ALGEBARSKA TOPOLOGIJA

Šime Ungar
http://web.math.hr/~ungar/

Literatura:

Allen Hatcher. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html

W. S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer, 1991.

James R. Munkres. *Topology. Second Edition*, Prentice Hall, 2000.

1 ALGEBARSKA TOPOLOGIJA — MALO GEOMETRIJSKE PODLOGE

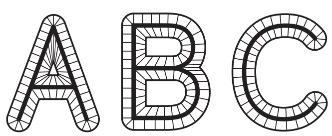
- Homotopija i homotopski tip
- Ćelijski kompleksi
- Neke konstrukcije s prostorima
- Dva kriterija za homotopsku ekvivalenciju
- Svojstvo proširenja homotopije

- U ovom ćemo poglavlju opisati neke geometrijske pojmove i konstrukcije koje se pojavljuju u algebarskoj topologiji. Radit ćemo neformalno i bez dokaza, a samo ćemo na kraju ponešto dokazati.
- Odsad uvijek *preslikavanje* znači ***neprekidno preslikavanje***.

Klasifikacije grublje od topološke

U algebarskoj se topologiji *ekvivalentan* najčešće uzima u mnogo širem smislu od *homeomorfan*.

Tanka i *debela* slova na slici su u tom smislu ekvivalentna. Debela se slova mogu stisnuti na tanka tako da se radijalno „rastave” na segmente pa svaka točka „sklizne” po svom segmentu na tanko slovo. Pritom točke koje već jesu na tankom slovu miruju.



Na ovo „stiskanje” možemo misliti da se odvija u vremenskom periodu $0 \leq t \leq 1$, pa se tako radi o familiji funkcija $\{f_t\}$ parametriziranoj parametrom $t \in I := [0,1]$, pri čemu $f_t(x)$ označava položaj u kome se točka x nađe u momentu t.

Deformacijska retrakcija

Primjer sa „slovima” i slični dovode do sljedeće definicije:

Definicija

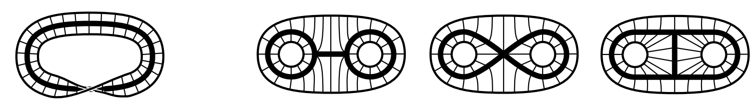
Deformacijska retrakcija prostora X na potprostor A je neprekidna familija preslikavanja $f_t\colon X \to X$, $t \in I = [0,1]$, t.d. je

$$f_0 = \mathbb{1}_X,\ f_1(X) = A \text{ i } f_t|A = \mathbb{1}_A \text{ za sve } t.$$

U tom se slučaju kaže da je A ***deformacijski retrakt*** od X.

„Neprekidna” znači da je pridruženo preslikavanje $X \times I \to X$, $(x,t) \mapsto f_t(x)$, neprekidno, pa je i preslikavanje $I \to X^X$ neprekidno (Opća topologija: teorem 46.11.)

Evo još nekoliko primjera deformacijskih retrakcija:

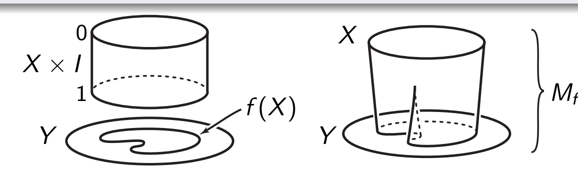


Cilindar preslikavanja

Prethodni primjeri bili su specijalni slučajevi sljedeće konstrukcije:

Definicija

Za preslikavanje $f\colon X \to Y$ se ***cilindar preslikavanja*** M_f definira kao kvocijentni prostor disjunktne unije $(X \times I) \sqcup Y$ dobiven identifikacijama $(x,1) \sim f(x)$, $x \in X$.



U primjerima sa slovima, X je bio rub debelih slova, Y je bilo tanko slovo a f je preslikavalo vanjsku rubnu točku svakog segmenta u unutarnju rubnu točku istog segmenta.

Uvijek je Y deformacijski retrakt od M_f, cilindra preslikavanja $f\colon X \to Y$, ali nisu sve deformacijske retrakcije dobivene od cilindra preslikavanja.

Homotopija i homotopna preslikavanja

Deformacijska retrakcija $f_t\colon X \to X$ je specijalan slučaj ***homotopije***, tj. familije preslikavanja $f_t\colon X \to Y$, $t \in I$, t.d. je pridruženo preslikavanje $F\colon X \times I \to Y$, definirano s $F(x,t) := f_t(x)$, neprekidno. Za preslikavanja $f_0, f_1\colon X \to Y$ kaže se da su ***homotopna*** ako postoji homotopija f_t koja ih povezuje, oznaka $f_0 \simeq f_1$.

Dakle, deformacijska retrakcija od X na potprostor A je homotopija od identitete $\mathbb{1}_X$ do preslikavanja $r\colon X \to X$ t.d. je $r(X) = A$ i $r|A = \mathbb{1}_A$. Takvo se preslikavanje naziva ***retrakcija***. Drugačije rečeno, retrakcija je preslikavanje $r\colon X \to X$ t.d. je $r^2 = r$, u algebri i drugdje kazali bismo ***projektor***.

Napomena: Nije svaka retrakcija završna faza neke deformacijske retrakcije. Npr. za svaki $x_0 \in X$ je konstantno preslikavanje $X \to \{x_0\}$ retrakcija, ali ako je $\{x_0\}$ deformacijski retrakt od X onda je X nužno putevima povezan (ali to niti izdaleka nije i dovoljno).

Relativna homotopija

Deformacijska retrakcija f_t od X na potprostor A „miruje” u točkama od A, tj. $f_t|A = \mathbb{1}_A$ za sve $t \in I$. Općenito, za homotopiju $f_t\colon X \to Y$ koja na podskupu $A \subseteq X$ ne ovisi o t, tj. $f_t(a) = f_0(a)$, $t \in I$, $a \in A$, kaže se da je ***relativna homotopija*** ili ***homotopija* rel *A***.

Dakle, deformacijska retrakcija od X na A je homotopija rel A od identitete prostora X do retrakcije od X na A.

Homotopska ekvivalencija

Neka je $f_t\colon X \to X$ deformacijska retrakcija prostora X na potprostor A. Označimo li s $r\colon X \to A$ završnu retrakciju a s $i\colon A \hookrightarrow X$ inkluziju, imamo $r\,i = \mathbb{1}_A$ i $i\,r \simeq \mathbb{1}_X$.

Radi se zapravo o specijalnom slučaju sljedeće definicije:

Definicija

Za $f\colon X \to Y$ kažemo da je ***homotopska ekvivalencija*** ako postoji preslikavanje $g\colon Y \to X$ t.d. je $g\,f \simeq \mathbb{1}_X$ i $f\,g \simeq \mathbb{1}_Y$. Kaže se da X i Y imaju isti ***homotopski tip*** ili da su ***homotopski ekvivalentni***, oznaka $X \simeq Y$.

Lako se vidi da je to relacija ekvivalencije.

Primjer

Prostori  su istog homotopskog tipa, jer su svi deformacijski retrakti istog prostora — kruga s dvije rupe, ali nikoji nije deformacijski retrakt drugog.

Homotopski ekvivalentan *vs.* deformacijski retrakt

Napomena

Vrijedi sljedeće: prostori X i Y su homotopski ekvivalentni akko postoji prostor Z koji sadrži X i Y kao svoje deformacijske retrakte.

$\Leftarrow$ Ovaj smjer je očit.

$\Rightarrow$ Neka je $f\colon X \to Y$ bilo koje preslikavanje. Tada je Y deformacijski retrakt cilindra preslikavanja M_f.
Pokazat ćemo kasnije, korolar 5.6, da ako je $f\colon X \to Y$ *homotopska ekvivalencija* onda je i X deformacijski retrakt od M_f.

Homotopski trivijalni prostori

Definicija

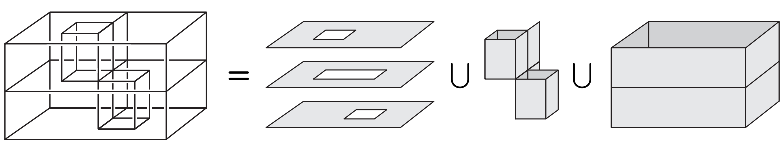
Kaže se da je prostor X ***kontraktibilan*** ako je homotopski ekvivalentan točki, $X \simeq *$.
To je ekvivalentno činjenici da je identiteta $\mathbb{1}_X$ ***nulhomotopna***, tj. homotopna konstantnom preslikavanju.

Kontraktibilni prostori su s homotopskog gledišta „najjednostavniji" prostori, prostori koji se *unutar sebe* mogu stegnuti u točku.

Postoje kontraktibilni prostori koji se ne mogu deformacijski retraktirati u točku (za primjer vidi npr. [Hatcher], str. 18).

Ali nije sve baš tako jednostavno

Bingova[1] „kuća s dvije sobe" je 2-dimenzionalan potprostor $X \subseteq \mathbb{R}^3$ koji je kontraktibilan ali ne na očigledan način.



Kako se vidi da je X kontraktibilan?
Za malen ε je X deformacijski retrakt zatvorene ε-okoline $N_\varepsilon(X)$, pa je $X \simeq N_\varepsilon(X)$. S druge strane, okolina $N_\varepsilon(X)$ je homeomorfna 3-dimenzionalnom disku (tj. zatvorenoj kugli) D^3 koji je kontraktibilan.
Dakle,

$$X \simeq N_\varepsilon(X) \cong D^3 \simeq * \,.$$

$$X \underset{i}{\overset{r}{\leftrightarrows}} N_\varepsilon(X) \overset{h}{\cong} D^3 \circlearrowleft f_t$$

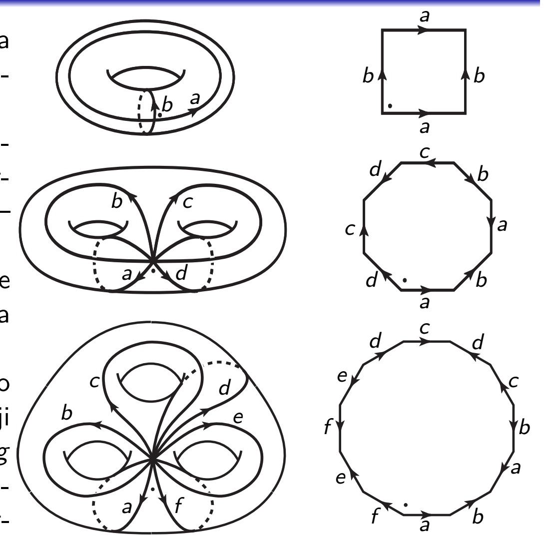
$$r\,h^{-1} f_t\, h\, i \colon X \to X$$

Izazov je zaista „vidjeti" homotopiju koja steže X u jednu točku.

[1] R. H. Bing (1914–1986), američki topolog

Konstrukcija ploha

Uobičajena konstrukcija torusa je da se u kvadratu identificiraju nasuprotne stranice.
Slično se od osmerokuta, identifikacijama označenim na crtežu, dobiva dvostruki torus — torus s dvije rupe.
Općenito, od $4g$-terokuta se odgovarajućim identifikacijama dobiva M_g, ploha roda g.
Na nutrinu poligona možemo gledati kao na otvoren disk, koji je nalijepljen na uniju od $2g$ kružnica, a one su dobivene lijepljenjem $2g$ otvorenih intervala na zajedničku točku.



Ćelijski ili CW kompleksi

Poopćenje je sljedeća konstrukcija:

(1) Počinjemo s diskretnim skupom X^0 čije točke nazivamo ***0-ćelijama***.

(2) Induktivno, ***n-skelet*** X^n dobije se od X^{n-1} lijepljenjem ***n-ćelija*** e^n_α pomoću preslikavanja $\varphi_\alpha \colon \partial D^n_\alpha = S^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$, tj. X^n je kvocijentni prostor disjunktne unije $X^{n-1} \sqcup \coprod_\alpha D^n_\alpha$, gdje je $\{D^n_\alpha\}_\alpha$ neka familija n-diskova (tj. zatvorenih kugala), uz identifikacije $x \sim \varphi_\alpha(x)$, $x \in \partial D^n_\alpha$.
Dakle, $X^n = X^{n-1} \cup \bigcup_\alpha e^n_\alpha$, gdje su e^n_α međusobno disjunktni otvoreni n-diskovi, disjunktni i s X^{n-1}.

(3) Ako konstrukcija stane za neki $n < \infty$, stavljamo $X := X^n$.
U protivnom stavljamo $X := \bigcup_n X^n$, a za topologiju uzimamo slabu topologiju: $A \subseteq X$ je otvoren (zatvoren) akko je $A \cap X^n$ otvoren (zatvoren) u X^n za sve n.

Ovako konstruiran prostor naziva se ***ćelijski kompleks*** ili ***CW kompleks***.

Primjeri

2.1 1-dimenzionalni CW kompleksi su ***grafovi***.

2.2 Bingova kuća s dvije sobe je 2-dimenzionalan CW kompleks s 29 0-ćelija, 51 1-ćelijom i 23 2-ćelije.
Eulerova karakteristika konačnog ćelijskog kompleksa je alternirana suma broja ćelija, i za Bingovu kuću jednaka je $29 - 51 + 23 = 1$, kao i za točku.
Pokazat ćemo da je Eulerova karakteristika homotopska invarijanta.

2.3 Sfera S^n je CW kompleks s dvije ćelije: 0-ćelija e^0 i n-ćelija e^n koja je pričvršćena za e^0 konstantnim preslikavanjem $S^{n-1} \to e^0$.
To je isto kao kada na S^n gledamo kao na kvocijent $D^n/\partial D^n$.

Realni projektivni prostor kao ćelijski kompleks

2.4 Realni projektivni prostor $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ je kvocijentni prostor $S^n/(x \sim -x)$, što je jednako kvocijentu gornje polusfere ($\cong D^n$) uz identifikaciju dijametralnih točaka na rubu $\partial D^n \cong S^{n-1}$. Dakle, $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ dobije se od $S^{n-1}/(x \sim -x) \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ lijepljenjem jedne n-ćelije pomoću preslikavanja koje je zapravo kvocijentno preslikavanje $S^{n-1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$.
Stoga $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ima ćelijsku strukturu $e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^n$, dakle po jedna i-ćelija u svakoj dimenziji $i \leq n$.
Za $n = 1$ je $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \cong S^1$. Za sve ostale n su $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ i S^n bitno različite n-mnogostrukosti.

2.5 ***Beskonačnodimenzionalan realan projektivan prostor*** $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ definira se kao $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty := \bigcup_n \mathbb{R}\mathrm{P}^n$. To je CW kompleks s po jednom n-ćelijom u svakoj dimenziji. Na $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ možemo gledati kao na prostor svih pravaca u $\mathbb{R}^\infty := \bigcup_n \mathbb{R}^n$, koji prolaze ishodištem.

Zasad nije jasno kako bismo definirali beskonačnodimenzionalnu sferu S^∞.

Kompleksni projektivni prostor kao ćelijski kompleks

2.6 Kompleksni projektivni prostor $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ je kvocijentni prostor jedinične sfere $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ uz identifikaciju $v \sim \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$.
Na $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ možemo gledati i kao na kvocijentni prostor diska D^{2n} pri identifikaciji $v \sim \lambda v$, $v \in \partial D^{2n}$, ovako: Točke sfere $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ kojima je zadnja koordinata realna i nenegativna su točno točke oblika $\big(w, (\sqrt{1-|w|^2}, 0)\big) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ za $|w| \leq 1$. Takve točke upravo čine graf funkcije $w \mapsto \sqrt{1-|w|^2}$, i to je disk $D^{2n}_+ \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ omeđen sferom $S^{2n-1} \subseteq S^{2n+1}$ koju čine točke oblika $(w, 0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ za koje je $|w| = 1$.
Svaka točka sfere S^{2n+1} ekvivalentna je uz identifikaciju $v \sim \lambda v$ nekoj točki diska D^{2n}_+, i ta je točka jedinstvena ako je zadnja koordinata različita od 0. Ako je zadnja koordinata jednaka 0 onda jednostavno imamo identifikaciju $v \sim \lambda v$ za $v \in S^{2n-1}$.
Uz ovaj opis $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \cong D^{2n}_+/(v \sim \lambda v)$ za $v \in S^{2n-1}$, $|\lambda| = 1$, $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ se dobije od $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ dodavanjem jedne $2n$-ćelije e^{2n} pomoću kvocijentnog preslikavanja $S^{2n-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$, pa je $\mathbb{C}\mathrm{P}^n = e^0 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^{2n}$.
Beskonačnodimenzionalan kompleksan projektivni prostor $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty := \bigcup_n \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ima po jednu ćeliju u svakoj parnoj dimenziji.

Karakteristično preslikavanje. Potkompleks

Svaka ćelija e^n_α ima pripadno ***karakteristično preslikavanje*** $\Phi_\alpha \colon D^n_\alpha \to X$ koje proširuje preslikavanje lijepljenja φ_α, i koje je homeomorfizam nutrine $\operatorname{Int} D^n_\alpha$ na e^n_α. Na Φ_α možemo gledati kao na kompoziciju $D^n_\alpha \hookrightarrow X^{n-1} \sqcup D^n_\alpha \xrightarrow{\text{kvocijentno}} X^n \hookrightarrow X$.
Npr. karakteristično preslikavanje i-ćelije e^i prostora $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ je kvocijentno preslikavanje $D^i \to \mathbb{R}\mathrm{P}^i \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^n$.

Potkompleks ćelijskog kompleksa X je zatvoren potprostor $A \subseteq X$ koji je unija nekih ćelija od X. Jer je A zatvoren, za svaku ćeliju e^n_α u A je slika pripadnog Φ_α sadržana u A, pa je i slika pripadnog φ_α sadržana u A, pa je i A ćelijski kompleks.
Naprimjer, X^n je potkompleks ćelijskog kompleksa X.
Za $k \leq n$ je $\mathbb{R}\mathrm{P}^k$ potkompleks od $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, i slično $\mathbb{C}\mathrm{P}^k \subseteq \mathbb{C}\mathrm{P}^n$.

Par (X, A) gdje je A potkompleks od X naziva se ***CW par***.

Oprez: Postoje i ***relativni CW kompleksi***. To je nešto drugo, iako je oznaka također (X, A), ali A *nije* nužno potkompleks od X.

Jedna druga CW struktura sfera

Promotrimo „standardne” inkluzije sfera $S^0 \subseteq S^1 \subseteq \cdots \subseteq S^n$.
Ako na S^k uzmemo CW strukturu kao u primjeru 2.3 (jedna 0-ćelija i jedna k-ćelija), onda ovo *nisu* potkompleksi od S^n.
Da bi S^k bio potkompleks od S^n, $k \leq n$, treba na sferama uzeti jednu drugu CW strukturu: induktivno, S^k možemo izgraditi tako da na „ekvator” S^{k-1} dodamo dvije k-ćelije. Sada je S^n ćelijski kompleks koji u svakoj dimenziji $i \leq n$ ima po dvije i-ćelije, i $S^k \subseteq S^n$ je potkompleks za sve $k \leq n$.

Sada možemo definirati i beskonačnodimenzionalnu sferu $S^\infty := \bigcup_n S^n$, i to je opet CW kompleks.

Kvocijentno preslikavanje $S^\infty \to \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ koje identificira antipodne točke identificira dvije n-ćelije od S^∞ u jednu n-ćeliju od $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$.

Produkti

Ako su X i Y CW kompleksi onda i produkt $X \times Y$ ima prirodnu CW strukturu s ćelijama $e^n_\alpha \times e^m_\beta$, gdje e^n_α prolazi svim ćelijama od X a e^m_β svim ćelijama od Y.

Primjer: Ćelijska struktura torusa $S^1 \times S^1$.

Općenito ima jedna mala poteškoća: CW topologija na $X \times Y$ je nešto finija (slabija) od produktne topologije, ali se obje topologije podudaraju ako je barem jedan od kompleksa X ili Y konačan ili ako su oba prebrojiva.

U našim primjenama nećemo s tim imati problema.

Kvocijenti

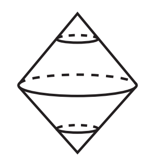
Ako je (X, A) CW par onda kvocijent X/A nasljeđuje prirodnu CW strukturu od X: ćelije od X/A su ćelije od $X \setminus A$ zajedno s jednom novom 0-ćelijom, onom u koju se stegne cijeli A.
Za ćeliju e^n_α od $X \setminus A$ s preslikavanjem lijepljenja $\varphi_\alpha \colon S^{n-1} \to X^{n-1}$, pričvrstno preslikavanje odgovarajuće ćelije od X/A dano je kompozicijom $S^{n-1} \xrightarrow{\varphi_\alpha} X^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}/A^{n-1}$.

Primjer:
Neka je $X = M_g$ ploha roda g s CW strukturom kao u uvodu (jedna 0-ćelija, $2g$ 1-ćelija i jedna 2-ćelija) i neka je $A = X^1$ 1-skelet.
Tada X/A ima jednu 0-ćeliju i jednu 2-ćeliju, dakle $X/A \cong S^2$.

Suspenzija

Suspenzija *SX* prostora X je kvocijent dobiven od produkta $X \times I$ tako da se $X \times \{0\}$ stegne u jednu i $X \times \{1\}$ u drugu točku.
Motivirajući primjer je sfera: za $X = S^n$ je $SX = S^{n+1}$, tj. $S\,S^n = S^{n+1}$.

Na suspenziju možemo gledati kao na dvostruki konus, tj. uniju dvaju ***konusa*** $CX := (X \times I)/(X \times \{0\})$.

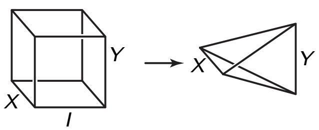


Ako je X ćelijski kompleks onda suspenzija SX dobiva CW strukturu kao kvocijent produkta $X \times I$, gdje segment I ima standardnu CW strukturu: dvije 0-ćelije i jedna 1-ćelija.

Suspenzije imaju važnu ulogu u algebarskoj topologiji jer omogućuju snabdijevanje prostora i algebarskim strukturama.

Spoj (join)

Konus CX je unija svih segmenata koji spajaju točke od X s jednom vanjskom točkom, vrhom konusa. Suspenzija SX je unija svih segmenata koji spajaju točke od X s dvije vanjske točke.
Općenito, ako su X i Y dva prostora onda definiramo prostor koji se sastoji od svih segmenata koji spajaju točke od X s točkama od Y.
Dobiveni prostor je ***spoj*** $X * Y$ koji je definiran kao kvocijent produkta $X \times Y \times I$ uz identifikacije $(x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0)$ i $(x_1, y, 1) \sim (x_2, y, 1)$. Dakle, $X \times Y \times \{0\}$ se sabije u X a $X \times Y \times \{1\}$ u Y.



Općenito, $X * Y$ sadrži X i Y kao potprostore, a sve se ostale točke (x, y, t) nalaze na jedinstvenom segmentu koji spaja točke $x \in X \subseteq X * Y$ i $y \in Y \subseteq X * Y$.

Praktično je točke iz $X * Y$ zapisivati kao $t_1 x + t_2 y$ uz $0 \leq t_i \leq 1$ i $t_1 + t_2 = 1$, uz pravilo $0x + 1y = y$ i $1x + 0y = x$.

Višestruki spoj. Simpleks

Analogno se definira višestruki (iterirani) spoj $X_1 * X_2 * \cdots * X_n$, kao skup formalnih linearnih kombinacija $t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n$, $0 \leq t_i \leq 1$, $t_1 + \cdots + t_n = 1$, uz dogovor da se sumandi oblika $0x_i$ ispuste.
Uz ovaj opis spoja, operacija spoja je očito asocijativna.

Posebno je važan slučaj kada je svaki X_i jedna točka. Spoj od n točaka je konveksan poliedar dimenzije $n-1$ koji nazivamo ***simpleks***.
Konkretno, ako su točke upravo vektori standardne baze u $\mathbb{R}^n$ onda je njihov spoj ***standardni*** $(n-1)$***-simpleks***

$$\Delta^{n-1} := \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : t_1 + \cdots + t_n = 1,\ t_i \geq 0\}.$$

Drugi zanimljiv slučaj je kada su $X_i = S^0$, dvije točke. Onda se spoj $X_1 * \cdots * X_n$ sastoji od 2^n simpleksa Δ^{n-1}, i homeomorfan je S^{n-1}.

Ako su X i Y CW kompleksi onda i $X * Y$ ima CW strukturu tako da su X i Y potkompleksi a preostale ćelije su ćelije produkta $X \times Y \times \langle 0, 1 \rangle$. (I ovdje je onaj mali problem s CW topologijom koja može biti slabija od produktne.)

Wedge (klin)

Neka su X i Y prostori s istaknutim točkama $x_0 \in X$ i $y_0 \in Y$.
Wedge ili ***jednotočkovna unija*** $X \vee Y$ je kvocijent disjunktne unije $X \sqcup Y$ dobiven identifikacijom točaka x_0 i y_0.
Analogno se definira wedge $\bigvee_\alpha X_\alpha$ od proizvoljne familije ***punktiranih prostora***, i ponekad se naziva ***buket***.

Ako su $(X_\alpha, x_{\alpha 0})$ punktirani CW kompleksi, tj. $(X_\alpha, \{x_{\alpha 0}\})$ su CW parovi za sve α, onda je i $\bigvee_\alpha X_\alpha$ CW kompleks.

Primjer: Za svaki ćelijski kompleks X je $X^n / X^{n-1} \cong \bigvee_\alpha S^n_\alpha$ s po jednom n-sferom za svaku n-ćeliju od X.

Smash produkt

I to je jedna konstrukcija važna u algebarskoj topologiji.
Neka su (X, x_0) i (Y, y_0) punktirani prostori (tj. prostori s istaknutom točkom). Potprostor $\{x_0\} \times Y \cup X \times \{y_0\} \subseteq X \times Y$ je zapravo $X \vee Y$. ***Smash produkt*** ili ***reducirani produkt*** $X \wedge Y$ se definira kao kvocijent $X \times Y / X \vee Y$.

Ako su (X, x_0) i (Y, y_0) (punktirani) CW kompleksi onda je i $X \wedge Y$ (punktiran) CW kompleks.

Primjer: Uz standardnu CW strukturu sfera, $S^m \wedge S^n$ je CW kompleks s jednom 0-ćelijom i jednom $(m+n)$-ćelijom, dakle $S^m \wedge S^n \cong S^{m+n}$.

Stezanje potkompleksa

Jedna metoda ustanovljavanja homotopske ekvivalencije koju smo dosad imali je bila bazirana na činjenici da postoji deformacijska retrakcija cilindra preslikavanja M_f na kodomenu od f.
Sada ćemo upoznati još dvije metode:

- stezanje izvjesnog potprostora u točku, i
- promjena načina na koji su dijelovi prostora sastavljeni.

Stezanje potprostora: Obično se stezanjem nekog potprostora u točku homotopski tip prostora drastično mijenja. Međutim:

> Ako je (X, A) CW par t.d. je potkompleks A kontraktibilan onda je kvocijentno preslikavanje $X \to X/A$ homotopska ekvivalencija.

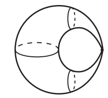
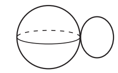
Ovu ćemo tvrdnju dokazati u propoziciji 5.2, a sada ćemo najprije pogledati neke primjene.

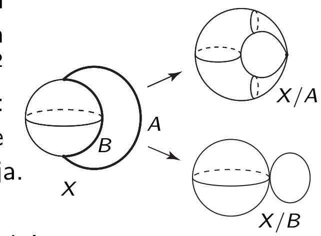
Primjer: grafovi

4.1 Tri grafa    koje smo ranije promatrali, homotopski su ekvivalentni prostori jer su sva tri deformacijski retrakti istog prostora — kruga s dvije rupe.
Istu činjenicu možemo ustanoviti i temeljem navedenog „kriterija stezanjem" jer stezanjem segmenta u sredini prvog i trećeg grafa dobivamo srednji graf.

Općenitije, neka je X povezan konačan graf. Stegnemo li neko ***maksimalno stablo*** u točku dobit ćemo homotopski ekvivalentan graf koji je buket kružnica $\bigvee_1^m S^1$ (stezanje se može raditi i postepeno stežući svaki put po jedan brid s različitim krajevima).
Postavlja se pitanje mogu li dva takva buketa $\bigvee_1^m S^1$ i $\bigvee_1^n S^1$ biti homotopski ekvivalentni a da nisu izomorfni, tj. da nije $m = n$?
Odgovor je NE, ali to nije lako direktno dokazati.
Fundamentalna grupa — alat koji ćemo uskoro upoznati — bit će kao naručen za dokaz te i sličnih činjenica.

Primjer: $S^2 \vee S^1$

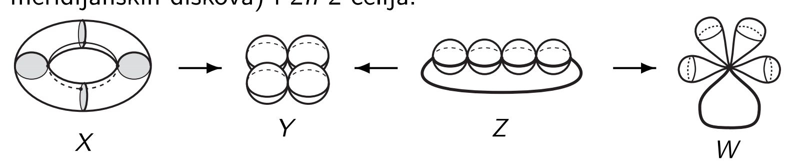
4.2 Jesu li prostori  i  homotopski ekvivalentni?



Neka je prostor X jednak sferi S^2 kojoj je u sjevernom i južnom polu svojim krajevima pričvršćen segment A, i neka je $B \subseteq S^2$ jedan meridijan. CW struktura na X je: dvije 0-ćelije (sjeverni i južni pol), dvije 1-ćelije (nutrine lukova A i B) i jedna 2-ćelija.
Kako je A kontraktibilan to je $X/A \simeq X$.
Isto je tako i $X/B \simeq X$ jer je i B kontraktibilan.
Zato su i X/A i X/B međusobno homotopski ekvivalentni.
Dakle, 2-sfera s dvije identificirane točke i buket 2-sfere i 1-sfere su homotopski ekvivalentni prostori — činjenica koja na prvi pogled sigurno nije očigledna.

Homotopski ekvivalentne ali ipak različite ogrlice

4.3 Neka je X torus s n meridijanskih diskova. Fiksirajmo jednu paralelu i tako dobivamo CW strukturu na X: n 0-ćelija (sjecišta odabrane paralele s rubovima meridijanskih diskova), $2n$ 1-ćelija (n dobivenih dijelova odabrane paralele i n ostataka rubova meridijanskih diskova) i $2n$ 2-ćelija.



Stisnemo li svaki meridijanski disk u točku dobivamo prostor Y (ogrlica s n perli jedna do druge).
Z je niska s n perli zatvorena uzicom.
W je „zvečka" s n zvečkica i uzicom.
Svi su ti prostori istog homotopskog tipa.

Primjer: reducirana suspenzija

4.4 Neka je (X, x_0) punktirani CW kompleks. Stegnemo li segment $\{x_0\} \times I \subseteq SX$ u točku, dobivamo homotopski ekvivalentan CW kompleks ***reduciranu suspenziju*** ΣX, $\Sigma X \simeq SX$.
Iako je običnu suspenziju lakše vizualizirati, reducirana suspenzija je obično jednostavniji prostor. Npr. $S(S^1 \vee S^1)$ je unija dviju sfera slijepljenih duž zajedničkog luka, dok je $\Sigma(S^1 \vee S^1) = S^2 \vee S^2$.

Općenito, za svaka dva CW kompleksa je $\Sigma(X \vee Y) = \Sigma X \vee \Sigma Y$.
Uoči da vrijedi

$$\begin{aligned} \Sigma X &= SX/(\{x_0\} \times I) = \big((X \times I/X \times \{0\})/(X \times \{1\})\big)/(\{x_0\} \times I) \\ &= (X \times I)/(X \times \partial I \cup \{x_0\} \times I) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} X \wedge S^1 &= X \wedge (I/\partial I) = \big(X \times (I/\partial I)\big)/\big(\{x_0\} \times (I/\partial I) \cup X \times \{\partial I\}\big) \\ &= (X \times I/X \times \partial I)/\big(\{x_0\} \times (I/\partial I)\big) = (X \times I)/(X \times \partial I \cup \{x_0\} \times I) \end{aligned}$$

pa je $\Sigma X \cong X \wedge S^1$.

Sljepljivanje prostora

Druga metoda ustanovljavanja homotopske ekvivalencije dvaju prostora je

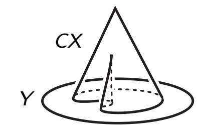
Promjena načina na koji su dijelovi prostora sastavljeni

Imamo prostor X_0 i na njega želimo „nalijepiti" prostor X_1 tako da točke podskupa $A \subseteq X_1$ identificiramo s nekim točkama od X_0.
Točnije, za preslikavanje $f\colon A \to X_0$ napravimo kvocijent disjunktne unije $X_0 \sqcup X_1$ identifikacijama $f(a) \sim a$, $a \in A$.
Dobiveni prostor označujemo $X_0 \sqcup_f X_1$ i kažemo da je *dobiven od prostora X_0 lijepljenjem prostora X_1 duž A pomoću preslikavanja f*.
Kada je $(X_1, A) = (D^n, S^{n-1})$ onda se radi o dodavanju n-ćelije prostoru X_0 pomoću preslikavanja $f\colon S^{n-1} \to X_0$.

Takvom je konstrukcijom napravljen i M_f, cilindar preslikavanja $f\colon X \to Y$.
Točnije, $M_f = Y \sqcup_f (X \times I)$ je dobiven lijepljenje na Y prostora $X \times I$ duž skupa $X \times \{1\}$ pomoću preslikavanja $(x, 1) \mapsto f(x)$ (koje je *u biti* preslikavanje f).

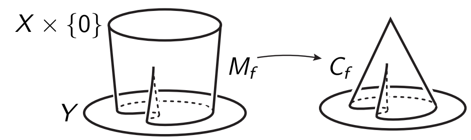
Konus preslikavanja

Konus preslikavanja $f\colon X \to Y$ je prostor $C_f := Y \sqcup_f CX$ dobiven lijepljenjem na Y konusa $CX = (X \times I)/(X \times \{0\})$ duž *baze konusa* $X \times \{1\}$ pomoću preslikavanja $(x, 1) \mapsto f(x)$.



Naprimjer, konus C_f preslikavanja $f\colon S^{n-1} \to Y$ je prostor dobiven od Y dodavanjem n-ćelije pomoću preslikavanja f.

Na konus preslikavanja C_f možemo gledati i kao na kvocijentni prostor M_f/X dobiven od cilindra preslikavanja M_f stezanjem *baze* $X = X \times \{0\}$ u točku.



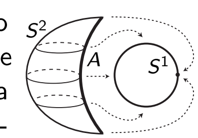
Variranje pričvrstnog preslikavanja

Variranjem preslikavanja f nekom homotopijom f_t, prostor dobiven sljepljivanjem će se neprekinuto mijenjati. Za „lijepe" prostore i promjene su očekivane. Vrijedi:

> Neka je (X_1, A) CW par a $f \simeq g\colon A \to X_0$ homotopna preslikavanja. Tada su prostori $X_0 \sqcup_f X_1$ i $X_0 \sqcup_g X_1$ istog homotopskog tipa.

Prije negoli to dokažemo (propozicija 5.3), pogledajmo nekoliko primjera.

4.5 Na sferu S^2 kojoj su identificirane dvije točke možemo gledati i kao na prostor dobiven od kružnice S^1 na koju je nalijepljena sfera duž nekog luka A koji se „namota" na kružnicu. Kako je A kontraktibilan, pričvrstno preslikavanje je nulhomotopno, a dodavanje sfere kružnici pomoću konstantnog preslikavanja luka, daje $S^1 \vee S^2$. Jer je (S^2, A) CW par, sfera kojoj su identificirane dvije točke je homotopski ekvivalentna wedgeu $S^1 \vee S^2$, kao što smo i na drugi način dokazali u 4.2.



Još nekoliko primjera

4.6 Na sličan se način vidi da je ogrlica u primjeru 4.3 homotopski ekvivalentna wedgeu kružnice i n 2-sfera (zvečka s n zvečkica).

4.7 Neka je (X, A) CW par. Tada je $X/A \simeq X \cup CA$, tj. kvocijent X/A homotopski je ekvivaletan C_i, konusu inkluzije $i \colon A \hookrightarrow X$.
Zaista, kako je konus CA kontraktibilan potkompleks od $X \cup CA$, to je $X/A = (X \cup CA)/CA \simeq X \cup CA$.

4.8 Neka je (X, A) CW par pri čemu ***A je kontraktibilan u X***, tj. inkluzija $A \hookrightarrow X$ je nulhomotopna. Tada je $X/A \simeq X \vee SA \simeq X \vee \Sigma A$.
Zaista, prema 4.7 je $X/A \simeq X \cup CA$, a kako je A kontraktibilan u X, to je $X \cup CA$, konus inkluzije $A \hookrightarrow X$, homotopski ekvivalentan konusu konstantnog preslikavanja $A \to * \in X$, koji je jednak $X \vee SA$.
Naprimjer, za $i < n$ je $S^n/S^i \simeq S^n \vee S^{i+1}$ jer je i-sfera S^i kontraktibilna u n-sferi za $i < n$.
Tako, naprimjer, ponovno dobivamo $S^2/S^0 \simeq S^2 \vee S^1$.

Svojstvo proširenja homotopije

Svojstvo proširenja homotopije je jedno „tehničko” svojstvo koje se pojavljuje u mnogim situacijama i vrlo je korisno.
Radi se o sljedećem: pretpostavimo da imamo preslikavanje $f_0 \colon X \to Y$ i na potprostoru $A \subseteq X$ homotopiju $f_t \colon A \to Y$ restrikcije $f_0|A$ koju želimo proširiti do homotopije $f_t \colon X \to Y$ danog preslikavanja f_0.

Ako je par (X, A) takav da ovaj problem proširenja uvijek ima rješenje, onda se kaže da ***par (X, A) ima svojstvo proširenja homotopije***, ili da je inkluzija $A \hookrightarrow X$ ***kofibracija***.

Dakle, par (X, A) ima svojstvo proširenja homotopije (HEP), ako se svako preslikavanje $X \times \{0\} \cup A \times I \to Y$ može proširiti do preslikavanja $X \times I \to Y$.

Svojstvo proširenja homotopije i retrakcija na „dimnjak”

Specijalno, ako par (X, A) ima svojstvo proširenja homotopije onda se identiteta $X \times \{0\} \cup A \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$ može proširiti do preslikavanja $X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$, tj. „dimnjak” $X \times \{0\} \cup A \times I$ je retrakt od $X \times I$.

Vrijedi i obratno: ako postoji retrakcija $X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$, onda par (X, A) ima svojstvo proširenja homotopije, jer se svako preslikavanje $X \times \{0\} \cup A \times I \to Y$ komponiranjem s tom retrakcijom proširuje do preslikavanja $X \times I \to Y$.

Dakle, (X, A) ima HEP $\iff$ $X \times \{0\} \cup A \times I$ je retrakt od $X \times I$.

Korolar

Ako par (X, A) ima svojstvo proširenja homotopije onda i par $(X \times Z, A \times Z)$ ima svojstvo proširenja homotopije za svaki prostor Z. $\square$

Zadatak: Dokažite ovo direktno iz definicije!

Nema svaki par svojstvo proširenja homotopije

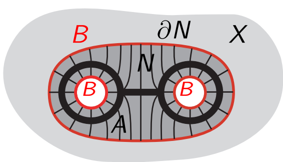
Ako je X Hausdorffov i par (X, A) ima HEP onda je A zatvoren potprostor od X. Naime, $X \times \{0\} \cup A \times I$, kao retrakt od $X \times I$, je zatvoren u $X \times I$. Uzmemo li presjek s $X \times \{1\}$, zaključujemo da je $A \times \{1\}$ zatvoren u $X \times \{1\}$, pa je A zatvoren u X.
Ali iako je $A \subseteq X$ zatvoren, par (X, A) ne mora imati HEP.

Primjer: Neka je $A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} \subseteq [0, 1]$.
Tada par $([0, 1], A)$ *nema* svojstvo proširenja homotopije jer $[0, 1] \times \{0\} \cup A \times I$ nije retrakt od $[0, 1] \times I$. Razlog je loša lokalna struktura para $([0, 1], A)$ oko 0.

Primjer

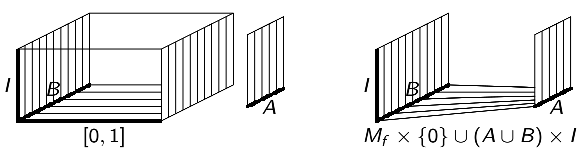
5.1 Neka je (X, A) par t.d. A ima okolinu koja je cilindar preslikavanja, tj. A ima zatvorenu okolinu N koja sadrži potprostor B (nešto kao rub od N) t.d. postoji preslikavanje $f: B \to A$ i homeomorfizam $h: M_f \to N$ t.d. je $h|(A \cup B) = \mathbb{1}_{A\cup B}$.
Tada par (X, A) ima svojstvo proširenja homotopije.
Naprimjer, „debela" slova iz uvoda su okoline u $\mathbb{R}^2$ „tankih" slova koje jesu cilindri preslikavanja.

Slika pokazuje zašto kažemo da je B samo „nešto kao rub" od N.

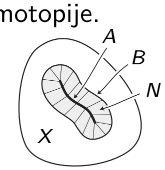


Okolina koja je cilindar preslikavanja osigurava HEP

Dokaz: $[0, 1] \times \{0\} \cup \{0, 1\} \times I$ je retrakt od $[0, 1] \times I$ pa je $B \times [0, 1] \times \{0\} \cup B \times \{0, 1\} \times I$ retrakt od $B \times [0, 1] \times I$.
To inducira retrakciju $M_f \times I \to M_f \times \{0\} \cup (A \cup B) \times I$.



Stoga par $(M_f, A \cup B) \cong (N, A \cup B)$ ima svojstvo proširenja homotopije.
Odavde slijedi da i par (X, A) ima svojstvo proširenja homotopije.
Zaista, neka je $f_0: X \to Y$ preslikavanje i $f_t: A \to Y$ homotopija restrikcije $f_0|A$. Na $X \setminus (N \setminus B) = (X \setminus N) \cup B$ stavimo stacionarnu homotopiju određenu s f_0. Zbog svojstva proširenja homotopije za $(N, A\cup B)$, postoji proširenje unije tih homotopija i na ostatak, tj. na okolinu N. □

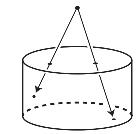


CW parovi imaju svojstvo proširenja homotopije

Propozicija 5.1

Ako je (X, A) CW par onda je $X \times \{0\} \cup A \times I$ deformacijski retrakt od $X \times I$ pa par (X, A) ima svojstvo proširenja homotopije.

Dokaz: Neka je $r: D^n \times I \to D^n \times \{0\} \cup \partial D^n \times I$ retrakcija. Tada je s $(x, t) \mapsto t\, r(x) + (1-t)x$ definirana deformacijska retrakcija r_t s $D^n \times I$ na $D^n \times \{0\} \cup \partial D^n \times I$. Kako se $X^n \times I$ dobiva od $X^n \times \{0\} \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$ dodavanjem nekih kopija od $D^n \times I$ duž $D^n \times \{0\} \cup \partial D^n \times I$, homotopije r_t induciraju deformacijsku retrakciju od $X^n \times I$ na $X^n \times \{0\} \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$.
Napravimo li tu deformacijsku retrakciju u vremenu $[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$, i nadovežemo li sve te homotopije jednu na drugu, dobivamo deformacijsku retrakciju od $X \times I$ na $X \times \{0\} \cup A \times I$.
Neprekidnost u $t = 0$ slijedi iz činjenice da je, za sve n, na $X^n \times I$ ta homotopija stacionarna za $t \in [0, \frac{1}{2^{n+1}}]$, i jer CW kompleks $X \times I$ ima slabu topologiju s obzirom na skelete. □



Stezanje kontraktibilnog potprostora u točku

Propozicija 5.2 (obećana)

Ako par (X, A) ima HEP i A je kontraktibilan, onda je kvocijentno preslikavanje $q: X \to X/A$ homotopska ekvivalencija.

Dokaz: Neka je $f_t: X \to X$ homotopija koja proširuje kontrakciju od A, i $f_0 = \mathbb{1}_X$. Jer je $f_t(A) \subseteq A$, f_t inducira homotopiju $\overline{f_t}: X/A \to X/A$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_t"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "q"] \\ X/A \arrow[r, "\overline{f_t}"] & X/A \end{tikzcd}$$

Za $t = 1$ je $f_1(A) = *$, pa f_1 inducira preslikavanje $g: X/A \to X$ t.d. je $g\, q = f_1$. Očito vrijedi i $q\, g = \overline{f_1}$. Preslikavanja g i q su međusobno inverzne homotopske ekvivalencije jer je $g\, q = f_1 \overset{f_t}{\simeq} f_0 = \mathbb{1}_X$ i $q\, g = \overline{f_1} \overset{\overline{f_t}}{\simeq} \overline{f_0} = \mathbb{1}_{X/A}$. □

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "q"] \\ X/A \arrow[r, "\overline{f_1}"] \arrow[ur, "g"] & X/A \end{tikzcd}$$

Lijepljenje pomoću homotopnih preslikavanja

Propozicija 5.3 (jača od obećane)

Neka je (X_1, A) CW par a $f \simeq g\colon A \to X_0$ neka su homotopna preslikavanja. Tada je $X_0 \sqcup_f X_1 \simeq X_0 \sqcup_g X_1$ rel X_0.

Pritom, za parove (W, Y) i (Z, Y) kažemo da je $W \simeq Z$ rel Y ako postoje $\varphi\colon W \to Z$ i $\psi\colon Z \to W$ t.d. je $\psi\varphi \simeq \mathbb{1}_W$ rel Y i $\varphi\psi \simeq \mathbb{1}_Z$ rel Y, tj. homotopije su stacionarne na Y. To je jače nego $(W, Y) \simeq (Z, Y)$.

Dokaz: Neka je $F\colon A \times I \to X_0$ homotopija od f do g. Prostor $X_0 \sqcup_F (X_1 \times I)$ sadrži $X_0 \sqcup_f X_1$ i $X_0 \sqcup_g X_1$ kao potprostore. Kako je (X_1, A) CW par, prema propoziciji 5.1, postoji deformacijska retrakcija od $X_1 \times I$ na $X_1 \times \{0\} \cup A \times I$, koja inducira deformacijsku retrakciju od $X_0 \sqcup_F (X_1 \times I)$ na $X_0 \sqcup_f X_1$. Analogno, postoji deformacijska retrakcija od $X_0 \sqcup_F (X_1 \times I)$ na $X_0 \sqcup_g X_1$. Obje ove deformacijske retrakcije su identitete na X_0 pa zajedno daju homotopsku ekvivalenciju $X_0 \sqcup_f X_1 \simeq X_0 \sqcup_g X_1$ rel X_0. □

Tehnička propozicija i njezine korisne posljedice

Propozicija 5.4

Neka su (X, A) i (Y, A) parovi sa svojstvom proširenja homotopije i neka je $f\colon X \to Y$ homotopska ekvivalencija t.d. je $f|A = \mathbb{1}_A$. Tada je f homotopska ekvivalencija rel A.

Dokaz višekratno koristi HEP (detalje vidi u [Hatcher]).

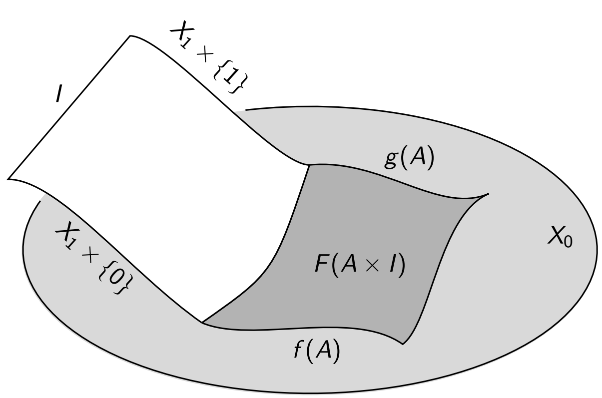
Korolar 5.5

Neka par (X, A) ima svojstvo proširenja homotopije. Ako je inkluzija $A \hookrightarrow X$ homotopska ekvivalencija onda je A deformacijski retrakt od X.

Da vrijedi i obrat, očito je iz definicije deformacijske retrakcije.

Dokaz: Primijeni prethodnu propoziciju na inkluziju $A \hookrightarrow X$. □

Uz dokaz propozicije 5.3



Homotopska ekvivalencija i cilindar preslikavanja

Korolar 5.6 (i to smo bili obećali dokazati)

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je homotopska ekvivalencija ako i samo ako je X deformacijski retrakt cilindra preslikavanja M_f.

Dakle, prostori X i Y su homotopski ekvivalentni ako i samo ako postoji treći prostor koji sadrži X i Y kao deformacijske retrakte.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $f\colon X \to Y$ homotopska ekvivalencija, i, j inkluzije kao u dijagramu. j je homotopska ekvivalencija pa je $i \simeq j\,f\colon X \to M_f$ homotopska ekvivalencija. Sada primijenimo prethodni korolar na par (M_f, X) koji ima HEP prema primjeru 5.1 (uz $N = X \times [0, \frac{1}{2}] \subseteq M_f$). ✓

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "i"'] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & M_f \end{tikzcd}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Retrakcija $r\colon M_f \to Y$ je homotopska ekvivalencija. Ako je X deformacijski retrakt od M_f onda je i inkluzija $i\colon X \to M_f$ homotopska ekvivalencija, pa je i $f = r\,i$ homotopska ekvivalencija. □

$$\begin{tikzcd} & Y \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "i"'] \arrow[r, phantom, "="] & M_f \arrow[u, "r"'] \end{tikzcd}$$