \mathrm{i} \, \nu(\gamma, s_j) \operatorname{res}(f, s_j) \,. \tag{4}$$

Zaista, kako je funkcija g_j holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \{s_j\}$, red kojim je ona definirana konvergira lokalno uniformno na cijelom skupu $\mathbb{C} \setminus \{s_j\}$, vidi dokaz tvrdnje (i) teorema o jedinstvenosti Laurentova reda, Teorem 38.2, pa, jer put γ ne prolazi točkom s_j, taj red konvergira uniformno na $\gamma^\clubsuit$. Zato možemo integrirati član po član, pa dobivamo

$$\int_\gamma g_j \, dz = \int_\gamma \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(j)} (z - s_j)^{-n} \, dz = a_{-1}^{(j)} \, 2\pi \mathrm{i} \; \nu(\gamma, s_j) = 2\pi \mathrm{i} \, \nu(\gamma, s_j) \operatorname{res}(f, s_j) \,,$$

jer za $n \neq 1$, funkcije $z \mapsto \dfrac{1}{(z - s_j)^n}$ imaju na $\mathbb{C} \setminus \{s_j\} \supseteq \gamma^\clubsuit$, primitivnu funkciju, te je njihov integral duž γ jednak nuli.

Zbrajanjem formulâ (4), iz (2) i (3) dobivamo tvrdnju teorema. ■

Teorem 40.2 (o reziduumima) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija koja je holomorfna osim u točkama skupa $S \subseteq \Omega$, u kojima ima izolirane singularitete, i neka je $\gamma \colon [a, b] \to \Omega$ zatvoren, u Ω nulhomotopan, po dijelovima gladak put, koji ne prolazi niti jednim singularitetom funkcije f, tj. $\gamma^\clubsuit \cap S = \emptyset$.*

Tada je indeks puta γ s obzirom na sve točke skupa S osim njih konačno mnogo, jednak nuli, i vrijedi

$$\int_\gamma f\,dz = 2\pi\mathrm{i}\sum_{s\in S}\nu(\gamma,s)\cdot\operatorname{res}(f,s)\ . \tag{5}$$

Dokaz: Primijetimo najprije, da, prema Napomeni 39.1, S, skup singulariteta funkcije f, nema gomilište koje pripada skupu Ω, jer bi inače to gomilište bilo neizoliran singularitet funkcije f. Stoga proizvoljan kompaktan podskup od Ω sadrži najviše konačno mnogo elemenata skupa S.

Neka je γ zatvoren po dijelovima gladak put, nulhomotopan u Ω, i neka je $H\colon [a,b]\times[0,1]\to\Omega$ homotopija između γ i nekog konstantnog puta. Označimo s $H^\clubsuit := H([a,b]\times[0,1])\subseteq\Omega$ trag (sliku) homotopije H. Za svaku točku $z\in\mathbb{C}\setminus H^\clubsuit$ je zatvoren put γ nulhomotopan u $\mathbb{C}\setminus\{z\}$, pa je $\nu(\gamma,z)=0$, Propozicija 34.3 (i).

Označimo sa $S_H := S\cap H^\clubsuit$ skup onih singulariteta funkcije f koji se nalaze u skupu $H^\clubsuit$, i neka je $S_O := S\setminus S_H$ skup ostalih singulariteta. Zbog kompaktnosti pravokutnika $[a,b]\times[0,1]$ i neprekidnosti homotopije H, skup $H^\clubsuit$ je kompaktan, pa je skup S_H konačan, a za sve točke $s\in S_O$ je $\nu(\gamma,s)=0$.

Neka je $\Omega_1 := \Omega\setminus S_O$. Pokažimo da je to otvoren skup. Neka je $z\in\Omega_1$ proizvoljna točka. z nije gomilište skupa S_O, jer bi to onda bilo i gomilište skupa S, a pokazali smo da takvih u Ω nema. Zbog toga, postoji $r>0$ takav da je $K(z,r)\subseteq\Omega\setminus S_O=\Omega_1$, tj. skup Ω_1 je otvoren.

Restrikcija funkcije f na otvoren skup Ω_1 je funkcija koja je holomorfna, osim u točkama konačnog skupa $S_H =: \{s_1,\dots,s_k\}$, a zatvoren put γ je nulhomotopan u Ω_1, jer je $H^\clubsuit\subseteq\Omega_1$. Možemo, dakle, na tu restrikciju primijeniti prethodni teorem o reziduumima za funkciju s konačno mnogo singulariteta, pa dobivamo

$$\int_\gamma f\,dz = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\nu(\gamma,s_j)\ \operatorname{res}(f,s_j)\ .$$

Kako smo dokazali da je $\nu(\gamma,s)=0$ za sve $s\in S_O$, to sumu u prethodnoj formuli možemo napisati i kao $\sum\limits_{s\in S}$, pa smo tako dokazali (5). ■

§ 41 Broj nultočaka i polova meromorfnih funkcija

Primijenit ćemo sada teorem o reziduumima na određivanje broja nultočaka i polova meromorfnih funkcija, a kao jednostavnu posljedicu dobit ćemo i dokaz Drugog osnovnog teorema algebre.

Kako meromorfna funkcija, u točkama u kojima nije holomorfna, ima samo uklonjive singularitete i polove, možemo uklonjive singularitete zaista i ukloniti, tako da općenito možemo smatrati da meromorfna funkcije ima samo polove.

Za točku z_0 koja je nultočka ili pol funkcije f, s $r(z_0, f) \in \mathbb{N}$ označit ćemo red te nultočke odnosno pola.

Teorem 41.1 *Neka je f meromorfna funkcija na otvorenom povezanom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, koja nije konstanta 0, $f \not\equiv 0$. $\Gamma \subseteq \Omega$ neka je pozitivno orijentirana kontura koja ne prolazi niti jednom nultočkom niti polom funkcije f i čije je unutarnje područje B sadržano u Ω, te neka je $h \in H(\Omega)$ proizvoljna holomorfna funkcija. Tada je*

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma h(z)\, \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \quad = \sum_{\substack{z' \in B \\ z' \text{ je nultočka od } f}} h(z')\, r(z', f) \quad - \sum_{\substack{z'' \in B \\ z'' \text{ je pol od } f}} h(z'')\, r(z'', f)\ . \quad (1)$$

Dokaz: Kako je $\nu(\Gamma, z_0) = 1$ za svaku točku $z_0 \in B$, to je, prema teoremu o reziduumima, Teorem 40.2,

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma h(z)\, \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \quad = \sum_{\substack{s \in B \\ s \text{ je singularitet od } h\frac{f'}{f}}} \operatorname{res}(h\, \frac{f'}{f}, s)\ . \quad (2)$$

Odredimo reziduume funkcije $h\, \frac{f'}{f}$ u njezinim singularitetima koji se nalaze u unutrašnjem području B konture Γ. U točkama u kojima je funkcija f holomorfna i nije jednaka nuli, funkcija $h\, \frac{f'}{f}$ je holomorfna. Zato se singulariteti funkcije $h\, \frac{f'}{f}$ nalaze među nultočkama i singularitetima, dakle polovima, funkcije f. Niti skup nultočaka niti skup polova funkcije f nema gomilišta u Ω, pa smo na funkciju $h\, \frac{f'}{f}$ zaista mogli primijeniti teorem o reziduumima.

Neka je, prvo, s nultočka funkcije f, i to reda $r(s,f) =: n$. Prema Teoremu 37.4, postoje $\delta > 0$ i holomorfna funkcija $g \in H(K(s,\delta))$, takvi da je

$$\begin{aligned} f(z) = (z-s)^n\, g(z)\ , \quad & z \in K(s,\delta)\ , \text{ i} \\ g(z) \neq 0\ , \quad & z \in K(s,\delta)\ . \end{aligned}$$

Za svaki $z \in K^*(s,\delta)$ tada vrijedi

$$h(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = h(z)\frac{n}{z-s} + h(z)\frac{g'(z)}{g(z)}\ .$$

Kako je drugi sumand, funkcija $h\,\frac{g'}{g}$, holomorfna na krugu $K(s,\delta)$, to je singularitet funkcije $h\,\frac{f'}{f}$ zapravo singularitet funkcije $z \mapsto h(z)\frac{n}{z-s}$. Razvijemo li funkciju h na δ-krugu oko s u Taylorov red, vidimo da ako je $h(s) = 0$, onda je s uklonjiv singularitet funkcije $z \mapsto h(z)\frac{n}{z-s}$, pa je njezin reziduum u s jednak nuli, dakle jednak je broju $h(s)\cdot n$. Ako je $h(s) \neq 0$ onda funkcija $z \mapsto h(z)\frac{n}{z-s}$ ima u s pol prvog reda, i njezin reziduum je opet jednak $h(s)\cdot n$.

Ponovimo li ovo zaključivanje za svaku nultočku funkcije f koja se nalazi unutar konture Γ, dobivamo prvi sumand u (1).

Neka je sada s pol funkcije f reda p. Ako u Laurentovom razvoju funkcije f oko pola s izlučimo faktor $(z-s)^{-p}$, vidimo da, kao i u slučaju nultočke, postoji $\delta > 0$ i holomorfna funkcija $g \in H(K(s,\delta))$, sa svojstvom $g(z) \neq 0$ za sve $z \in K(s,\delta)$, i takva da je

$$f(z) = \frac{1}{(z-s)^p}\, g(z)\ , \quad z \in K^*(s,\delta)\ .$$

Kao i ranije, dobivamo

$$h(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = h(z)\frac{-p}{z-s} + h(z)\frac{g'(z)}{g(z)}\ ,$$

pa zaključujemo da je

$$\operatorname{res}(h\frac{f'}{f}, s) = h(s)\cdot(-p) = -h(s)\cdot r(s,f)\ .$$

Sumiranjem po svim polovima funkcije f koji se nalaze unutar Γ, dobivamo i drugu sumu u (1). ■

Specijalno, za konstantnu funkciju $h(z) = 1$ za svaki z, dobivamo

Korolar 41.2 *Neka je f meromorfna funkcijama na otvorenom povezanom skupu Ω, koja nije konstantna, a $\Gamma \subseteq \Omega$ neka je nulhomotopna pozitivno orijentirana kontura, koja ne prolazi niti jednom nultočkom niti polom funkcije f. Tada je*

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N_\Gamma(f) - P_\Gamma(f) \ , \tag{3}$$

gdje je $N_\Gamma(f)$ broj nultočaka, a $P_\Gamma(f)$ broj polova funkcije f unutar Γ, i to računajući njihov red, tj. ukoliko je neka nultočka ili pol reda r, treba ju brojati r puta. ■

Integralu na lijevoj strani formule (3) možemo dati i geometrijski smisao. Ako napravimo supstituciju (zamjenu varijabli) $f(z) =: w$, dobivamo

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{f(\Gamma)} \frac{dw}{w} \ . \tag{4}$$

$f(\Gamma)$ je po dijelovima glatka zatvorena krivulja, pa je desna strana u prethodnoj formuli, upravo indeks te krivulje s obzirom na točku 0. Tako dobivamo

Korolar 41.3 *Za meromorfnu funkciju f koja nije konstantna na otvorenom povezanom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, i pozitivno orijentiranu konturu Γ koja je nulhomotopna u Ω i ne prolazi niti jednom nultočkom niti polom funkcije f, vrijedi*

$$N_\Gamma(f) - P_\Gamma(f) = \nu(f(\Gamma), 0) \ .$$ ■

Ovaj se korolar naziva i ***Princip argumenta***.

Primjer 41.1 Kao primjer upotrebe prethodnih razmatranja, odredimo kako su po kvadrantima raspoređene nultočke polinoma

$$p(z) := \frac{1}{8}z^8 - \frac{8}{7}z^7 + \frac{29}{6}z^6 - 12z^5 + \frac{37}{2}z^4 - \frac{52}{3}z^3 + 8z^2 + 1 \ .$$

Pokažimo, najprije, da p nema realnih nultočaka. Zaista, za derivaciju nalazimo (kako tražimo realne nultočke, varijablu označavamo sa x)

$$p'(x) = x^7 - 8x^6 + 29x^5 - 60x^4 + 74x^3 - 52x^2 + 16x \ .$$

Direktnom provjerom, vidi se da su 0, 1 i 2 nultočke polinoma p', pa dijeljenjem dobivamo djelomičnu faktorizaciju

$$p'(x) = x\,(x-1)(x-2)\,\underbrace{(x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 14x + 8)}_{=:q(x)} \ .$$

Polinom q faktoriziramo tako da nađemo koeficijente a, b, c, d koji zadovoljavaju sistem linearnih jednadžbi dobiven uspoređivanjem koeficijenata uz iste potencije od x u produktu

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 14x + 8 ,$$

pa dobivamo

$$p'(x) = x\,(x-1)(x-2)(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 3x + 4) .$$

Kvadratni faktori nemaju realnih nultočaka, pa su točke 0, 1 i 2 jedine realne nultočke derivacije, te, jer se radi o polinomu parnog stupnja kojemu je najstariji koeficijent pozitivan, p ima, kao realna funkcija, tri stacionarne točke, i to su lokalni minimumi u točkama 0 i 2, i lokalni maksimum u točki 1. Kako je $p(0) = 1 > 0$, i $p(2) = \frac{29}{21} > 0$, p nema realnih nultočaka.

Pokažimo sada da p nema niti čisto imaginarnih nultočaka. Za $y \in \mathbb{R}$ je

$$p(\mathrm{i}\,y) = \underbrace{\frac{1}{8}y^8 - \frac{29}{6}y^6 + \frac{37}{2}y^4 - 8y^2 + 1}_{=:p_{\mathrm{Re}}(y)} + \mathrm{i}\,\underbrace{\left(\frac{8}{7}y^7 - 12y^5 + \frac{52}{3}y^3\right)}_{=:p_{\mathrm{Im}}(y)} . \qquad (5)$$

Da bi bilo $p(\mathrm{i}\,y) = 0$, moraju realni i imaginarni dio istovremeno iščezavati. Imaginarni dio jednak je

$$p_{\mathrm{Im}}(y) = \frac{4}{21}y^3(6y^4 - 63y^2 + 91) ,$$

pa je $y_1 = 0$ trostruka nultočka, a ostale četiri jednostruke nultočke su

$$y_{4,5} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{21 - \sqrt{\frac{595}{3}}} \approx \pm 1.315 \qquad y_{6,7} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{21 + \sqrt{\frac{595}{3}}} \approx \pm 2.962 .$$

Kako je $p_{\mathrm{Re}}(0) = 1$, $p_{\mathrm{Re}}(y_4) = p_{\mathrm{Re}}(y_5) \approx 18.611$ i $p_{\mathrm{Re}}(y_6) = p_{\mathrm{Re}}(y_7) \approx -1167.39$, to p_{Re} i p_{Im} ne mogu istovremeno iščezavati, tj. p nema nultočaka niti na imaginarnoj osi.

Odredimo sada broj nultočaka polinoma p u prvom kvadrantu. Neka je $R > 0$, i neka je $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ kontura sastavljena od sljedećih orijentiranih lukova (vidi sliku):

Γ_1 je segment realne osi od 0 do R.
Γ_2 je luk kružnice oko 0 radijusa R od točke R do $\mathrm{i}\,R$
Γ_3 je segment imaginarne osi od $\mathrm{i}\,R$ do 0.

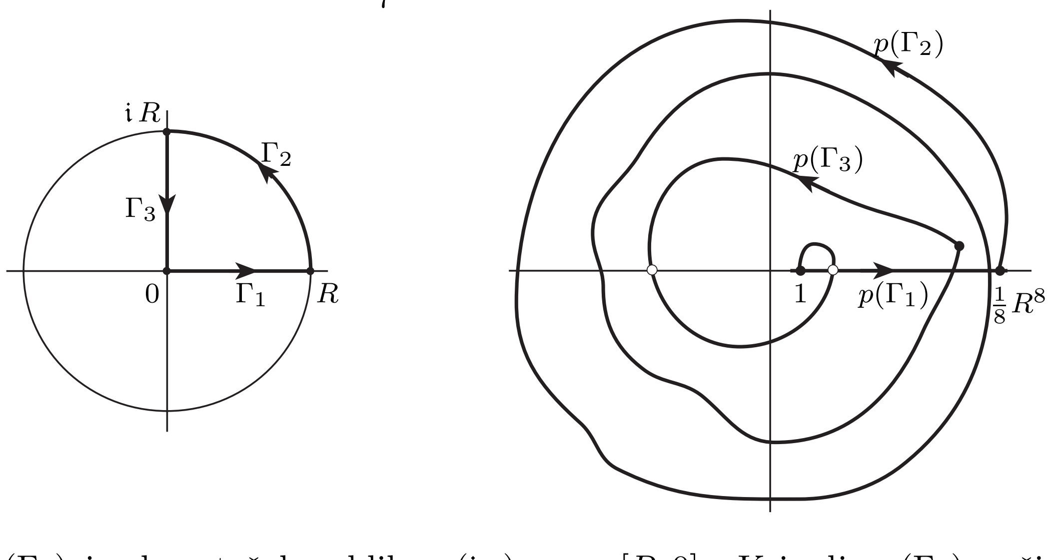
Prema Drugom osnovnom teoremu algebre, koji ćemo uskoro dokazati, korolar 41.5, polinom ima konačno mnogo nultočaka — točno onoliko koliki mu je red. Zbog toga će, za dovoljno veliki R, sve nultočke polinoma p koje se nalaze u prvom kvadrantu, biti obuhvaćene konturom Γ. Kako je polinom holomorfna funkcija, pa nema polova, bit će, prema prethodnom korolaru, broj tih nultočaka jednak indeksu krivulje $p(\Gamma) = p(\Gamma_1) + p(\Gamma_2) + p(\Gamma_3)$ s obzirom na 0. Treba, dakle, samo približno, kvalitativno, odrediti sliku $p(\Gamma)$ — detalji nam nisu važni, važno je jedino koliko se puta $p(\Gamma)$ 'namota' oko 0.

(*i*) Jer je p polinom s realnim koeficijentima, to za realne varijable p poprima i realne vrijednosti, pa je $p(\Gamma_1)$ segment realne osi, koji sadrži točke $p(0) = 1$ i $p(R) \approx \frac{1}{8}R^8$.

(*ii*) Točke luka Γ_1 su oblika $R\,e^{\mathrm{i}\,t}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, pa je u točkama luka Γ_1

$$p(R\,e^{\mathrm{i}\,t}) = \frac{1}{8}R^8\,e^{8\,\mathrm{i}\,t}\Big(1 - \frac{64}{7R\,e^{\mathrm{i}\,t}} + \frac{116}{3R^2\,e^{2\,\mathrm{i}\,t}} - \frac{96}{R^3\,e^{3\,\mathrm{i}\,t}} + \\ + \frac{148}{R^4\,e^{4\,\mathrm{i}\,t}} - \frac{416}{3R^5\,e^{5\,\mathrm{i}\,t}} + \frac{64}{R^6\,e^{6\,\mathrm{i}\,t}} + \frac{8}{R^8\,e^{8\,\mathrm{i}\,t}}\Big)\,.$$

Kako je R velik, to je izraz u velikoj zagradi u prethodnoj formuli približno jednak 1, pa slika $p(\Gamma_2)$ dva puta obilazi približno kružnicu oko 0 radijusa $\frac{1}{8}R^8$, počevši od točke $p(R)$ do točke $p(\mathrm{i}\,R)$, za koju, iz formule (5), vidimo da je $\operatorname{Im} p(\mathrm{i}\,R) \approx \frac{8}{7}R^7 > 0$, jer je R velik.



(*iii*) $p(\Gamma_3)$ je skup točaka oblika $p(\mathrm{i}\,y)$, $y \in [R, 0]$. Krivulja $p(\Gamma_3)$ počinje u točki $p(\mathrm{i}\,R)$, gdje je završila krivulja $p(\Gamma_2)$, a završava u točki $1 = p(0)$, gdje je počela krivulja $p(\Gamma_1)$. Pitanje je samo 'vrti' li se, i kako, $p(\Gamma_3)$ oko 0. Kako bismo to ustanovili, dovoljno je ustanoviti gdje i kako $p(\Gamma_3)$ siječe realnu os. Iz (5) vidimo da je za nenegativan realan y, $p(\mathrm{i}\,y)$ realan samo u nultočkama polinoma p_{Im}, tj. u točkama

$$y_6 = \frac{1}{2}\sqrt{21+\sqrt{\frac{595}{3}}} \approx 2.962\;,\;\; y_4 = \frac{1}{2}\sqrt{21-\sqrt{\frac{595}{3}}} \approx 1.315\;,\;\; y_1 = 0\;,$$

u kojima polinom p poprima približno vrijednosti -1167.39, 18.611 i 0. Kako su y_6 i y_4 jednostruke nultočke polinoma p_{Im}, to krivulja $p(\Gamma_3)$ počinje u točki $p(\mathrm{i}\,R) \approx \frac{1}{8}R^8 + \mathrm{i}\,\frac{8}{7}R^7$ u kojoj završava $p(\Gamma_2)$, i koja je u gornjoj poluravnini, zatim u točki $p(\mathrm{i}\,y_6) \approx -1167.39$ prelazi u donju poluravninu, pa se opet u točki $p(\mathrm{i}\,y_4) \approx 18.611$ vraća u gornju poluravninu, te završava u točki $p(0) = 1$, gdje je početak krivulje $p(\Gamma_1)$ (vidi sliku).

Na osnovi ovih razmatranja, zaključujemo da je indeks krivulje $p(\Gamma)$ s obzirom na točku 0 jednak 3, pa naš polinom p ima u prvom kvadrantu tri nultočke (računajući njihov red).

Kako nultočke polinoma s realnim koeficijentima moraju dolaziti u konjugirano kompleksnim parovima, zaključujemo da polinom p ima i u četvrtom kvadrantu tri nultočke. Prema, već spominjanom Drugom osnovnom teoremu algebre, ukupan broj nultočaka našeg polinoma p je osam, pa jer na koordinatnim osima nema nultočaka i jer nultočke dolaze u konjugirano kompleksnim parovima, mora se još po jedna nultočka nalaziti u drugom i u trećem kvadrantu.

Često se koristi sljedeći teorem:

Teorem 41.4 (Rouchéov[1] teorem) *Neka su funkcije f i g holomorfne na otvorenom skupu Ω, i neke je $\Gamma \subseteq \Omega$ kontura čije je i unutrašnje područje sadržano u Ω. Ako za svaki $z \in \Gamma$ vrijedi $|g(z)| < |f(z)|$, onda Γ obuhvaća jednak broj nultočaka funkcijâ f i $f+g$ (pritom svaku nultočku treba računati onoliko puta koliki je njezin red).*

Dokaz: Za svaki $z \in \Gamma$ je $|f(z)| > |g(z)| \geq 0$, pa je $f(z) \neq 0$. Nadalje, kada bi neki $z \in \Gamma$ bio nultočka funkcije $f+g$, bilo bi $g(z) = -f(z)$, tj. $|g(z)| = |f(z)|$, suprotno pretpostavci teorema. Dakle, kontura Γ ne prolazi niti jednom nultočkom

[1] Eugène Rouché (1832–1910), francuski matematičar

funkcijâ f i $f+g$, pa, jer se radi o holomorfnim funkcijama, za određivanje broja njihovih nultočaka unutar konture Γ, možemo primijeniti Korolar 41.2. Tako dobivamo

$$\begin{aligned} N_\Gamma(f+g) - N_\Gamma(f) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)}\, dz - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{g'(z)\, f(z) - g(z)\, f'(z)}{f(z)(f(z)+g(z))}\, dz\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Pokazali smo da je za svaki $z \in \Gamma$, $f(z) \neq 0$. Stoga, zbog neprekidnosti, postoji (otvorena) okolina $U \supseteq \Gamma$, takva da je $f(z) \neq 0$ za sve $z \in U$, pa je dobro definirana funkcije $h\colon U \to \mathbb{C}$ formulom $h(z) := 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$. Deriviranjem nalazimo da je $\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{g'(z)\, f(z) - g(z)\, f'(z)}{f(z)(f(z)+g(z))}$. Uvrstimo li to u (6), zamjenom varijable $w := h(z)$, dobivamo

$$N_\Gamma(f+g) - N_\Gamma(f) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{h'(z)}{h(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{h(\Gamma)} \frac{dw}{w} = \nu(h(\Gamma), 0)\,,$$

gdje je posljednja jednakost dobivena kao ranije u Korolaru 41.3.

Treba još odrediti indeks $\nu(h(\Gamma), 0)$. Kako je za svaki $z \in \Gamma$, $\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$, to je, prema definiciji funkcije h, krivulja $h(\Gamma)$ sadržana u krugu radijusa 1 oko točke 1, tj. $h(\Gamma) \subseteq K(1,1)$. Zbog toga je $\nu(h(\Gamma), 0) = 0$, pa iz prethodne formule slijedi da $f+g$ i f imaju jednak broj nultočaka unutar Γ. ■

Primijetimo da Rouchéov teorem *ne* tvrdi da funkcije f i $f+g$ imaju iste nultočke unutar Γ — samo da ih je jednako mnogo.

Primjenom Rouchéova teorema, dobivamo sada najavljivani

Korolar 41.5 (Drugi osnovni teorem algebre) *Svaki polinom stupnja n, s kompleksnim koeficijentima, ima točno n nultočaka u $\mathbb{C}$.*

Dokaz: Neka je

$$p(z) = a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_1\, z + a_0\,, \quad a_i \in \mathbb{C}\,, \quad a_n \neq 0\,, \quad n \geq 1\,.$$

Definirajmo

$$\begin{aligned} f(z) &:= a_n\, z^n \\ g(z) &:= a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_1\, z + a_0\,. \end{aligned}$$

Kako je $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{|a_{n-1}|\, t^{n-1} + \cdots + |a_1|\, t + |a_0|}{|a_n|\, t^n} = 0$, postoji $R_0 > 0$ takav da za sve $R > R_0$ vrijedi $|a_n|\, R^n > |a_{n-1}|\, R^{n-1} + \cdots + |a_1|\, R + |a_0|$. Neka je Γ kružnica oko 0 radijusa R. Iz prethodne nejednakosti vidimo da za svaki $z \in \Gamma$ vrijedi $|g(z)| < |f(z)|$, pa prema Rouchéovom teoremu zaključujemo da $p = f + g$ ima u krugu $K(0, R)$ jednak broj nultočaka kao f, koji ima jednu nultočku, 0, reda n. Kako to vrijedi za svaki $R \geq R_0$, svaka nultočka polinoma p će kad-tad biti obuhvaćena, pa zaključujemo da p ima točno n kompleksnih nultočaka. ■

Primjer 41.2 Promotrimo ponovno polinom

$$p(z) := \frac{1}{8}z^8 - \frac{8}{7}z^7 + \frac{29}{6}z^6 - 12z^5 + \frac{37}{2}z^4 - \frac{52}{3}z^3 + 8z^2 + 1$$

iz Primjera 41.1, i pokažimo da se sve njegove nultočke nalaze unutar kruga radijusa 3 oko točke 1, a izvan kruga radijusa $\frac{9}{10}$, tj. u kružnom vijencu $V(1; \frac{9}{10}, 3)$.

Razvijemo li polinom p po potencijama od $z - 1$, dobijemo

$$p(z) = \frac{1}{8}(z-1)^8 - \frac{1}{7}(z-1)^7 + \frac{1}{3}(z-1)^6 - \frac{1}{4}(z-1)^4 + \frac{1}{3}(z-1)^3 - (z-1)^2 + \frac{111}{56}$$

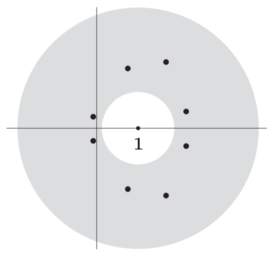
(to je zapravo Taylorov red polinoma p oko točke 1, a najjednostavnije se dobije tako da se izračuna $p(z + 1)$, i uzmu koeficijenti dobivenog polinoma). Neka je

$$\begin{aligned} f(z) &:= \frac{1}{8}(z-1)^8 \\ g(z) &:= -\frac{1}{7}(z-1)^7 + \frac{1}{3}(z-1)^6 - \frac{1}{4}(z-1)^4 + \frac{1}{3}(z-1)^3 - (z-1)^2 + \frac{111}{56}\ . \end{aligned}$$

Tada je za $|z - 1| = 3$

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \frac{1}{8} \cdot 3^8 \approx 820\ , \text{ i} \\ |g(z)| &\leq \frac{1}{7} \cdot 3^7 + \frac{1}{3} \cdot 3^6 + \frac{1}{4} \cdot 3^4 + \frac{1}{3} \cdot 3^3 + 3^2 + \frac{111}{56} \approx 596\ , \end{aligned}$$

pa u svim točkama kružnice $|z - 1| = 3$ vrijedi $|g(z)| < |f(z)|$. Primjenom Rouchéova teorema zaključujemo da polinomi $p = f + g$ i f imaju u krugu $K(1, 3)$ jednak broj nultočaka. Kako polinom f ima u tom krugu, jednu nultočku, 1, i ona je reda osam, to i polinom p ima u tom krugu osam nultočaka, a prema Drugom osnovnom teoremu algebre, to su ujedno i sve njegove nultočke.



Neka je sada

$$
\begin{aligned}
f(z) &:= \frac{111}{56} \\
g(z) &:= \frac{1}{8}(z-1)^8 - \frac{1}{7}(z-1)^7 + \frac{1}{3}(z-1)^6 - \frac{1}{4}(z-1)^4 + \frac{1}{3}(z-1)^3 - (z-1)^2 .
\end{aligned}
$$

Tada je za $|z-1| = \frac{9}{10}$

$$
\begin{aligned}
|f(z)| &= \frac{111}{56} \approx 1.98 \text{ , i} \\
|g(z)| &\leq \frac{1}{8}\big(\frac{9}{10}\big)^8 + \frac{1}{7}\big(\frac{9}{10}\big)^7 + \frac{1}{3}\big(\frac{9}{10}\big)^6 + \frac{1}{4}\big(\frac{9}{10}\big)^4 + \frac{1}{3}\big(\frac{9}{10}\big)^3 + \big(\frac{9}{10}\big)^2 \approx 1.52 \,,
\end{aligned}
$$

pa u svim točkama kružnice $|z-1| = \frac{9}{10}$ vrijedi $|g(z)| < |f(z)|$. Kako je f konstantan polinom, pa nema niti jedne nultočke, to niti polinom $p = f + g$ u krugu $K(1, \frac{9}{10})$ nema niti jedne nultočke. Sve se, dakle, nultočke polinoma p nalaze u kružnom vijencu $V(1; \frac{9}{10}, 3)$.

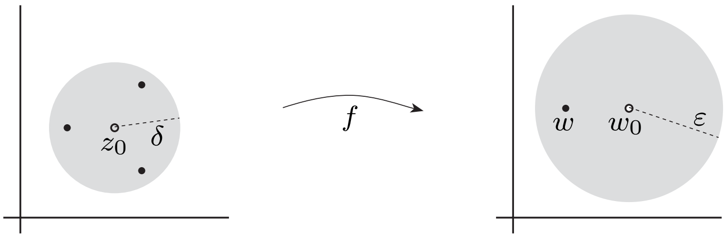
Zadatak 41.1 Poboljšajte ocjenu u prethodnom primjeru i pokažite da se sve nultočke polinoma p nalaze u kružnom vijencu $V(1; 1, 3)$.

§ 42 Lokalna svojstva holomorfnih funkcija

U ovoj ćemo točki, nakon Weierstrassovog pripremnog teorema, dokazati tri poznata teorema: o otvorenom preslikavanju, o maksimumu modula i Schwarzovu lemu.

Teorem 42.1 (Weierstrassov pripremni teorem) *Neka je funkcija f holomorfna u točki z_0, označimo $w_0 := f(z_0)$, i neka je red nultočke z_0 funkcije $z \mapsto f(z) - w_0$ jednak n. Tada postoje $\delta > 0$ i $\varepsilon > 0$ takvi da za svaki $w \in K(w_0, \varepsilon)$, funkcija $z \mapsto f(z) - w$ ima u krugu $K(z_0, \delta)$ točno n nultočaka, računajući njihov red.*

Štoviše, brojevi δ i ε mogu se odabrati tako da za svaki $w \in K^*(w_0, \varepsilon)$, funkcija $z \mapsto f(z) - w$ ima u krugu $K(z_0, \delta)$, točno n različitih nultočaka.



Dokaz: Funkcija $z \mapsto f(z) - w_0$ je holomorfna i nije konstanta 0 (jer tada njezina nultočka z_0 ne bi mogla biti konačnog reda n). Stoga su sve njezine nultočke izolirane, Teorem 37.4, pa postoji $\delta > 0$ takav da je z_0 jedina nultočka funkcije $z \mapsto f(z) - w_0$ na zatvorenom krugu $\overline{K}(z_0, \delta)$. Specijalno, na rubu, tj. za $|z - z_0| = \delta$, vrijedi $|f(z) - w_0| > 0$. Neka je $\varepsilon := \min\limits_{|z-z_0|=\delta} |f(z) - w_0| > 0$ (minimum postoji jer je kružnica kompaktan skup, a f neprekidna funkcija). Neka je $w \in K(w_0, \varepsilon)$. Tada za $|z - z_0| = \delta$ vrijedi $|w_0 - w| < \varepsilon \leq |f(z) - w_0|$. Iz Rouchéovog teorema 41.4, primijenjenog na funkcije $z \mapsto f(z) - w_0$ i $z \mapsto w_0 - w$, slijedi da njihova suma, tj. funkcija $z \mapsto (f(z) - w_0) + (w_0 - w) = f(z) - w$, ima u krugu $K(z_0, \delta)$ jednak broj nultočaka kao i funkcija $z \mapsto f(z) - w_0$, dakle, ima ih točno n. Time je dokazana prva tvrdnja teorema.

Kako bismo dokazali i drugi dio teorema, primijetimo najprije da ako su δ i ε kao u teoremu, onda je i svaki $\delta' < \delta$, uz pripadni $\varepsilon' := \min\limits_{|z-z_0|=\delta'} |f(z) - w_0|$, dobar. Nadalje, derivacija f' funkcije f također je holomorfna funkcija, i nije konstantna funkcija 0, $f' \not\equiv 0$. Naime, u protivnom bi sve njezine derivacije bile jednake nuli, pa bi funkcija f bila konstantna na $K(z_0, \delta)$. Stoga su i nultočke funkcije f' izolirane, pa δ možemo odabrati tako da, osim ranijeg zahtjeva, vrijedi i $f'(z) \neq 0$ za sve $z \in K^*(z_0, \delta)$. Zbog toga su, za proizvoljan $w \in K^*(f(z_0), \varepsilon)$, sve nultočke funkcije $z \mapsto f(z) - w$ u krugu $K(z_0, \delta)$ jednostruke. Kako ih, računajući red, ima n, moraju sve biti međusobno različite. ■

Primjer 42.1 Dobra ilustracija Weierstrassovog pripremnog teorema, je funkcija $f(z) := z^n = |z|^n e^{ni \arg z}$. Ona preslikava kut $\frac{2\pi}{n}$ s vrhom u 0, na cijelu kompleksnu ravninu $\mathbb{C}$, tj. ravninu 'namota' n puta oko ishodišta. Osim 0, sve su ostale točke kompleksne ravnine, slike od po točno n različitih točaka, n različitih n-tih korijena. Weierstrassov pripremni teorem kaže, dakle, da lokalno, svaka je holomorfna funkcija takva.

Korolar 42.2 (Teorem o otvorenom preslikavanju) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija, koja nije konstantna niti na jednoj komponenti povezanosti skupa Ω. Tada je za svaki otvoren skup $U \subseteq \Omega$, slika $f(U)$ otvoren skup u $\mathbb{C}$, tj. f je* ***otvoreno preslikavanje.***

Dokaz: Neka je $w_0 \in f(U)$, i neka je $z_0 \in U$ takav da je $f(z_0) = w_0$, tj. z_0 je nultočka funkcije $z \mapsto f(z) - w_0$. Prema Weierstrassovom pripremnom teoremu, postoje brojevi $\delta > 0$ i $\varepsilon > 0$ takvi da za svaki $w \in K(w_0, \varepsilon)$, funkcija $z \mapsto f(z) - w$ ima u krugu $K(z_0, \delta)$ barem jednu nultočku. Drugačije rečeno, za svaki $w \in K(w_0, \varepsilon)$ postoji $z \in K(z_0, \delta)$ takav da je $f(z) = w$. Prema napomeni na početku dokaza drugog dijela Weierstrassovog teorema, broj δ, i onda pripadni ε, možemo odabrati tako da, zbog otvorenosti skupa U, bude $K(z_0, \delta) \subseteq U$, pa je tada i $K(w_0, \varepsilon) \subseteq f(U)$, što pokazuje da je skup $f(U) \subseteq \mathbb{C}$ otvoren. ∎

Specijalno, vrijedi

Korolar 42.3 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren i povezan skup, a $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija koja nije konstantna. Tada je skup $f(\Omega) \subseteq \mathbb{C}$ otvoren.* ∎

Teorem 42.4 (o lokalnoj invertibilnosti holomorfne funkcije) *Neka je funkcija f holomorfna u točki z_0 i neka je $f'(z_0) \neq 0$. Tada postoje otvoreni skupovi $U \ni z_0$ i $V \ni f(z_0)$ takvi da je $f\big|_U \colon U \to V$ bijekcija, i inverzna funkcija $g := \big(f\big|_U\big)^{-1} \colon V \to U$ je holomorfna u $f(z_0)$.*

Dokaz: Iz pretpostavke $f'(z_0) \neq 0$, slijedi da je z_0 jednostruka nultočka funkcije $z \mapsto f(z) - f(z_0)$. Neka su $\delta > 0$ i $\varepsilon > 0$ kao u Weierstrassovom pripremnom teoremu 42.1, s tim da je δ dovoljno malen da vrijedi i $f'(z) \neq 0$ za sve $z \in K(z_0, \delta)$, što zbog neprekidnosti funkcije f' i napomene na početku dokaza drugog dijela Weierstrassovog teorema, možemo postići. Označimo s $V := K(f(z_0), \varepsilon)$ i $U := K(z_0, \delta) \cap f^{\leftarrow}(V)$. Zbog neprekidnosti funkcije f, skup U je otvoren. Prema Weierstrassovom teoremu, za svaki $w \in V = K(f(z_0), \varepsilon)$, postoji jedan jedini $z \in K(z_0, \delta)$ takav da je $f(z) = w$, što znači da je $f\big|_U \colon U \to V$ bijekcija. Označimo njezin inverz s $g := \big(f\big|_U\big)^{-1} \colon V \to U$. Preslikavanje g je neprekidno, jer, kako je f, prema prethodnom korolaru, otvoreno preslikavanje, za svaki otvoren skup $U' \subseteq U$, skup $g^{\leftarrow}(U') = f(U')$ je otvoren. Stoga su $f\big|_U$ i g homeomorfizmi.

Ostaje pokazati da je funkcija g holomorfna na V, a za to je dovoljno pokazati da je g derivabilna na V. Neka su $w, w' \in V$, i neka su $z := g(w)$ i $z' := g(w') \in U$, tj. $w = f(z)$ i $w' = f(z')$. Tada je

$$\lim_{w' \to w} \frac{g(w') - g(w)}{w' - w} = \lim_{z' \to z} \frac{z' - z}{f(z') - f(z)} = \lim_{z' \to z} \frac{1}{\frac{f(z') - f(z)}{z' - z}} \,.$$

(U ovom smo računu mogli zamijeniti limes $\lim\limits_{w' \to w}$ s limesom $\lim\limits_{z' \to z}$ jer su $f\big|_U$ i g homeomorfizmi.) Ovaj posljednji limes postoji, jer je f holomorfna na U. Stoga postoji i prvi od gornjih limesa, tj. funkcija g derivabilna je u w, a kako je $w \in V$ bila proizvoljna točka, g je derivabilna na V. ■

Napomena 42.1 Pokažimo kako se prethodni teorem može dokazati i koristeći samo Teorem o inverznoj funkciji iz realne analize, Teorem 12.1, i Cauchy-Riemannov teorem 31.1.

Naime, funkcija f je holomorfna, pa je f' neprekidna. Stoga je f, shvaćena kao funkcija $f = (u, v) \colon \Omega \to \mathbb{R}^2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, diferencijabilna klase C^1. U točki $z_0 = (x_0, y_0)$ je $f'(z_0) = \partial_x u(x_0, y_0) + \mathrm{i}\, \partial_x v(x_0, y_0) \neq 0$, pa, zbog Cauchy-Riemannovih uvjeta, za Jacobijan nalazimo

$$\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)} = \begin{vmatrix} \partial_x u & -\partial_x v \\ \partial_x v & \partial_x u \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)} = |f'(z_0)|^2 \neq 0 \,,$$

tj. diferencijal preslikavanja $f = (u, v)$ je u točki (x_0, y_0) regularan. Prema Teoremu o inverznom preslikavanju, postoje otvoreni skupovi U oko točke (x_0, y_0) i V oko točke $f(x_0, y_0) =: (\xi_0, \eta_0)$, takvi da je $f\big|_U \colon U \to V$ bijekcija, a inverzno preslikavanje $g = (p, q) \colon V \to U$ je diferencijabilno klase C^1, i vrijedi $Dg(\xi, \eta) = \big(Df(x, y)\big)^{-1}$, za sve $(\xi, \eta) = f(x, y) \in V$. To znači da je

$$\frac{\partial(p,q)}{\partial(\xi,\eta)}(\xi,\eta) = \Big(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x,y)\Big)^{-1} = \frac{1}{\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x,y)} \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_x v \\ -\partial_x v & \partial_x u \end{pmatrix}_{(x,y)} ,$$

pa i za funkciju $g = (p, q)$ vrijede Cauchy-Riemannovi uvjeti, tj. funkcija g, shvaćena kao kompleksna funkcija, holomorfna je u točki $f(z_0)$.

Korolar 42.5 (Teorem o holomorfnom izomorfizmu) *Neka je holomorfna funkcija $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ injektivna. Tada je $f'(z) \neq 0$ za sve $z \in \Omega$, skup $f(\Omega) \subseteq \mathbb{C}$ je otvoren, i inverzna funkcija $g \colon f(\Omega) \to \Omega$ bijekcije $f \colon \Omega \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow f(\Omega)$ je holomorfna, tj. $f \colon \Omega \to f(\Omega)$ je* ***holomorfni*** *ili* ***analitički izomorfizam.***

Dokaz: Kada bi postojala točka $z_0 \in \Omega$ takva da je $f'(z_0) = 0$, onda bi z_0 bila nultočka funkcije $z \mapsto f(z) - f(z_0)$ reda barem 2, pa, prema Weierstrassovom pripremnom teoremu 42.1, funkcija f ne bi mogla biti injekcija na nekoj okolini točke z_0.

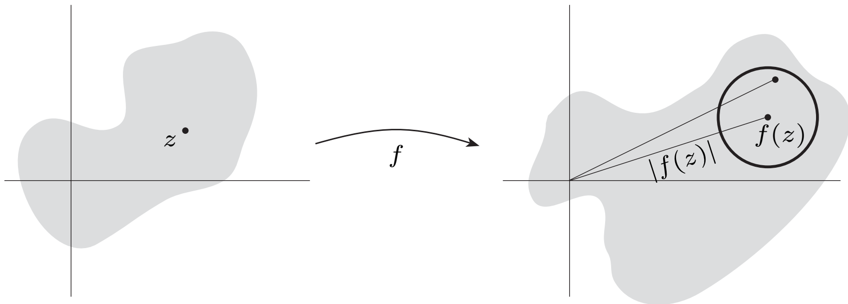
Kako je f injektivno preslikavanje, korestrikcija $f \colon \Omega \to f(\Omega)$ je bijekcija, pa postoji inverzno preslikavanje $g \colon f(\Omega) \to \Omega$. Prema Teoremu o otvorenom preslikavanju, zapravo Korolaru 42.3, skup $f(\Omega) \subseteq \mathbb{C}$ je otvoren, pa ima smisla govoriti o holomorfnosti preslikavanja g.

Prema Teoremu o lokalnoj invertibilnosti holomorfne funkcije, Teorem 42.4, oko svake točke z skupa Ω, postoji okolina i na njoj holomorfni inverz funkcije f. Ali, inverzna funkcija je jedinstvena, pa se takav lokalni inverz, na toj okolini podudara s restrikcijom funkcije g. Zbog lokalnog karaktera derivabilnosti, to znači da i funkcija g ima na toj okolini derivaciju, pa je ona holomorfna u z, dakle, $g \in H(\Omega)$. ∎

Kao posljedicu Teorema o otvorenom preslikavanju, dobivamo i

Korolar 42.6 (Teorem o maksimumu modula) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren i povezan skup, a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Ako f nije konstantna funkcija onda je ona ili neomeđena ili je $|f(z)| < \sup\limits_{\zeta \in \Omega} |f(\zeta)|$ za svaki $z \in \Omega$, tj. $|f|$ nema na području Ω maksimum.*

Dokaz: Prema Teoremu o otvorenom preslikavanju, Korolar 42.3, skup $f(\Omega)$ je otvoren, pa za svaki $z \in \Omega$, oko točke $f(z)$ postoji krug $K(f(z), \varepsilon) \subseteq f(\Omega)$, a u njemu očito ima točaka kojima je modul veći od $|f(z)|$. ∎



I sljedeća se varijanta prethodnog korolara često naziva istim imenom, a za obje verzije se koristi i naziv ***Princip maksimuma modula***.

Korolar 42.7 *Neka je $K \subseteq \Omega$ kompaktan skup, a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija koja nije konstantna niti na jednoj okolini niti jedne točke nutrine skupa K. Tada modul funkcije $f\big|_K$ poprima maksimum samo u nekoj točki ruba $\partial K = K \setminus \operatorname{Int} K$ skupa K.* ∎

Malo pojednostavljeno rečeno, ako je funkcija f holomorfna u svim točkama kompaktnog skupa K, onda modul $|f|$, koji kao neprekidna funkcija na kompaktu mora imati maksimum, taj maksimum poprima jedino u točkama ruba.

Korolar 42.8 (Schwarzova[1] lema) *Neka je $f\colon K(0,1) \to K(0,1)$ holomorfna funkcija takva da je $f(0) = 0$. Tada je ili $|f(z)| < |z|$ za sve $z \in K^*(0,1)$, ili je f rotacija, tj. postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $f(z) = z\, e^{\mathrm{i}\,\alpha}$, za sve $z \in K(0,1)$.*

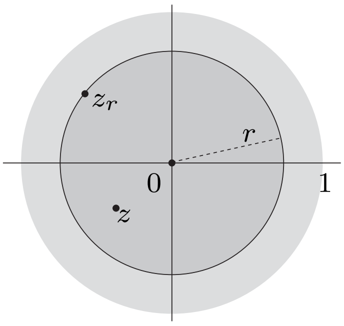
Drugačije rečeno, holomorfno preslikavanje jediničnog kruga na sâma sebe koje fiksira središte kruga, je ili rotacija, dakle, izometrija, ili ima svojstvo da svaku točku, osim središta koje drži fiksnim, približi središtu kruga.

Dokaz: Definirajmo pomoćnu funkciju $g\colon K(0,1) \to \mathbb{C}$ formulom

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & , \ z \neq 0 \\ f'(0) & , \ z = 0 \end{cases} .$$

Funkcija g je holomorfna na probušenom krugu $K^*(0,1)$ i neprekidna je u 0, pa je, prema Korolaru 34.11, holomorfna na cijelom krugu $K(0,1)$.

Neka je $z \in K(0,1)$ proizvoljna točka. Za svaki r takav da je $|z| < r < 1$, modul funkcije $g|_{\overline{K}(0,r)}$ poprima maksimum na rubu toga kruga, Korolar 42.7, tj. postoji točka z_r, $|z_r| = r$, takva da je $|g(z')| \leq |g(z_r)|$ za sve $z' \in K(0,r)$, specijalno za $z' = z$. Zbog toga je



$$|g(z)| \leq |g(z_r)| = \frac{|f(z_r)|}{|z_r|} < \frac{1}{r} .$$

Kako to vrijedi za svaki r, $|z| < r < 1$, zaključujemo da je $|g(z)| \leq 1$. Točka z je bila proizvoljna, pa je $|g(z)| \leq 1$ za sve $z \in K(0,1)$.

Ako postoji $z_0 \in K(0,1)$ takav da je $|g(z_0)| = 1$, onda je, prema Teoremu o maksimumu modula, Korolar 42.6, funkcija g konstantna, i to jednaka konstanti modula 1, pa postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $g(z) = e^{\mathrm{i}\,\alpha}$, dakle i $f(z) = z\, e^{\mathrm{i}\,\alpha}$, za sve $z \in K(0,1)$. U protivnom je $|g(z)| < 1$ za sve $z \in K(0,1)$, pa je $|f(z)| < |z|$ za sve $z \in K^*(0,1)$. ■

Schwarzova lema formulira se često i ovako:

Korolar 42.9 (Schwarzova lema) *Neka je $f\colon K(0,1) \to K(0,1)$ holomorfna funkcija takva da je $f(0) = 0$. Tada je ili $|f'(0)| < 1$, ili postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $f(z) = z\, e^{\mathrm{i}\,\alpha}$, za sve $z \in K(0,1)$.*

[1] Karl Herman Amandus Schwarz (1843–1921), njemački matematičar

Dokaz: Za funkciju g, kao u dokazu prethodnog korolara, je ili $|g(0)| < 1$, ili $|g(0)| = 1$. U prvom slučaju je $|f'(0)| = |g(0)| < 1$, a u drugom se, na isti način kao u dokazu prethodnog korolara, pokazuje da je f rotacija. ■

Nekad je korisna i oslabljena verzija Schwarzove leme:

Korolar 42.10 *Ako je $f\colon K(0,1) \to K(0,1)$ holomorfna funkcija takva da je $f(0) = 0$, onda je $|f(z)| \leq |z|$, za sve $z \in K(0,1)$.* ■

Literatura

[1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Company, Aucland, 1979.

[2] J. C. Burkill, H. Burkill. *A Second Course in Mathematical Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1970.

[3] S. Kurepa. *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.

[4] S. Kurepa. *Matematička analiza* 3, Tehnička knjiga, Zagreb, 1979.

[5] S. Kurepa, H. Kraljević. *Matematička analiza* 4. *Kompleksne funkcije*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1979.

[6] S. Mardešić. *Matematička analiza*, 1. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1974.

[7] S. Mardešić. *Matematička analiza*, 2. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1977.

[8] M. Rao, H. Stetkær. *Complex Analysis: An Invitation*, World Scientific, 1991.

[9] M. Spivak. *Calculus on Manifolds*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1965.

[10] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1964.

[11] Š. Ungar. *Matematička analiza u* $\mathbb{R}^n$, Golden Marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 2005.

[12] W. Walter. *Analysis II*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1990.

[13] В. А. Зорич. *Математический анализ*, 1, МЦНМО, Москва, (3. izdanje) 2001. (engleski prijevod: V. A. Zorich. *Mathematical Analysis* I, Springer, 2003.)

[14] В. А. Зорич. *Математический анализ*, 2, МЦНМО, Москва, (2. izdanje) 1998. (engleski prijevod: V. A. Zorich. *Mathematical Analysis* II, Springer, 2003.)

Indeks