Nelinearna analiza i primjene

Bilješke s predavanja prof. dr. sc. Zvonimira Tuteka u akademskoj godini 2012./2013.

Natipkao i uredio:
Petar Mlinarić

Zagreb, 12. lipnja 2013.

Sadržaj

Poglavlje 1

Banachovi prostori

1.1 Osnovni pojmovi

Promatrat ćemo samo realne vektorske prostore.

Definicija 1.1.1 Neka je X realan vektorski prostor i $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ funkcija koja zadovoljava

- $\|x\| \geqslant 0$, $x \in X$,
- $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$,
- $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, $x, y \in X$.

Uređeni par $(X, \|\cdot\|)$ nazivamo *normirani prostor*.

Napomena 1.1.2 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Lipschitzova domena.

Primjer 1.1.3 $L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty]$ s p-normom

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \, \mathrm{d}\lambda \right)^{\frac{1}{p}}, \quad u \in L^p(\Omega).$$

$C(\overline{\Omega})$ s normom beskonačno

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|, \quad u \in C(\overline{\Omega}).$$

$W^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, +\infty]$, ćemo definirati kasnije.

Definicija 1.1.4 Neka je (x_n) niz u X i $x \in X$. Kažemo da niz (x_n) *konvergira prema* x ako je

$$\lim_{n \to +\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Oznaka: $x_n \to x$.

Primjer 1.1.5 Definiramo $u_n \in C([0,1])$, $n \in \mathbb{N}$

$$u_n(t) = \sin\frac{t}{n}.$$

Norma iznosi

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} \left|\sin\frac{t}{n}\right| = \sin\frac{1}{n} \to 0.$$

Dakle, $u_n \to 0$ u $C([0,1])$.

Definicija 1.1.6 Kažemo da je skup $K \subseteq X$ *(nizovno) kompaktan* ako svaki niz iz K sadrži konvergentan podniz.

Neka je $K \subseteq X$ i $x \in X$. Zanima nas kako najbolje aproksimirati x skupom K. Kažemo da je x_K najbolja aproksimacija od x u K ako je

$$\|x_K - x\| = \inf_{y\in K} \|y - x\|.$$

Teorem 1.1.7 Ako je K kompaktan u X, onda za sve $x \in X$ postoji $x_K \in K$ koji je najbolja aproksimacija od x u K.

Dokaz. Neka je $x \in X$ proizvoljan. Vidimo da je

$$\inf_{y\in K} \|y - x\| < +\infty.$$

Iz definicije infimuma slijedi da postoji niz (x_n) u K takav da je

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = \inf_{y\in K} \|y - x\|.$$

Skup K je kompaktan, pa postoji podniz (x_{n_k}) od (x_n) i $x_K \in K$ takvi da $x_{n_k} \to x_K$. Slijedi da je onda i

$$\lim_{k\to+\infty} \|x_{n_k} - x\| = \inf_{y\in K} \|y - x\|.$$

Uočimo da je

$$\lim_{k\to+\infty} \|x_{n_k} - x\| = \|x_K - x\|.$$

Dakle, x_K je najbolja aproksimacija od x u K. ■

Zadatak 1.1.8 Neka je $K \subseteq X$ kompaktan. Dokažite da je zatvoren i ograničen.

Rješenje: Neka je (x_n) konvergentan niz u K s limesom u X. Postoji konvergentan podniz od (x_n) (s limesom u K). Kako podniz svakog konvergentnog niza je konvergentan i konvergira prema istom limesu, slijedi da niz (x_n) ima limes u K.

Pretpostavimo da K nije ograničen. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in K$ takav da je $\|x_n\| \geqslant n$. Svaki podniz niza (x_n) je neograničen, pa nije konvergentan, što je u kontradikciji s kompaktnosti od K.

Zadatak 1.1.9 Dokažite da ako je K kompaktan i $F \subseteq K$ zatvoren, onda je F kompaktan.

Rješenje: Neka je (x_n) proizvoljan niz u F. To je onda i niz u K, pa postoji konvergentan podniz (x_{n_k}) koji konvergira u K. Niz (x_{n_k}) konvergira u F, pa ima limes u F. Dakle, F je kompaktan.

Definicija 1.1.10 Neka je X normirani prostor i (x_n) niz u X. Kažemo da je (x_n) *Cauchyjev niz* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da je $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ čim su $n, m \geqslant n_\varepsilon$.

Zadatak 1.1.11 Dokažite da je (x_n) Cauchyjev niz ako i samo ako je

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{i,j\geqslant n} \|x_i - x_j\| = 0.$$

Definicija 1.1.12 Kažemo da je X *potpun* ako je svaki Cauchyjev niz iz X konvergentan. Za normirani prostor kažemo da je *Banachov* ako je potpun.

Primjer 1.1.13 $L^p(\Omega)$, $C(\overline{\Omega})$ i $W^{1,p}(\Omega)$ su Banachovi prostori, gdje je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena domena i $p \in [1, +\infty]$.

Zadatak 1.1.14 Neka je X normirani prostor, $x_0, x_1 \in X$ i niz (x_n) definiran s

$$x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dokažite da je (x_n) Cauchyjev niz.

Rješenje: Za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_n\| &= \left\|\frac{x_{n-1} + x_n}{2} - x_n\right\| = \left\|\frac{x_{n-1} - x_n}{2}\right\| = \frac{\|x_n - x_{n-1}\|}{2} = \dots \\ &= \frac{\|x_1 - x_0\|}{2^n}.\end{aligned}$$

Za proizvoljne $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned}\|x_{n+m} - x_n\| &= \left\|\sum_{i=0}^{m-1}(x_{n+i+1} - x_{n+i})\right\| \leqslant \sum_{i=0}^{m-1}\|x_{n+i+1} - x_{n+i}\| = \sum_{i=0}^{m-1}\frac{\|x_1 - x_0\|}{2^{n+i}} \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\|x_1 - x_0\|}{2^{n+i}} = \frac{\|x_1 - x_0\|}{2^{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Slijedi da je (x_n) Cauchyjev niz.

Zadatak 1.1.15 Neka je X normirani prostor i (x_n) niz u X koji konvergira prema $x \in X$. Dokažite da niz (y_n) definiran s

$$y_n = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

konvergira prema x.

Rješenje: Niz (x_n) je ograničen, pa postoji $M > 0$ takav da je $\|x_n - x\| < M$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $n \geqslant n_0$. Za sve $n \geqslant \frac{2n_0 M}{\varepsilon}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\|y_n - x\| &= \left\| \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} - x \right\| = \left\| \frac{(x_1 - x) + \cdots + (x_n - x)}{n} \right\| \\
&\leqslant \frac{\|x_1 - x\| + \cdots + \|x_n - x\|}{n} < \frac{n_0 M + (n - n_0)\frac{\varepsilon}{2}}{n} \leqslant \frac{n_0 M}{\frac{2n_0 M}{\varepsilon}} + \left(1 - \frac{n_0}{n}\right)\frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, niz (y_n) konvergira prema x.

Definicija 1.1.16 Neka su $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normirani prostori, $f : X \to Y$ i $x \in X$. Kažemo da je f *neprekidna u* x ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $\|f(x) - f(y)\|_Y < \varepsilon$ čim je $\|x - y\|_X < \delta$.

Ako je f neprekidna u x i $x_n \to x$, onda $f(x_n) \to f(x)$.

Zadatak 1.1.17 Jesu li funkcije

- $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$
- $\mathbb{R} \times X \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda x \in X$
- $X \times X \ni (x, y) \mapsto x + y \in X$

neprekidne?

Teorem 1.1.18 Neka je $f : X \to Y$ neprekidna i $K \subseteq X$ kompaktan u X. Tada je $f(K)$ kompaktan u Y.

Dokaz. Neka je (y_n) proizvoljan niz u $f(K)$. Tada postoji niz (x_n) u K takav da je $f(x_n) = y_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Zbog kompaktnosti od K slijedi da niz (x_n) ima podniz (x_{n_k}) koji konvergira prema $x \in K$. Funkcija f je neprekidna, pa niz $(f(x_{n_k}))$ konvergira prema $f(x) \in f(K)$. Dakle, niz (y_{n_k}) je konvergentan podniz od (y_n). ■

Definicija 1.1.19 Kažemo da je $f : X \to Y$ *uniformo neprekidna na skupu* $D \subseteq X$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $\|f(x) - f(y)\|_Y < \varepsilon$ čim je $\|x - y\|_X < \delta$ za $x, y \in D$.

Teorem 1.1.20 Neka je $f : X \to Y$ neprekidna i $K \subseteq X$ kompaktan. Tada je f uniformno neprekidna na K.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj.

$$(\exists\, \varepsilon > 0)(\forall\, \delta > 0)(\exists\, x, y \in K)\ \|x - y\|_X < \delta \text{ i } \|f(x) - f(y)\|_Y \geqslant \varepsilon.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ možemo naći $x_n, y_n \in K$ takve da je

$$\|x_n - y_n\|_X < \frac{1}{n} \text{ i } \|f(x_n) - f(y_n)\| \geqslant \varepsilon.$$

(x_n) je niz u K, pa postoji podniz (x_{n_k}) takav da $x_{n_k} \to x \in K$. (y_{n_k}) je niz u K, pa postoji podniz $(y_{n_{k_l}})$ takav da $y_{n_{k_l}} \to y \in K$. Vidimo da je

$$0 \leqslant \|x - y\| \leqslant \|x - x_{n_{k_l}}\| + \|x_{n_{k_l}} - y_{n_{k_l}}\| + \|y_{n_{k_l}} - y\| \to 0,$$

iz čega slijedi da je $\|x - y\| = 0$, tj. $x = y$. Uočimo da je

$$0 \leqslant \|f(x_{n_{k_l}}) - f(y_{n_{k_l}})\| \leqslant \|f(x_{n_{k_l}}) - f(x)\| + \|f(y) - f(y_{n_{k_l}})\| \to 0,$$

što je u kontradikciji s $\|f(x_{n_{k_l}}) - f(y_{n_{k_l}})\| \geqslant \varepsilon$. ■

Teorem 1.1.21 Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidna i $K \subseteq X$ kompaktan. Tada f dostiže svoje ekstreme na K.

Dokaz. Po Teoremu 1.1.18 je $f(K)$ kompaktan skup, pa je po Zadatku 1.1.8 zatvoren i ograničen. Skup $f(K)$ je neprazan i ograničen, pa postoji $\inf f(K)$ i $\sup f(K)$. Po definiciji infimuma postoji niz (y_n) u $f(K)$ takav da $y_n \to \inf f(K)$. Zbog zatvorenosti od $f(K)$ slijedi da je $\inf f(K) \in f(K)$, tj. f postiže minimum na K. Analogno se pokaže da postiže i maksimum na K. ■

Definicija 1.1.22 Neka je X Banachov prostor. Kažemo da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ *linearna* (*linearni funkcional*) ako je

- $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$ (homogenost)
- $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in X$ (aditivnost).

S X' označavamo skup svih neprekidnih linearnih funkcionala na X.

X' je realan vektorski prostor uz standardne operacija zbrajanja i množenja skalarom (po točkama). Normu na X' definiramo s

$$\|f\|_{X'} := \sup_{\|x\| \leqslant 1} f(x) = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{f(x)}{\|x\|}, \quad f \in X'.$$

Pokaže se da je $\|\cdot\|_{X'}$ doista norma i da je uz tu normu X' potpun, tj. X' je Banachov prostor.

Primjer 1.1.23 Promotrimo $L^p(\Omega)$ za $p \in \langle 1, +\infty \rangle$. Definiramo p' tako da je

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Tada je $(L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega)$.

Neka je $g \in L^{p'}(\Omega)$ fiksan. Tada je za svaki $f \in L^p(\Omega)$ (po Hölderovoj nejednakosti) $fg \in L^1(\Omega)$. Tvrdimo da je

$$f \mapsto \int_\Omega gf \in (L^p(\Omega))'.$$

Doista, linearnost slijedi iz linearnosti integrala. Za neprekidnost, neka je (f_n) niz u $L^p(\Omega)$ koji konvergira u $f \in L^p(\Omega)$. Slijedi

$$\left| \int_\Omega g f_n - \int_\Omega g f \right| = \left| \int_\Omega g(f_n - f) \right| \leqslant \int_\Omega g|f_n - f| \leqslant \|g\|_{p'} \|f_n - f\|_p \to 0,$$

tj.

$$\int_\Omega g f_n \to \int_\Omega g f.$$

Dakle, $(L^p(\Omega))' \supseteq L^{p'}(\Omega)$.

Definicija 1.1.24 Neka je (x_n) niz u X i $x \in X$. Kažemo da niz (x_n) *konvergira slabo prema* x ako $f(x_n) \to f(x)$, za svaki $f \in X'$. Ako $\|x_n - x\| \to 0$, kažemo da niz (x_n) *konvergira jako prema* x.

Zadatak 1.1.25 Neka $x_n \to x$ slabo. Dokažite da je niz (x_n) ograničen i da je

$$\|x\| \leqslant \liminf_n \|x_n\|.$$

Zadatak 1.1.26 Dokažite da za sve $f \in X'$ i $x \in X$ vrijedi $|f(x)| \leqslant \|f\|_{X'} \|x\|$.

Rješenje: Slijedi iz definicije od $\|\cdot\|_{X'}$.

Propozicija 1.1.27 Ako $x_n \to x$ jako, onda $x_n \to x$ slabo.

Dokaz. Za proizvoljan $f \in X'$ vrijedi

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leqslant \|f\|_{X'} \|x_n - x\| \to 0,$$

čime je tvrdnja pokazana. ■

Zadatak 1.1.28 Dokažite da ako $x_n \to x$ slabo u X i $f_n \to f$ u X' jako, onda $f_n(x_n) \to f(x)$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x)| &\leqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\ &= |(f_n - f)(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\ &\leqslant \|f_n - f\|_{X'} \|x_n\| + |f(x_n) - f(x)| \\ &\to 0 \end{aligned}$$

Neka je X Banachov prostor. Tada je X' Banachov prostor. Istim argumentom je i $(X')' = X''$ Banachov prostor. Vrijedi $X \hookrightarrow X''$ (X se može uložiti u X''), tj. postoji funkcija $J : X \to X''$ koja je linearna, injektivna i neprekidna (ulaganje). Definiramo $J(x)(f) = f(x)$, za sve $x \in X$ i $f \in X'$. Dokažimo da je J ulaganje.

- J linearna

  Neka su $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i $x, y \in X$ proizvoljni. Za svaki $f \in X'$ vrijedi

  $$\begin{aligned} J(\lambda x + \mu y)(f) &= f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = \lambda J(x)(f) + \mu J(y)(f) \\ &= (\lambda J(x) + \mu J(y))(f), \end{aligned}$$

  pa je $J(\lambda x + \mu y) = \lambda J(x) + \mu J(y)$.

- J injektivna

  Dokaže se da je J izometrija, pa je i injektivna.

- J neprekidna

  Neka $x_n \to 0$. Tada je

  $$\begin{aligned} \|J(x_n) - J(0)\| &= \|J(x_n)\| = \max_{\|f\|\leqslant 1} |J(x_n)(f)| = \max_{\|f\|\leqslant 1} |f(x_n)| \leqslant \max_{\|f\|\leqslant 1} \|f\|\|x_n\| \\ &= \|x_n\| \to 0. \end{aligned}$$

  Dakle, J je neprekidna u 0, pa je zbog linearnosti neprekidna na cijelom X.

Neka je $p \in \langle 1, +\infty\rangle$. Vrijedi $(L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega)$. Slijedi da je $(L^p(\Omega))'' = L^{p''}(\Omega) = L^p(\Omega)$. To svojstvo nema svaki Banachov prostor.

Definicija 1.1.29 Kažemo da je X *refleksivan* ako je $X'' = X$.

Teorem 1.1.30 (Eberlein, Smulyan) Banachov prostor je refleksivan ako i samo ako je $\overline{K}(0,1)$ slabo nizovno kompaktan skup (svaki niz ima slabo konvergentan podniz).

1.2 Prostori $W^{1,p}(\Omega)$

Neka je Ω Lipshitzova domena (otvoren, ograničen i s rubom bez preoštrih šiljaka) i $p \in [1, +\infty]$. Do definicije prostora $W^{1,p}(\Omega)$ ćemo doći u 4 koraka:

1. $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$,
2. $\mathcal{D}'(\Omega)$ – distribucije,
3. "slaba" derivacija,
4. definicija prostora $W^{1,p}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definicija 1.2.1 *Nosač* funkcije $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definiramo kao $\overline{\{x \in \Omega \colon f(x) \neq 0\}}$ (oznaka: $\operatorname{supp} f$ — support). Definiramo skup $C_c^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) \colon \operatorname{supp} f \subseteq \Omega\}$.

Kako je za $f \in C_c^\infty(\Omega)$ nosač kompaktan skup koji se nalazi unutar otvorenog skupa, udaljenost $\operatorname{supp} f$ i $\partial\Omega$ je pozitivna.

Primjer 1.2.2 Funkcija $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

je klase C^∞ i $\operatorname{supp} \varphi = [-1, 1]$. Također je funkcija $\varphi_R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirana s

$$\varphi_R(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{R^2 - \|x\|^2}}, & \|x\| < 1 \\ 0, & \|x\| \geqslant 1 \end{cases}$$

klase C^∞ i $\operatorname{supp} \varphi_R = \overline{K}(0, R)$.

Definicija 1.2.3 Definiramo $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$. To je vektorski prostor sa standardnim operacijama zbrajanja i množenja skalarom. Kažemo da niz (φ_k) iz $C_c^\infty(\Omega)$ konvergira prema $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ ako

(i) $\partial_1^{k_1} \cdots \partial_n^{k_n} \varphi_k \to \partial_1^{k_1} \cdots \partial_n^{k_n} \varphi$ uniformno, za sve $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$,

(ii) $\operatorname{supp} \varphi_k, \operatorname{supp} \varphi \subseteq K$ za neki kompaktni skup $K \subseteq \Omega$.

$\mathcal{D}(\Omega)$ zovemo prostor test-funkcija.

Zadatak 1.2.4 Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ i $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $\partial_1^{k_1} \cdots \partial_n^{k_n} \varphi = 0$. Tada je $\varphi = 0$.

Rješenje: Za $k_1 = \cdots = k_n = 0$ je tvrdnja trivijalna.

Pretpostavimo da je $k_i = 1$ za neki $i \in \{1, \ldots, n\}$, a $k_j = 0$ za $j \neq i$. Slijedi da je φ konstantna, ali kako ima kompaktan nosač, mora biti nul-funkcija.

Induktivno slijedi općenita tvrdnja.

Zadatak 1.2.5 Neka su $f, g \in L^1(\Omega)$ takvi da je

$$\int_\Omega f\varphi = \int_\Omega g\varphi,$$

za svaki $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Tada je $f = g$ u L^1.

Definicija 1.2.6 Definiramo da $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ako je

(i) f linearan funkcional na $\mathcal{D}(\Omega)$,

(ii) f (nizovno) neprekidna u smislu: ako je (φ_n) niz u $\mathcal{D}(\Omega)$ takav da $\varphi_n \to 0$ u $\mathcal{D}(\Omega)$, onda $f(\varphi_n) \to 0$.

Kažemo da je f *distribucija*.

Kako je Ω ograničen, vrijedi $C_c^\infty(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}) \subset L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, $p \in \langle 1, +\infty \rangle$. Stoga, ako pokažemo da nešto vrijedi na $L^1(\Omega)$, onda tvrdnja slijedi i za sve manje prostore.

Primjer 1.2.7 Neka je $f \in L^1(\Omega)$. Definiramo $\mathcal{F} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ s

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int\limits_\Omega f\varphi, \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Vrijedi da je $\mathcal{F} \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Linearnost se lako provjeri. Neka je (φ_n) niz u Ω takav da $\varphi_n \to 0$. Tada je po Hölderovoj nejednakosti

$$|\mathcal{F}(\varphi_n)| = \left|\int\limits_\Omega f\varphi_n\right| \leqslant \|f\|_1\|\varphi_n\|_\infty \to 0,$$

pa je $\mathcal{F}$ neprekidna.

Može se pokazati da je $f \mapsto \mathcal{F}$ jedno ulaganje od $L^1(\Omega)$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$ (linearnost i neprekidnost su jednostavne, injektivnost slijedi iz Zadatka 1.2.5).

Primjer 1.2.8 Neka je $x_0 \in \Omega$. Definiramo $\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ s $\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0)$. Linearnost lako vidimo. Za (φ_n) niz u $\mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_n \to 0$, vrijedi

$$|\delta_{x_0}(\varphi_n)| = |\varphi_n(x_0)| \leqslant \|\varphi_n\|_\infty \to 0,$$

iz čega slijedi da $\delta_{x_0}(\varphi_n) \to 0$, tj. δ_{x_0} je neprekidna. Dakle, $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Preslikavanje δ_{x_0} zovemo Diracova distribucija.

Definicija 1.2.9 Za $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, i $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ definiramo

$$\left(\partial_1^{k_1} \cdots \partial_n^{k_n} f\right)(\varphi) = (-1)^{k_1+\cdots+k_n} f\left(\partial_1^{k_1} \cdots \partial_n^{k_n} \varphi\right), \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

$\partial_1^{k_1} \cdots \partial_n^{k_n} f$ zovemo *derivacija distribucije* ili *slaba derivacija.*

Primjer 1.2.10 Neka je $n = 1$ i $\Omega = \langle -1, 1\rangle$.

- Neka je $f(x) = |x|$. Kako smo vidjeli, $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (koristimo oznaku f umjesto $\mathcal{F}$). Klasična derivacija od f je

  $$f'_K(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \in C^\infty(\langle -1, 1\rangle) \text{ g.s.}$$

  Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ proizvoljan. Kako je $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$, slijedi da je $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$. Slaba derivacija od f je

  $$f'(\varphi) = -f(\varphi') = -\int\limits_{-1}^{1} f\varphi' = -\int\limits_{-1}^{0} f\varphi' - \int\limits_{0}^{1} f\varphi' = -\int\limits_{-1}^{0} (-x)\varphi' - \int\limits_{0}^{1} x\varphi'$$
  $$= x\varphi\Big|_{-1}^{0} - \int\limits_{-1}^{0} \varphi - x\varphi\Big|_{0}^{1} + \int\limits_{0}^{1} \varphi = \int\limits_{-1}^{1} f'_K\varphi = f'_K(\varphi)$$

  Vidimo da se u ovom primjeru slaba i klasična derivacija poklapaju.

- Neka je
$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$
Vrijedi $f \in L^1(\langle -1, 1\rangle)$, pa je $f \in \mathcal{D}'(\langle -1, 1\rangle)$. Klasična derivacija je $f'_K(x) = 0 \in L^1(\langle -1, 1\rangle)$.
Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ proizvoljan. Vidimo da je
$$\begin{aligned} f'(\varphi) &= -f(\varphi') = -\int_{-1}^{1} f\varphi' = -\int_{-1}^{0} f\varphi' - \int_{0}^{1} f\varphi' = \int_{-1}^{0} \varphi' - \int_{0}^{1} \varphi' = \varphi\Big|_{-1}^{0} - \varphi\Big|_{0}^{1} \\ &= \varphi(0) - \varphi(-1) - \varphi(1) + \varphi(0) = 2\varphi(0) = (f(0_+) - f(0_-))\varphi(0), \end{aligned}$$
dok je
$$f'_K(\varphi) = \int_{-1}^{1} f'_K\varphi = \int_{-1}^{1} 0 \cdot \varphi = 0,$$
pa ovdje nema poklapanja.

- Neka je f diferencijabilna na $\langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle$ s prekidom prve vrste u 0. Klasična derivacija je
$$f'_K(x) = \begin{cases} f'(x), & x < 0 \\ f'(x), & x > 0 \end{cases} \in L^\infty(\langle -1, 1\rangle).$$
Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ proizvoljan. Tada je
$$\begin{aligned} f'(\varphi) &= -f(\varphi') = -\int_{-1}^{1} f\varphi' = -\int_{-1}^{0} f\varphi' - \int_{0}^{1} f\varphi' \\ &= -f\varphi\Big|_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} f'_K\varphi - f\varphi\Big|_{0}^{1} + \int_{0}^{1} f'_K\varphi \\ &= \int_{-1}^{1} f'_K\varphi - f(0_-)\varphi(0) + f(-1)\varphi(-1) - f(1)\varphi(1) + f(0_+)\varphi(0) \\ &= f'_K(\varphi) + \underbrace{(f(0_+) - f(0_-))}_{[f(0)]\,-\,\text{skok}}\varphi(0) \end{aligned}$$

Može se pokazati da, u slučaju $n = 1$, su slaba i klasična derivacija funkcije f jednake ako i samo ako je f apsolutno neprekidna.

Propozicija 1.2.11 Neka su $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$. Funkcija $\partial_1^{k_1} \cdots \partial_n^{k_n} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ je linearna i neprekidna.

Dokaz. Linearnost slijedi iz linearnosti parcijalne derivacije. Neka je (φ_m) niz u $\mathcal{D}(\Omega)$ takav da $\varphi_m \to 0$ u $\mathcal{D}(\Omega)$. Posebno slijedi da $\partial_1^{k_1} \cdots \partial_n^{k_n}\varphi_m \to 0$ uniformno, što povlači da je $\partial_1^{k_1} \cdots \partial_n^{k_n}$ neprekidna u 0 (jer je $\partial_1^{k_1} \cdots \partial_n^{k_n} 0 = 0$), pa je zbog linearnosti neprekidna na $\mathcal{D}(\Omega)$. ■

Propozicija 1.2.12 Za $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ i $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ je $\partial_1^{k_1} \cdots \partial_n^{k_n} f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Dokaz. Linearnost lako vidimo iz definicije. Neka je (φ_m) niz u $\mathcal{D}(\Omega)$ takav da $\varphi_m \to 0$. Tada posebno $\partial_1^{k_1} \cdots \partial_n^{k_n} \varphi_m \to 0$, pa je

$$\left|\left(\partial_1^{k_1} \cdots \partial_n^{k_n} f\right)(\varphi_m)\right| = \left|(-1)^{k_1+\cdots+k_n} f\left(\partial_1^{k_1} \cdots \partial_n^{k_n} \varphi_m\right)\right| \to 0.$$

Dakle, $\partial_1^{k_1} \cdots \partial_n^{k_n} f$ je neprekidna. ∎

Definicija 1.2.13 Definiramo da je $f \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, +\infty]$, ako vrijedi

(*i*) $f \in L^p(\Omega)$,

(*ii*) za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ slaba derivacija $\partial_i f$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$ se može reprezentirati funkcijom iz $L^p(\Omega)$.

Uz standardne operacija zbrajanja i množenja skalarom, $W^{1,p}(\Omega)$ je realan vektorski prostor.

Definicija 1.2.14 Definiramo normu $\|\cdot\|_{1,p}$ na $W^{1,p}(\Omega)$ s

$$\|f\|_{1,p} = \|f\|_p + \sum_{i=1}^{n} \|\partial_i f\|_p.$$

Napomena 1.2.15 S

$$f \mapsto \left(\|f\|_p^p + \sum_{i=1}^{n} \|\partial_i f\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

definirana je ekvivalentna norma na $W^{1,p}(\Omega)$, što vidimo iz

$$\begin{aligned}
\|f\|_p + \sum_{i=1}^{n} \|\partial_i f\|_p &= (n+1) \frac{\|f\|_p + \sum_{i=1}^{n} \|\partial_i f\|_p}{n+1} \\
&\leqslant (n+1) \left(\frac{\|f\|_p^p + \sum_{i=1}^{n} \|\partial_i f\|_p^p}{n+1}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant (n+1) \left(\max\left\{\|f\|_p^p, \|\partial_1 f\|_p^p, \ldots, \|\partial_n f\|_p^p\right\}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (n+1) \max\left\{\|f\|_p, \|\partial_1 f\|_p, \ldots, \|\partial_n f\|_p\right\} \\
&\leqslant (n+1) \left(\|f\|_p + \sum_{i=1}^{n} \|\partial_i f\|_p\right).
\end{aligned}$$

Zadatak 1.2.16 Neka je $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ takva da je $\partial_i f = 0$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$. Dokažite da postoji konstanta $C \in \mathbb{R}$ takva da je

$$f(\varphi) = C \int_\Omega \varphi, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Teorem 1.2.17 $W^{1,p}$ je Banachov prostor.

Dokaz. Uočimo da za $f \in W^{1,p}$ vrijedi $(f, \partial_1 f, \ldots, \partial_n f) \in (L^p)^{n+1}$. Možemo definirati preslikavanje $J : W^{1,p} \to (L^p)^{n+1}$ s $J(f) = (f, \partial_1 f, \ldots, \partial_n f)$. Prostor $(L^p)^{n+1}$ s normom $\|\cdot\|_1$ ($\|(g_0, g_1, \ldots, g_n)\|_1 = \|g_0\|_p + \|g_1\|_p + \cdots + \|g_n\|_p$) je Banachov. Vidimo da je

$$\|J(f)\|_1 = \|(f, \partial_1 f, \ldots, \partial_n f)\|_1 = \|f\|_p + \|\partial_1 f\|_p + \cdots + \|\partial_n f\|_p = \|f\|_{1,p},$$

tj. J je izometrija. Očito je J linearna, pa je $J(W^{1,p})$ potprostor od $(L^p)^{n+1}$ koji je izometrično izomorfan s $W^{1,p}$. Da bi dokazali potpunost od $W^{1,p}$ dovoljno je dokazati da je $J(W^{1,p})$ zatvoren potprostor od $(L^p)^{n+1}$. Tada bi slijedilo da je $J(W^{1,p})$ potpun jer je $(L^p)^{n+1}$ potpun, a onda da je $W^{1,p}$ potpun.

Neka $((f_m, \partial_1 f_m, \ldots, \partial_n f_m))_m \subseteq J(W^{1,p})$ konvergira prema $(g_0, g_1, \ldots, g_n) \in (L^p)^{n+1}$. To znači da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $m \geqslant m_0$ je

$$\begin{aligned} &\|(f_m, \partial_1 f_m, \ldots, \partial_n f_m) - (g_0, g_1, \ldots, g_n)\|_1 \\ &= \|f_m - g_0\|_p + \|\partial_1 f_m - g_1\|_p + \cdots + \|\partial_n f_m - g_n\|_p < \varepsilon. \end{aligned}$$

Slijedi da je $\|f_m - g_0\|_p < \varepsilon$ i $\|\partial_i f_m - g_i\|_p < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$. Dakle, $f_m \xrightarrow{L^p} g_0$ i $\partial_i f_m \xrightarrow{L^p} g_i$, $i = 1, \ldots, n$. Slijedi da je $f_m, \partial_i f_m, g_0, g_i \in L^1$, te $f_m \xrightarrow{L^1} g_0$ i $\partial_i f_m \xrightarrow{L^1} g_i$, pa za svaki $\varphi \in \mathcal{D}$ vrijedi

$$\int_\Omega g_0 \partial_i \varphi = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega f_m \partial_i \varphi = -\lim_{m\to\infty} \int_\Omega \partial_i f_m \, \varphi = -\int_\Omega g_i \varphi,$$

tj. $g_i = \partial_i g_0$. Stoga je $(g_0, g_1, \ldots, g_n) \in J(W^{1,p})$. Dakle, $J(W^{1,p})$ je zatvoren. ■

Zadatak 1.2.18 Promotrimo Greenove funkcije

$$G_n(x) := C_n \begin{cases} \ln \|x\|, & n = 2 \\ \dfrac{1}{\|x\|^{n-2}}, & n \geqslant 3 \end{cases}.$$

Za koje $p \in [1, +\infty]$ je $G_n \in W^{1,p}(K(0, R))$?

Rješenje: $G_n \in W^{1,p}(K(0,R)) \;\Leftrightarrow\; p \in \big[1, \frac{n}{n-1}\big\rangle$.

Zadatak 1.2.19 Neka je $T \subset \mathbb{R}^2$ trokut s vrhovima u $(0,0)$, $(1,1)$ i $(0,1)$. Odredite slabe derivacije od $\mathbb{1}_T$ (po x i y).

Rješenje:

$$\begin{aligned} \partial_x \mathbb{1}_T(\varphi) &= -\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_T \partial_x \varphi = -\int_T \partial_x \varphi = -\int_{\partial T} \varphi n_1 \, \mathrm{d}s \\ &= -\int_{(0,0)}^{(1,1)} \varphi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \, \mathrm{d}s - \int_{(1,1)}^{(0,1)} \varphi \cdot 0 \, \mathrm{d}s - \int_{(0,1)}^{(0,0)} \varphi \cdot (-1) \, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$= -\int\limits_0^1 \varphi(t,t)\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\,\mathrm{d}t - \int\limits_0^1 \varphi(0,t)\,\mathrm{d}t$$

$$= -\int\limits_0^1 (\varphi(0,t)+\varphi(t,t))\,\mathrm{d}t$$

$$\partial_y \mathbb{1}_T(\varphi) = -\int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_T \partial_y \varphi = -\int\limits_T \partial_y \varphi = -\int\limits_{\partial T} \varphi n_2 \,\mathrm{d}s$$

$$= -\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} \varphi \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}s - \int\limits_{(1,1)}^{(0,1)} \varphi\cdot 1\,\mathrm{d}s - \int\limits_{(0,1)}^{(0,0)} \varphi \cdot 0\,\mathrm{d}s$$

$$= \int\limits_0^1 \varphi(t,t)\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\,\mathrm{d}t + \int\limits_0^1 \varphi(t,0)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_0^1 (\varphi(t,0)+\varphi(t,t))\,\mathrm{d}t$$

Poglavlje 2

Fiksna točka, kontrakcije

2.1 Banachov teorem o fiksnoj točki

Definicija 2.1.1 Neka je X Banachov prostor i $f : X \to X$ funkcija. Ako za $x_f \in X$ vrijedi $f(x_f) = x_f$, x_f nazivamo *fiksna točka*.

Definicija 2.1.2 Neka je X Banachov prostor. Kažemo da je $f : X \to X$ *Lipschitzova* funkcija ako postoji $L > 0$ tako da je $\|f(x) - f(y)\| \leqslant L\|x - y\|$, za sve $x, y \in X$. Još kažemo da je f

- *neekspanzivna* ako je $L = 1$,
- *kontrakcija* ako je $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$, za sve $x, y \in X$, $x \neq y$,
- $\varkappa$*-kontrakcija* ako je $L = \varkappa < 1$.

Teorem 2.1.3 (Banachov teorem o fiksnoj točki / Princip kontrakcije) Neka je X Banachov prostor, $Y \subseteq X$ zatvoren podskup i $f : Y \to Y$ $\varkappa$-kontrakcija. Tada f ima točno jednu fiksnu točku x_f.

Dokaz. Odaberimo neki $x_0 \in Y$ i rekurzivno definirajmo niz (x_n) s $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Vidimo da je $x_n \in Y$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Uočimo da je za $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m > n$,

$$\begin{aligned}\|x_m - x_n\| &\leqslant \|x_m - x_{m-1}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant (\varkappa^{m-1} + \cdots + \varkappa^n)\|x_1 - x_0\| \\ &< \varkappa^n(1 + \varkappa + \varkappa^2 + \cdots)\|x_1 - x_0\| = \frac{\varkappa^n}{1 - \varkappa}\|x_1 - x_0\|,\end{aligned}$$

iz čega vidimo da je (x_n) Cauchyjev niz. Kako je X potpun, a Y zatvoren podskup od X, slijedi da je i Y potpun. Dakle, $x_n \to x_f \in Y$. Koristeći rekurzivnu relaciju dobivamo

$$f(x_f) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_f,$$

tj. x_f je fiksna točka od f.

Neka je x'_f također fiksna točka od f. Tada je

$$\|f(x_f) - f(x'_f)\| \leqslant \varkappa\|x_f - x'_f\|$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \|x_f - x'_f\| \leqslant \varkappa \|x_f - x'_f\| \\
&\Rightarrow \quad (1-\varkappa)\|x_f - x'_f\| \leqslant 0 \\
&\Rightarrow \quad \|x_f - x'_f\| \leqslant 0 \\
&\Rightarrow \quad \|x_f - x'_f\| = 0 \\
&\Rightarrow \quad x_f = x'_f.
\end{aligned}$$

Dakle, x_f je jedinstvena fiksna točka. ■

Napomena 2.1.4 Iz dokaza Banachovog teorema o fiksnoj točki smo dobili da za proizvoljne $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, vrijedi

$$\|x_m - x_n\| < \frac{\varkappa^n}{1-\varkappa}\|x_1 - x_0\|.$$

Puštanjem $m \to \infty$ slijedi

$$\|x_f - x_n\| \leqslant \frac{\varkappa^n}{1-\varkappa}\|x_1 - x_0\|,$$

što zovemo *apriorna ocjena.* Obrazloženje tog naziva je taj da, u nekoj numeričkoj metodi koja se temelji na Banachovom teoremu o fiksnoj točki, ako zadamo neki x_0 i izračunamo $x_1 = f(x_0)$, kako bi postigli $\|x_f - x_n\| < \varepsilon$ za neki $n \in \mathbb{N}$, dovoljno je tražiti

$$\frac{\varkappa^n}{1-\varkappa}\|x_1 - x_0\| < \varepsilon,$$

tj.

$$n > \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-\varkappa)}{\|x_1 - x_0\|}}{\ln \varkappa}.$$

Iz toga je jasno da su brže metode kod kojih je $\varkappa$ manji.

Uočimo da za proizvoljne $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\|x_{n+m+1} - x_{n+1}\| &\leqslant \|x_{n+m+1} - x_{n+m}\| + \cdots + \|x_{n+2} - x_{n+1}\| \\
&= \|f(x_{n+m}) - f(x_{n+m-1})\| + \cdots + \|f(x_{n+1}) - f(x_n)\| \\
&\leqslant \varkappa(\|x_{n+m} - x_{n+m-1}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\|) \\
&\leqslant \varkappa\|x_{n+1} - x_n\|(1 + \varkappa + \varkappa^2 + \cdots + \varkappa^{m-1}) \\
&< \varkappa\|x_{n+1} - x_n\|(1 + \varkappa + \varkappa^2 + \cdots) \\
&= \frac{\varkappa}{1-\varkappa}\|x_{n+1} - x_n\|.
\end{aligned}$$

Puštanjem $m \to \infty$ dobivamo

$$\|x_f - x_{n+1}\| < \frac{\varkappa}{1-\varkappa}\|x_{n+1} - x_n\|,$$

što zovemo *aposteriorna ocjena.* Tako se u nekoj numeričkoj metodi može u svakom koraku provjeriti je li postignuta tražena preciznost.

Korolar 2.1.5 Neka je P normiran prostor (prostor parametara), X Banachov prostor, $\varkappa \in \langle 0,1\rangle$. Neka je za svaki $p \in P$ je $f_p : X \to X$ $\varkappa$-kontrakcija tako da za svaki $p_0 \in P$ vrijedi

$$\lim_{p \to p_0} f_p(x) = f_{p_0}(x),\ x \in X.$$

Tada

- za svaki $p \in P$ jednadžba $f_p(x) = x$ ima točno jedno rješenje x_p,
- za svaki $p_0 \in P$ je
$$\lim_{p \to p_0} x_p = x_{p_0}.$$

Dokaz. Prva tvrdnja je direktna posljedica Banachovog teorema o fiksnoj točki.

Neka su $p, p_0 \in P$ proizvoljni. Tada je

$$\begin{aligned}\|x_p - x_{p_0}\| &= \|f_p(x_p) - f_{p_0}(x_{p_0})\| \leqslant \|f_p(x_p) - f_p(x_{p_0})\| + \|f_p(x_{p_0}) - f_{p_0}(x_{p_0})\| \\ &\leqslant \varkappa\|x_p - x_{p_0}\| + \|f_p(x_{p_0}) - f_{p_0}(x_{p_0})\|,\end{aligned}$$

tj.

$$\|x_p - x_{p_0}\| \leqslant \frac{1}{1-\varkappa}\|f_p(x_{p_0}) - f_{p_0}(x_{p_0})\|.$$

Iz pretpostavke Korolara slijedi druga tvrdnja. ∎

Primjer 2.1.6 Integralne jednadžbe

Nađi $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ tako da

$$f(x) - \int_\alpha^\beta K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y = g(x),\ x \in [\alpha, \beta] \tag{IJ}$$

gdje je $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ i $K : [\alpha,\beta] \times [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$. Ovo je Fredholmova integralna jednadžba druge vrste. Vidimo da je

$$f(x) = \underbrace{\int_\alpha^\beta K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y + g(x)}_{Tf(x)},\ x \in [\alpha, \beta]$$

pa smo tako sveli problem na problem nalaženja fiksne točke preslikavanja T. Pretpostavimo da je $g \in C([\alpha,\beta])$, $K \in C([\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta])$. Tražimo rješenje $f \in C([\alpha,\beta])$. Jasno je da za svaki $f \in C([\alpha,\beta])$ vrijedi $Tf \in C([\alpha,\beta])$. Je li T $\varkappa$-kontrakcija? Dokažimo da ako je

$$\sup_{x \in [\alpha,\beta]} \int_\alpha^\beta |K(x,y)|\,\mathrm{d}y < 1,$$

onda je T $\varkappa$-kontrakcija. Neka su $f_1, f_2 \in C([\alpha,\beta])$ proizvoljni. Tada je

$$\|Tf_1 - Tf_2\|_\infty = \sup_{x \in [\alpha,\beta]} \left| \int_\alpha^\beta K(x,y) f_1(y)\,\mathrm{d}y - \int_\alpha^\beta K(x,y) f_2(y)\,\mathrm{d}y \right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{x\in[\alpha,\beta]} \left| \int_\alpha^\beta K(x,y)(f_1(y)-f_2(y))\,\mathrm{d}y \right| \\
&\leqslant \sup_{x\in[\alpha,\beta]} \int_\alpha^\beta |K(x,y)||f_1(y)-f_2(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \|f_1-f_2\|_\infty \sup_{x\in[\alpha,\beta]} \int_\alpha^\beta |K(x,y)|\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Dakle, za

$$
\varkappa = \sup_{x\in[\alpha,\beta]} \int_\alpha^\beta |K(x,y)|\,\mathrm{d}y
$$

je T $\varkappa$-kontrakcija.

Primjer 2.1.7 Rubni problem za ODJ.

Nađi $u : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$
\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), \ x \in \langle 0,1\rangle \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{RP}
$$

gdje su $f, q \in C([0,1])$.

Promotrimo prvo problem

$$
\begin{cases} -v'' = f \ \text{na} \ \langle 0,1\rangle \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases} \tag{P}
$$

Problem (P) ima točno jedno rješenje $v \in C^2([0,1])$ dano s

$$
v(x) = \int_0^1 G(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y,
$$

gdje je $G : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ definirana s

$$
G(x,y) = \begin{cases} x(1-y), & 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1 \\ y(1-x), & 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}.
$$

Dokažimo to. Iz ODJ u (P) integriranjem slijedi

$$
v'(t) = C_1 - \int_0^t f(y)\,\mathrm{d}y.
$$

Ponovnim integriranjem i zamjenom varijabli slijedi

$$
v(x) = C_1 x + C_2 - \int_0^x \int_0^t f(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = [0 \leqslant y \leqslant t \leqslant x] = C_1 x + C_2 - \int_0^x \int_y^x f(y)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y
$$

$$= C_1 x + C_2 - \int_0^x (x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

Vidimo da je

$$0 = v(0) = C_2$$

i

$$0 = v(1) = C_1 - \int_0^1 (1-y)f(y)\,\mathrm{d}y \;\Rightarrow\; C_1 = \int_0^1 (1-y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
v(x) &= x\int_0^1 (1-y)f(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^x (x-y)f(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^x (x - xy - x + y)f(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^1 x(1-y)f(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^x y(1-x)f(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^1 x(1-y)f(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 G(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Uočimo da zamjenom $f \to f - qu$ (i $v \to u$) u (P) dobivamo (RP). Stoga je

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y)(f(y) - q(y)u(y))\,\mathrm{d}y = \int_0^1 G(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^1 G(x,y)q(y)u(y)\,\mathrm{d}y.$$

Definirajmo $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ s

$$g(x) = \int_0^1 G(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

i $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ s

$$K(x,y) = -G(x,y)q(y).$$

Vidimo da smo tako problem (RP) sveli na (IJ) za koji znamo dovoljni uvjet za konvergenciju rješenju. Uočimo

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |K(x,y)|\,\mathrm{d}y &= \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 G(x,y)|q(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \|q\|_\infty \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 G(x,y)\,\mathrm{d}y \\
&= \|q\|_\infty \sup_{x\in[0,1]} \frac{x-x^2}{2} = \frac{1}{8}\|q\|_\infty,
\end{aligned}$$

pa ako je $\|q\|_\infty < 8$, onda će metoda konvergirati jedinstvenom rješenju.

Zadatak 2.1.8 Naći $u : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ tako da je

$$\int_{\alpha}^{\beta} K(x, y)u(y)\,\mathrm{d}y = g(x),\ x \in [\alpha, \beta]$$

za zadane $K : [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ i $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$.

Zadatak 2.1.9 (Linearna Volterrina jednadžba) Naći $u : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ tako da je

$$u(t) = \mu \int_{\alpha}^{t} K(t, s)u(s)\,\mathrm{d}s + g(t),\ t \in [\alpha, \beta]$$

za zadane $\mu \in \mathbb{R}$, $K : [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ i $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Kada će postojati jedinstveno rješenje?

Zadatak 2.1.10 Neka je (u_n) niz zadan s

$$u_{n+1} = 4\mu u_n(1 - u_n),\ \mu \in [0, 1],\ u_0 \in [0, 1].$$

Dokažite da je $u_n \in [0, 1]$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Definirajmo $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ s $f(u) = 4\mu u(1 - u)$. Dokažite je za

- $\mu \in [0, \frac{1}{4}]$ f $\varkappa$-kontrakcija,
- $\mu \in \langle \frac{1}{4}, 1\rangle$ f kontrakcija,
- $\mu = 1$ f neekspanzivna.

U prvom slučaju odredite $\lim\limits_{n} u_n$.

Poglavlje 3

Diferencijalni i integralni račun

3.1 Derivacija

Neka je $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \mathbb{R}$, X Banachov prostor i $f : \langle \alpha, \beta \rangle \to X$. Želimo definirati $f'(x)$ za $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Uočimo da je za $h \neq 0$, $x + h \in \langle \alpha, \beta \rangle$, definiran izraz

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

iz klasične definicije derivacije. Stoga sljedeća definicija ima smisla.

Definicija 3.1.1 Definiramo

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ako postoji pripadni limes. Pišemo $u \in C^1(\langle \alpha, \beta \rangle; X)$ ako je u neprekidno derivabilna u svakoj točki iz $\langle \alpha, \beta \rangle$.

3.2 Integral

Neka je $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, X Banachov prostor i $f : [\alpha, \beta] \to X$.

Definicija 3.2.1 Kažemo da je f *stepenasta* ako postoji subdivizija $\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \beta$ i $c_1, \ldots, c_n \in X$ takvi da je $f|_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} = c_i$, $i = 1, \ldots, n$. Skup svih stepenastih funkcija $f : [\alpha, \beta] \to X$ označavamo sa $\mathcal{S}([\alpha, \beta])$. Za $f \in \mathcal{S}([\alpha, \beta])$ s prikazom kao gore definiramo integral $I(f) \in X$ s

$$I(f) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) c_i.$$

Može se pokazati da $I(f)$ ne ovisi o odabiru reprezentacije stepenaste funkcije.

Uočimo da je $f \in \mathcal{S}$ ograničena i $\|f\|_\infty = \max\{\|c_1\|, \ldots, \|c_n\|\}$. Prostor svih ograničenih funkcija s $[\alpha, \beta]$ u X označavamo s $B([\alpha, \beta])$. Vidimo da je $\mathcal{S}$ potprostor od B.

Definirali smo preslikavanje $I : \mathcal{S} \to X$. Lako se vidi da je I linearan operator. Primijetimo da je za svaki $f \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}\|I(f)\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})c_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\|c_i\| \leqslant \|f\|\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\\ &= (\beta - \alpha)\|f\|,\end{aligned}$$

pa je I ograničen i $\|I\| \leqslant \beta - \alpha$. Gore vrijede jednakosti ako je f konstantna, pa je onda jasno da je $\|I\| = \beta - \alpha$.

Uočimo da $\mathcal{S}$ nije zatvoren, pa $\mathcal{S} \subset \overline{\mathcal{S}}$. Npr. za $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) = \frac{1}{2^{n-1}}$, $x \in \langle \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}} \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, vrijedi $f \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \mathcal{S}$. Stoga I možemo proširiti na jedinstven način na $\overline{\mathcal{S}}$ tako da dobijemo $I : \overline{\mathcal{S}} \to X$ koji je linearan, ograničen i $\|I\| = \beta - \alpha$, što onda zovemo *Riemannov integral*.

Je li $\overline{\mathcal{S}} = B$? Nije, jer $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \in B \setminus \overline{\mathcal{S}}$. Ipak, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.2.2 $C([\alpha, \beta]; X) \subseteq \overline{\mathcal{S}}([\alpha, \beta])$

Dokaz. Neka je $f \in C([\alpha, \beta]; X)$ proizvoljna. Definiramo niz (f_n) u $\mathcal{S}$ s $f_n|_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} = f(x_{i-1})$, $i = 1, \ldots, n$, gdje je $x_i = \alpha + i\frac{\beta - \alpha}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Funkcija f je neprekidna na kompaktnom skupu, pa je po Teoremu 1.1.20 i uniformno neprekidna. Slijedi da postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in [\alpha, \beta]$, $|x - y| < \delta$, vrijedi $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. Neka je $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{\beta - \alpha}{n_\varepsilon} < \delta$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_\varepsilon$, vrijedi $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$. Dakle, $f_n \to f$. ■

Može se pokazati da je $f \in \overline{\mathcal{S}}$ ako i samo ako u svakoj točki ima jednostrane limese.

Cilj nam je dokazati Newton-Leibnizovu formulu u ovom okruženju.

Definicija 3.2.3 Kažemo da je $F : \langle \alpha, \beta \rangle \to X$ *primitivna funkcija* funkcije $f : \langle \alpha, \beta \rangle \to X$ ako je $F'(x) = f(x)$, za svaki $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$.

Teorem 3.2.4 (Newton-Leibniz) Neka je $f \in C([\alpha, \beta]; X)$. Tada f ima primitivnu funkciju $F : [\alpha, \beta] \to X$ i vrijedi

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x = F(\beta) - F(\alpha).$$

Dokaz. Definiramo $F : [\alpha, \beta] \to X$ s

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Neka je $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$ proizvoljan. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Jer f neprekidna u x, postoji $\delta > 0$ tako da je za svaki $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, $|t - x| < \delta$ vrijedi $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$. Sad za svaki $|h| < \delta$, $x + h \in \langle \alpha, \beta \rangle$ vrijedi

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}(f(t) - f(x))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{|h|}\left|\int_{x}^{x+h}|f(t) - f(x)|\,\mathrm{d}t\right|$$

$$< \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} \varepsilon \,\mathrm{d}t \right| = \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon.$$

Dakle,

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x),$$

pa je F derivabilna u x i $F'(x) = f(x)$, što znači da je F primitivna funkcija od f.

Neka je G proizvoljna primitivna funkcija od f. Tada je

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

pa postoji konstanta $C \in X$ takva da je $G(x) = F(x) + C$ (tvrdnja će biti pokazana kasnije). Slijedi da je

$$G(\beta) - G(\alpha) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(x) \,\mathrm{d}x,$$

što je i trebalo pokazati. ■

3.3 Derivacija u Banachovim prostorima

Definicija 3.3.1 Neka su X i Y Banachovi prostori, $U \subseteq X$ otvoren podskup i $f : U \to Y$ funkcija. Kažemo da je f *(Fréchet) derivabilna* u $x_0 \in U$ ako postoji $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ takav da je

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah\|}{\|h\|} = 0$$

i označujemo $f'(x_0) = A$. Kažemo da je f *derivabilna na otvorenom skupu* $V \subseteq U$ ako je derivabilna u svakoj točki iz V. Ako je $' : V \to \mathbb{B}(X, Y)$ neprekidno preslikavanje, kažemo da je f *neprekidno derivabilna* na V.

Uvodimo "malo o" notaciju.

Definicija 3.3.2 Neka su X i Y Banachovi prostori, $O \subseteq X$ otvorena okolina nule, $r : O \to Y$ funkcija i $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da je r *klase* $o(h^n)$, i koristimo oznaku $r(h) = o(h^n)$, ako

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|^n} = 0.$$

Tako možemo pisati $f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah = o(h)$ ako je $f'(x_0) = A$.

Primjer 3.3.3 Neka je $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ i $x_0 \in X$. Vrijedi $A(x_0 + h) - A(x_0) = Ah$, pa je $A'(x_0) = A$.

Primjer 3.3.4 Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tada $f'(x_0)$ je operator množenja s $f'(x_0)$.

Teorem 3.3.5 Neka su X i Y Banachovi prostori, $U \subseteq X$ otvoren podskup i $f : U \to Y$ funkcija derivabilna u $x_0 \in U$. Tada je linearni operator iz definicije derivacije jedinstven.

Dokaz. Neka su $A_1, A_2 \in \mathbb{B}(X,Y)$ takvi da je

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - A_i h\|}{\|h\|} = 0,\ i = 1,2.$$

Neka je $e \in X$ proizvoljan jedinični vektor. Tada za svaki $h \in \operatorname{span}\{e\} \setminus \{0\}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\|A_1 e - A_2 e\| &= \left\| A_1 \frac{h}{\|h\|} - A_2 \frac{h}{\|h\|} \right\| \\
&= \left\| \frac{-f(x_0+h) + f(x_0) + A_1 h}{\|h\|} + \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - A_2 h}{\|h\|} \right\| \\
&\leqslant \left\| \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - A_1 h}{\|h\|} \right\| + \left\| \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - A_2 h}{\|h\|} \right\| \\
&= \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - A_1 h\|}{\|h\|} + \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - A_2 h\|}{\|h\|},
\end{aligned}$$

iz čega slijedi da je $A_1 e = A_2 e$. Sada slijedi da je $A_1 x = A_2 x$, za svaki $x \in X$. ■

Teorem 3.3.6 Neka su X i Y Banachovi prostori, $U \subseteq X$ otvoren podskup i $x_0 \in U$ točka. Tada je skup svih funkcija $f : U \to Y$ koja su derivabilne u x_0 vektorski prostor sa standardnim operacijama zbrajanja funkcija i množenja funkcija skalarom. Operator deriviranja je linearan.

Dokaz. Slijedi primjenom definicije i jedinstvenosti derivacije. ■

Teorem 3.3.7 Neka su X i Y Banachovi prostori, $U \subseteq X$ otvoren podskup i $f : U \to Y$ funkcija derivabilna u $x_0 \in U$. Tada je f neprekidna u x_0.

Dokaz. Vrijedi

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0} (f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)) = f(x_0)$$

jer je $f'(x_0)$ neprekidno. Dakle, f je neprekidna u x_0. ■

Teorem 3.3.8 Neka su X, Y i Z Banachovi prostori, $U \subseteq X$ i $V \subseteq Y$ otvoreni skupovi, $f : U \to V$ derivabilna u $x_0 \in U$ i $g : V \to Z$ derivabilna u $f(x_0) \in V$. Tada je i $g \circ f : U \to Z$ derivabilna u x_0 i $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

Dokaz. Primijetimo da je $f'(x_0) \in \mathbb{B}(X,Y)$ i $g'(f(x_0)) \in \mathbb{B}(Y,Z)$, pa ih možemo komponirati i vrijedi $g'(f(x_0))f'(x_0) \in \mathbb{B}(X,Z)$. Preostaje dokazati da je to doista derivacija od $g \circ f$ u x_0. Vrijedi $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + p(h)$, gdje je $p(h) = o(h)$. Označimo $\tilde{h} = f'(x_0)h + p(h)$. Tada je

$$\begin{aligned}
g(f(x_0+h)) &= g(f(x_0) + \tilde{h}) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))\tilde{h} + \tilde{r}(\tilde{h}) \\
&= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))f'(x_0)h + g'(f(x_0))p(h) + \tilde{r}(\tilde{h}),
\end{aligned}$$

gdje je $\tilde{r}(\tilde{h}) = o(\tilde{h})$. Potrebno je dokazati da je $g'(f(x_0))p(h) + \tilde{r}(\tilde{h}) = o(h)$. Vidimo da je

$$\frac{\|g'(f(x_0))p(h)\|}{\|h\|} \leqslant \|g'(f(x_0))\| \frac{\|p(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

i

$$\begin{aligned}
\frac{\|\tilde{r}(\tilde{h})\|}{\|h\|} &= \frac{\|\tilde{r}(\tilde{h})\|}{\|\tilde{h}\|} \cdot \frac{\|\tilde{h}\|}{\|h\|} = \frac{\|\tilde{r}(\tilde{h})\|}{\|\tilde{h}\|} \cdot \frac{\|f'(x_0)h + p(h)\|}{\|h\|} \\
&\leqslant \frac{\|\tilde{r}(\tilde{h})\|}{\|\tilde{h}\|} \cdot \frac{\|f'(x_0)\|\|h\| + \|p(h)\|}{\|h\|} \\
&= \frac{\|\tilde{r}(\tilde{h})\|}{\|\tilde{h}\|} \left(\|f'(x_0)\| + \frac{\|p(h)\|}{\|h\|} \right) \xrightarrow[h\to 0]{} 0,
\end{aligned}$$

čime je dokaz gotov. ■

Teorem 3.3.9 Neka je X Banachov prostor i $f \in C^1(\langle \alpha, \beta \rangle; X)$ takva da je $f' = 0$ na $\langle \alpha, \beta \rangle$. Tada je f konstantna.

Dokaz. Neka je $L \in X'$ proizvoljan. Definirajmo $f_L : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{R}$ sa $f_L(x) = L(f(x))$. Tada je $f_L'(x) = (L \circ f)'(x) = L'(f(x))f'(x) = L(f'(x)) = 0$, pa je f_L konstantna. Slijedi da je $0 = f_L(x) - f_L(y) = L(f(x)) - L(f(y)) = L(f(x) - f(y))$, za sve $x, y \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Kako je L bio proizvoljan, slijedi (iz Korolara Hahn-Banachovog teorema) da je $f(x) = f(y)$, za sve $x, y \in \langle \alpha, \beta \rangle$, tj. f je konstantna. ■

Zadatak 3.3.10 Neka je X Hilbertov prostor i $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $f(x) = \frac{1}{2} x \cdot x$. Odredite $f'(x_0)$.

Rješenje: Za $h \neq 0$ vrijedi

$$\begin{aligned}
f(x_0 + h) &= \frac{1}{2}(x_0 + h) \cdot (x_0 + h) = \frac{1}{2} x_0 \cdot x_0 + x_0 \cdot h + \frac{1}{2} h \cdot h \\
&= f(x_0) + x_0 \cdot h + \frac{1}{2} h \cdot h.
\end{aligned}$$

Definirajmo $Ah = x_0 \cdot h$. Očito je $A \in \mathbb{B}(X, \mathbb{R})$. Vidimo da je

$$\lim_{h \to 0} \frac{|\frac{1}{2} h \cdot h|}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}\|h\|^2}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2}\|h\| = 0.$$

Dakle, $f'(x_0) = A$.

Zadatak 3.3.11 $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ je Hilbertov prostor s skalarnim produktom

$$(u, v)_{H^1} = \int\limits_{\Omega} (uv + \nabla u \cdot \nabla v).$$

Norma inducirana tim skalarnim produktom je

$$\|u\|_{H^1} = \sqrt{\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{n} \|\partial_i u\|_{L^2}^2}.$$

Rješenje: Pokazali smo da je H^1 potpun (inducirana norma je ekvivalentna normi koju smo definirali). Da je unitaran, pokaže se iz definicije.

Primjer 3.3.12 Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lipschitzova domena. Definiramo $f : H^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ s $f(u) = \frac{1}{2}\nabla u \cdot \nabla u + \frac{1}{2}u^2$. Kako za $u \in H^1(\Omega)$ vrijedi $u, \partial_i u \in L^2(\Omega)$, pa je po Hölderovoj nejednakosti $u^2, (\partial_i u)^2 \in L^1(\Omega)$. Stoga je doista $f(u) \in L^1(\Omega)$. Za $u_0, h \in H^1(\Omega)$ vrijedi

$$\begin{aligned} f(u_0+h) &= \frac{1}{2}\nabla(u_0+h)\cdot\nabla(u_0+h) + \frac{1}{2}(u_0+h)^2 \\ &= \frac{1}{2}\nabla u_0\cdot\nabla u_0 + \nabla u_0\cdot\nabla h + \frac{1}{2}\nabla h\cdot\nabla h + \frac{1}{2}u_0^2 + u_0 h + \frac{1}{2}h^2 \\ &= f(u) + \nabla u_0\cdot\nabla h + u_0 h + \frac{1}{2}\nabla h\cdot\nabla h + \frac{1}{2}h^2 \end{aligned}$$

Definirajmo $A : H^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ s $Ah = \nabla u_0 \cdot \nabla h + u_0 h$. Lako se vidi da je A linearan operator. Vidimo da je

$$\begin{aligned} \|Ah\|_{L^1} &= \|\nabla u_0\cdot\nabla h + u_0 h\|_{L^1} \leqslant \|u_0 h\|_{L^1} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u_0\cdot\partial_i h\|_{L^1} \\ &\leqslant \|u_0\|_{L^2}\|h\|_{L^2} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u_0\|_{L^2}\|\partial_i h\|_{L^2} \\ &\leqslant \sqrt{\|u_0\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u_0\|_{L^2}^2}\cdot\sqrt{\|h\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \|\partial_i h\|_{L^2}^2} \\ &= \|u_0\|_{H^1}\|h\|_{H^1}, \end{aligned}$$

pa je A i ograničen (korištena je nejednakost trokuta, Hölderova nejednakost i CSB nejednakost u $\mathbb{R}^{n+1}$). Preostaje vidjeti da je $\frac{1}{2}\nabla h\cdot\nabla h + \frac{1}{2}h^2 = o(h)$. Uočimo

$$\begin{aligned} \frac{\left\|\frac{1}{2}\nabla h\cdot\nabla h + \frac{1}{2}h^2\right\|_{L^1}}{\|h\|_{H^1}} &\leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{\|h^2\|_{L^1} + \sum_{i=1}^n \|(\partial_i h)^2\|_{L^1}}{\|h\|_{H^1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\|h\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \|\partial_i h\|_{L^2}^2}{\|h\|_{H^1}} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\|h\|_{H^1}^2}{\|h\|_{H^1}} = \frac{1}{2}\|h\|_{H^1}, \end{aligned}$$

iz čega slijedi traženo. Dakle, $f'(u_0) = A$.

Primjer 3.3.13 Neka je H Hilbertov prostor i funkcija $f : H \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) = \|x\|$. Odredimo $f'(x)$ za $x \neq 0$. Vidimo da je

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \|x+h\| - \|x\| = \frac{\|x+h\|^2 - \|x\|^2}{\|x+h\| + \|x\|} \\ &= \frac{\|x\|^2 + 2x\cdot h + \|h\|^2 - \|x\|^2}{\|x+h\| + \|x\|} = \frac{2x\cdot h + \|h\|^2}{\|x+h\| + \|x\|} \\ &= \frac{x\cdot h}{\|x\|}\cdot\frac{2\|x\|}{\|x+h\| + \|x\|} + \frac{\|h\|^2}{\|x+h\| + \|x\|} \end{aligned}$$

$$= \frac{x}{\|x\|} \cdot h + \frac{x \cdot h}{\|x\|} \left(\frac{2\|x\|}{\|x+h\| + \|x\|} - 1 \right) + \frac{\|h\|^2}{\|x+h\| + \|x\|}.$$

Očito je $h \mapsto \frac{x}{\|x\|} \cdot h$ ograničen linearni operator i da je ostatak $o(h)$.

Pokažimo da f nije derivabilna u 0. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $f'(0) \in \mathbb{B}(H, \mathbb{R}) = H'$. Po Rieszovom teoremu o reprezentaciji postoji jedinstveni $a \in H$ takav da je $f'(0)h = a \cdot h$, za sve $h \in H$. Vidimo da je

$$\frac{|\|0+h\| - \|0\| - f'(0)h|}{\|h\|} = \frac{|\|h\| - a \cdot h|}{\|h\|} = \left| 1 - a \cdot \frac{h}{\|h\|} \right|,$$

što nema limes jednak 0. Naime, ako $a = 0$, limes postoji, ali je različit od 0. Ako je $a \neq 0$, moralo bi vrijediti $a \cdot e = 1$, za svaki jedinični vektor e, što je nemoguće (iz $a \cdot e = 1$ slijedi $a \cdot (-e) = -1$, a $\|-e\| = 1$). Dakle, f doista nije derivabilna u 0.

Zadatak 3.3.14 Neka je $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, $g : [\alpha, \beta] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna i derivabilna po drugoj varijabli s uniformno neprekidnom derivacijom, te $K \in C([\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta])$. Definiramo

$$F(u)(y) = \int_\alpha^\beta K(x,y)\, g(x, u(x))\, \mathrm{d}x, \ \ y \in [\alpha, \beta], u \in C([\alpha, \beta]).$$

Pokažite:

- $F : C([\alpha, \beta]) \to C([\alpha, \beta])$,
- F je derivabilna,
- $(F'(u)h)(y) = \int_\alpha^\beta K(x,y)\, \partial_y g(x, u(x))\, h(x)\, \mathrm{d}x, \ \ y \in [\alpha, \beta]$.

Rješenje: Vrijedi (za fiksni $u \in C([\alpha, \beta])$)

$$\begin{aligned} |F(u)(y_1) - F(u)(y_2)| &= \left| \int_\alpha^\beta [K(x,y_1) - K(x,y_2)] g(x, u(x))\, \mathrm{d}x \right| \\ &\leqslant \int_\alpha^\beta |K(x,y_1) - K(x,y_2)| |g(x,u(x))|\, \mathrm{d}x \\ &\leqslant \max_{x \in [a,b]} |g(x,u(x))| \int_\alpha^\beta |K(x,y_1) - K(x,y_2)|\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

pa je $F(u) \in C([\alpha, \beta])$ (K je uniformno neprekidna jer je definirana na kompaktnom skupu). Operator $F'(u)$ definiran u zadatku je očito linearan. Vidimo da je

$$\|F'(u)h\|_\infty = \max_{y \in [\alpha, \beta]} |(F'(u)h)(y)| = \max_{y \in [\alpha, \beta]} \left| \int_\alpha^\beta K(x,y)\, \partial_y g(x, u(x))\, h(x)\, \mathrm{d}x \right|$$

$$\leqslant \max_{y\in[\alpha,\beta]} \int_\alpha^\beta |K(x,y)|\;|\partial_y g(x,u(x))|\,|h(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left(\max_{y\in[\alpha,\beta]} \int_\alpha^\beta |K(x,y)|\;|\partial_y g(x,u(x))|\,\mathrm{d}x\right)\|h\|_\infty,$$

pa je $F'(u) \in \mathbb{B}(C([\alpha,\beta]))$.

$$\frac{\|F(u+h)-F(u)-F'(u)h\|_\infty}{\|h\|_\infty}$$

$$= \frac{1}{\|h\|_\infty}\max_{y\in[\alpha,\beta]}\left|\int_\alpha^\beta K(x,y)\,(g(x,u(x)+h(x))-g(x,u(x))-\partial_y g(x,u(x))\,h(x))\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\|h\|_\infty}\max_{y\in[\alpha,\beta]}\int_\alpha^\beta |K(x,y)|\,|g(x,u(x)+h(x))-g(x,u(x))-\partial_y g(x,u(x))\,h(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\|h\|_\infty}\max_{y\in[\alpha,\beta]}\int_\alpha^\beta |K(x,y)|\left|\partial_y g\Big(x,u(x)+\tilde{h}(x)\Big)\,h(x)-\partial_y g(x,u(x))\,h(x)\right|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \max_{y\in[\alpha,\beta]}\int_\alpha^\beta |K(x,y)|\left|\partial_y g\Big(x,u(x)+\tilde{h}(x)\Big)-\partial_y g(x,u(x))\right|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \|K\|_\infty\int_\alpha^\beta \left|\partial_y g\Big(x,u(x)+\tilde{h}(x)\Big)-\partial_y g(x,u(x))\right|\mathrm{d}x,$$

pa iz uniforme neprekidnosti parcijalne derivacije od g po drugoj varijabli slijedi

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|F(u+h)-F(u)-F'(u)h\|_\infty}{\|h\|_\infty} = 0,$$

što znači da je F derivabilna u u i derivacija je $F'(u)$.

Sad dokazujemo verziju Lagrangeovog teorema.

Teorem 3.3.15 Neka su X i Y Banachovi prostori, $U \subseteq X$ otvoren, $a,b\in U$ takvi da je $[a,b]=\{(1-\lambda)a+\lambda b : \lambda\in[0,1]\}\subseteq U$ i $f:U\to Y$ derivabilna na U. Tada je

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant \|b-a\|\cdot\sup_{c\in[a,b]}\|f'(c)\|.$$

Dokaz. Definirajmo $\varphi:[0,1]\to Y$ s $\varphi(\lambda)=f((1-\lambda)a+\lambda b)$. Vidimo da je

$$\varphi'(\lambda)=f'((1-\lambda)a+\lambda b)(b-a).$$

Neka je $L\in Y'$ proizvoljan. Definirajmo $\psi:[0,1]\to\mathbb{R}$ sa $\psi(\lambda)=L(\varphi(\lambda))$. To je derivabilna funkcija kao kompozicija dvije derivabilne funkcije. Po Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti slijedi da postoji $\lambda_L \in \langle \alpha, \beta \rangle$ takav da je $\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\lambda_L)$. Iz definicije od φ i ψ slijedi

$$\begin{aligned} L(\varphi(1)) - L(\varphi(0)) &= L(f(b)) - L(f(a)) = L(\varphi'(\lambda_L)) \\ &= L(f'((1-\lambda_L)a + \lambda_L b)(b-a)) = L(f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Odaberimo L takav da je $L(f(b) - f(a)) = \|f(b) - f(a)\|$ i $\|L\| = 1$ (što možemo po Korolaru Hahn-Banachovog teorema). Slijedi

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\| &= |L(f(b) - f(a))| = |L(f'((1-\lambda_L)a + \lambda_L b)(b-a))| \\ &\leqslant \|L\| \|f'((1-\lambda_L)a + \lambda_L b)(b-a)\| \leqslant \|f'((1-\lambda_L)a + \lambda_L b)\| \|b-a\| \\ &\leqslant \|b-a\| \cdot \sup_{c \in [a,b]} \|f'(c)\|. \end{aligned}$$

■

Definicija 3.3.16 Neka su X i Y Banachovi prostori, $U \subseteq X$ otvoren podskup i $x_0 \in U$ točka. Ako postoji limes

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda h) - f(x_0)}{\lambda},$$

označavamo ga s $f'_h(x_0)$ i zovemo *(Gâteauxova) derivacija funkcije f u točki x_0 u smjeru h.*

Teorem 3.3.17 Neka su X i Y Banachovi prostori, $U \subseteq X$ otvoren podskup i $f : U \to Y$ funkcija derivabilna u $x_0 \in U$. Tada $f'_h(x_0)$ postoji za svaki $h \in X$ i vrijedi $f'_h(x_0) = f'(x_0)h$. Posebno je $f'_h(x_0)$ linearan po h.

Dokaz. Neka je $h \in X$ proizvoljan. Tada za svaki $\lambda > 0$ vrijedi $f(x_0 + \lambda h) - f(x_0) = f'(x_0)(\lambda h) + r(\lambda h)$, gdje je $r(\lambda h) = o(\lambda h)$. Slijedi da je

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda h) - f(x_0)}{\lambda} &= \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{\lambda f'(x_0)h + r(\lambda h)}{\lambda} = \lim_{\lambda \searrow 0} \left(f'(x_0)h + \frac{r(\lambda h)}{\lambda} \right) \\ &= f'(x_0)h, \end{aligned}$$

pa $f'_h(x_0)$ postoji i jednak je $f'(x_0)h$. ■

Općenito G-derivabilnost ne povlači F-derivabilnost. Zanima nas uz koje dodatne pretpostavke povlači.

Lema 3.3.18 (Lyusternik, Sobolev) Neka je $\varphi \in C([a,b])$ takva da $\varphi'(t_+)$ (desna derivacija) postoji na $\langle a, b \rangle$. Tada je

$$\inf_{t \in \langle a,b \rangle} \varphi'(t_+) \leqslant \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} \leqslant \sup_{t \in \langle a,b \rangle} \varphi'(t_+).$$

Vrijedi da, ako je $\varphi'(t_+)$ neprekidna, onda je φ derivabilna i $\varphi' \in C(\langle a, b \rangle)$.

Teorem 3.3.19 Neka su X i Y Banachovi prostori, $U \subseteq X$ otvoren podskup, te $x \in U$ i $h \in X$ takvi da je $[x, x+h] \subseteq U$. Ako je $f : U \to Y$ derivabilna u smjeru h na $\langle x, x+h \rangle$, onda je

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leqslant \sup_{y \in \langle x, x+h \rangle} \|f_h'(y)\|.$$

Dokaz. Neka je $L \in Y'$ (zasad) proizvoljan. Definiramo $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ s $\varphi(\lambda) = L(f(x + \lambda h))$. Vidimo da je za $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$

$$\begin{aligned}\varphi'(\lambda_+) &= \lim_{\mu \searrow 0} \frac{\varphi(\lambda+\mu) - \varphi(\lambda)}{\mu} = \lim_{\mu \searrow 0} \frac{L(f(x + \lambda h + \mu h)) - L(f(x+\lambda h))}{\mu} \\ &= L\left(\lim_{\mu \searrow 0} \frac{f(x+\lambda h + \mu h) - f(x + \lambda h)}{\mu} \right) = L(f_h'(x + \lambda h)).\end{aligned}$$

Po Lemi 3.3.18 slijedi da je

$$\varphi(1) - \varphi(0) \leqslant \sup_{\lambda \in \langle 0,1 \rangle} |\varphi'(\lambda_+)|,$$

tj.

$$L(f(x+h) - f(x)) \leqslant \sup_{\lambda \in \langle 0,1 \rangle} |L(f_h'(x + \lambda h))|.$$

Odaberimo L takav da je $\|L\| = 1$ i $L(f(x+h) - f(x)) = \|f(x+h) - f(x)\|$. Dobivamo

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leqslant \sup_{\lambda \in \langle 0,1 \rangle} \|f_h'(x + \lambda h)\| = \sup_{y \in \langle x, x+h \rangle} \|f_h'(y)\|,$$

čime je tvrdnja pokazana. ■

Slijedi osnovni rezultat.

Teorem 3.3.20 Neka su X i Y Banachovi prostori, $U \subseteq X$ otvoren podskup i $f : U \to Y$ neprekidna na U i derivabilna na U u svakom smjeru. Tada je za svaki $x \in U$ preslikavanje $X \ni h \mapsto f_h'(x) \in Y$ linearno. Ako je $U \ni x \mapsto f_h'(x) \in Y$ uniformno neprekidno u odnosu na h, onda je f F-derivabilna na U i vrijedi $f'(x)h = f_h'(x)$.

Dokaz. Neka je $x \in U$ zadan. Neka su $h, k \in X$ i $L \in Y'$ proizvoljni. Definiramo

$$\varphi(\lambda, \mu) = L(f(x + \lambda h + \mu k))$$

na nekoj okolini od $(0,0)$. Parcijalne derivacije od φ postoje i iznose

$$\partial_\lambda \varphi(\lambda, \mu) = L(f_h'(x + \lambda h + \mu k)), \ \partial_\mu \varphi(\lambda, \mu) = L(f_k'(x + \lambda h + \mu k)).$$

Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni i definiramo $\psi(t) = \varphi(\alpha t, \beta t)$. Vrijedi $\psi(t) = L(f(x + t(\alpha h + \beta k)))$. Slijedi

$$L(f_{\alpha h + \beta k}'(x)) = \psi'(0) = \alpha \partial_\lambda \varphi(0,0) + \beta \partial_\mu \varphi(0,0) = \alpha L(f_h'(x)) + \beta L(f_k'(x)).$$

Kako je L linearan, slijedi da je $L(f_{\alpha h + \beta k}'(x) - \alpha f_h'(x) - \beta f_k'(x)) = 0$. No, L je bio proizvoljan, pa je $f_{\alpha h + \beta k}'(x) = \alpha f_h'(x) + \beta f_k'(x)$. Dakle, $h \mapsto f_h'(x)$ je linearno.

Da dokažemo da je f F-derivabilna, dovoljno je za proizvoljan $x \in U$ pokazati da je

$$\|f(x+h) - f(x) - f_h'(x)\| = o(h).$$

Neka je $L \in Y'$ proizvoljan. Definiramo $\chi : [0,1] \to \mathbb{R}$ s $\chi(\lambda) = L(f(x+\lambda h) - f(x) - \lambda f_h'(x))$. Vidimo da je χ neprekidna na $[0,1]$, derivabilna na $\langle 0,1\rangle$ i $\chi'(\lambda) = L(f_h'(x+\lambda h) - f_h'(x))$. Po Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti slijedi da postoji $\tilde{\lambda} \in \langle 0,1\rangle$ takav da je $\chi(1) - \chi(0) = \chi'(\tilde{\lambda})$, tj.

$$L(f(x+h) - f(x) - f_h'(x)) = L(f_h'(x+\tilde{\lambda}h) - f_h'(x)).$$

Izborom takvog L da je $\|L\| = 1$ i

$$L(f(x+h) - f(x) - f_h'(x)) = \|f(x+h) - f(x) - f_h'(x)\|$$

dobivamo

$$\|f(x+h) - f(x) - f_h'(x)\| \leqslant \|f_h'(x+\tilde{\lambda}h) - f_h'(x)\|.$$

Za svaki $x \in U$ definiramo $A_x(h) = f_h'(x)$. Vrijedi $A_x \in \mathbb{B}(X,Y)$ i po pretpostavci je

$$\|A_{x+\Delta x} - A_x\| = \sup_{\|h\|\leqslant 1} \|(A_{x+\Delta x} - A_x)h\| \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0.$$

Dakle,

$$\|f(x+h) - f(x) - f_h'(x)\| \leqslant \|(A_{x+\tilde{\lambda}h} - A_x)h\| \leqslant \|A_{x+\tilde{\lambda}h} - A_x\|\|h\|,$$

što je i trebalo pokazati. ■

Primjer 3.3.21 Neka $K \in C(\mathbb{R} \times [0,1])$ tako da je $K(\cdot,t) \in C^1(\mathbb{R})$, za svaki $t \in [0,1]$. Definiramo $f : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ s

$$f(u) = \int_0^1 K(u(t),t)\,\mathrm{d}t.$$

Odredimo Gâteauxove derivacije od f. Uočimo da je

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \frac{f(u+\lambda h) - f(u)}{\lambda} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(f(u+\lambda h))\bigg|_{\lambda=0}.$$

Stoga je

$$f_h'(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\int_0^1 K(u(t)+\lambda h(t),t)\,\mathrm{d}t\right)\Bigg|_{\lambda=0} = \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}K(u(t)+\lambda h(t),t)\,\mathrm{d}t\right)\Bigg|_{\lambda=0}$$
$$= \int_0^1 \partial_u K(u(t),t)\,h(t)\,\mathrm{d}t.$$

Zamjena poretka derivacije i integrala je opravdana pretpostavkom da je $K(\cdot,t) \in C^1(\mathbb{R})$ (parcijalna derivacija je neprekidna, pa je uniformno neprekidna na nekom kompaktu koji sadrži skup $\{(u(t)+\lambda h(t),t) : t \in [0,1]\}$ i neku njegovu otvorenu okolinu).

Lako se pokaže da je $f_h'(u) \in (C([0,1]))'$.

Definicija 3.3.22 Neka je H Hilbertov prostor, $f : H \to \mathbb{R}$ derivabilna. Za svaki $x \in H$ je $f'(x) \in H'$, pa po Rieszovom teoremu postoji jedinstveni $\nabla f(x) \in H$ takav da je $f'(x)h = \nabla f(x) \cdot h$, za sve $h \in H$. Vektor $\nabla f(x)$ nazivamo *gradijent funkcije f u točki x.*

3.4 Inverzna funkcija

Teorem 3.4.1 Neka su X i Y Banachovi prostori, $f : X \to Y$ neprekidno derivabilna u nekoj okolini točke x_0. Ako $f'(x_0)^{-1}$ postoji i $f'(x_0)^{-1} \in \mathbb{B}(Y, X)$, onda postoji otvorena okolina U od x_0 i otvorena okolina V od $f(x_0)$ tako da je $f : U \to V$ bijektivna. Nadalje, $f^{-1} : V \to U$ je neprekidno derivabilna na V i vrijedi

$$(f^{-1})'(y) = \big(f'(f^{-1}(y))\big)^{-1}.$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $f : X \to X$, $x_0 = 0$, $f(0) = 0$ i $f'(0) = I$. Doista, $x_0 = 0$ i $f(0) = 0$ možemo ostvariti pomoću nekih translacija. Za $f : X \to X$ i $f'(x_0) = I$, uzmimo neki $A \in \mathbb{B}(Y, X)$ takav da je $A^{-1} \in \mathbb{B}(X, Y)$. Neka funkcija f zadovoljava pretpostavke teorema, i definirajmo $f_1 := A \circ f : X \to X$. Tada je f_1 neprekidno derivabilna u nekoj okolini točke x_0. Uočimo da je $f : U \to V$ neprekidna bijekcija ako i samo ako je $f_1 : U \to AV$ neprekidna bijekcija, te da je f^{-1} neprekidno derivabilna na V ako i samo ako je $f_1^{-1} = f^{-1} \circ A^{-1}$ neprekidno derivabilna na AV. Dakle, zaključak teorema vrijedi za f ako i samo ako vrijedi za f_1. Uočimo da je $f_1'(x_0) = Af'(x_0)$, pa izborom $A = f'(x_0)^{-1}$ dobivamo $f_1'(x_0) = I$.

Definiramo $g(x) = x - f(x)$. Vrijedi $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ i g je neprekidno derivabilna oko 0, pa postoji $r > 0$ takav da je

$$\|g'(x)\| \leqslant \frac{1}{2},\ x \in \overline{K}(0, r)\,. \tag{$*$}$$

Dobivamo da je za svaki $x \in \overline{K}(0, r)$

$$\|g(x)\| = \|g(x) - g(0)\| \overset{3.3.15}{\leqslant} \sup_{y \in [0,x]} \|g'(y)\| \cdot \|x\| \overset{(*)}{\leqslant} \frac{1}{2}\|x\| \leqslant \frac{1}{2}r.$$

Dakle, $g : \overline{K}(0, r) \to \overline{K}\big(0, \frac{r}{2}\big)$.

Neka je $y \in \overline{K}\big(0, \frac{r}{2}\big)$ fiksan. Definiramo $h_y(x) = g(x) + y$, za $x \in \overline{K}(0, r)$. Uočimo

$$\|h_y(x)\| \leqslant \|g(x)\| + \|y\| \leqslant \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r = r,$$

pa je $h_y : \overline{K}(0, r) \to \overline{K}(0, r)$. Neka su $x_1, x_2 \in \overline{K}(0, r)$ proizvoljni. Tada je

$$\|h_y(x_1) - h_y(x_2)\| = \|g(x_1) - g(x_2)\| \overset{3.3.15}{\leqslant} \sup_{x \in [x_1, x_2]} \|g'(x)\| \cdot \|x_1 - x_2\| \overset{(*)}{\leqslant} \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|,$$

što znači da je h_y $\frac{1}{2}$-kontrakcija. Po Banachovom teoremu o fiksnoj točki slijedi da postoji jedinstveni $x \in \overline{K}(0, r)$ takav da je $h_y(x) = x$, tj. $f(x) = y$. Definiramo

$V = K(0, \frac{r}{2})$ i $U = f^{-1}(V)$ (što je otvoren skup jer je f neprekidna), pa je po pokazanom $f : U \to V$ bijektivna.

Dokažimo da je f^{-1} neprekidna. Neka su $y_1, y_2 \in V$ proizvoljni, i označimo $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Tada je

$$\begin{aligned}
\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| &= \|x_1 - x_2\| = \|h_{y_1}(x_1) - h_{y_2}(x_2)\| \\
&= \|g(x_1) + y_1 - g(x_2) - y_2\| \\
&\leqslant \|g(x_1) - g(x_2)\| + \|y_1 - y_2\| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|,
\end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| \leqslant 2\|y_1 - y_2\|. \qquad (\triangle)$$

Dakle, f^{-1} je Lipschitzova, pa je neprekidna.

Na kraju dokažimo da je f^{-1} derivabilna na V i izraz za derivaciju. Neka su $y_0, y \in V$ proizvoljni, i označimo $x_0 = f^{-1}(y_0)$, $x = f^{-1}(y)$. Slijedi

$$\begin{aligned}
&\left\| f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) - \big(f'(f^{-1}(y))\big)^{-1}(y - y_0) \right\| \\
&= \big\| x - x_0 - f'(x_0)^{-1}(f(x) - f(x_0)) \big\| \\
&= \big\| f'(x_0)^{-1}(f'(x_0)(x - x_0) - f(x) + f(x_0)) \big\| \\
&\leqslant \big\| f'(x_0)^{-1} \big\| \, \|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\| \\
&= \big\| f'(x_0)^{-1} \big\| \, o(x - x_0) = o\big(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\big) \overset{(\triangle)}{=} o(y - y_0),
\end{aligned}$$

čime je dokaz gotov. ■

Primjer 3.4.2 Dana je jednadžba njihala

$$u'' + \sin u = h,$$

gdje je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana T-periodička funkcija. Postoje li rješenja u koja su T-periodička?

Definirajmo $X := \{u \in C^2(\mathbb{R}) : (\forall\, t \in \mathbb{R})\ u(t + T) = u(t)\}$, $Y := \{u \in C(\mathbb{R}) : (\forall\, t \in \mathbb{R})\ u(t+T) = u(t)\}$ i $f : X \to Y$ s $f(u) = u'' + \sin u$. Y je Banachov prostor uz normu $\|\cdot\|_\infty$, a X je Banachov uz normu $\|\cdot\|$ definiranu s $\|u\| = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty + \|u''\|_\infty$ (možemo li izostaviti član $\|u'\|_\infty$ da dobimo ekvivalentnu normu?). Vidimo da je

$$f(0 + v) - f(0) = v'' + \sin v = v'' + v + o(v),$$

iz čega slijedi da je $f'(0) = v'' + v$. Može se pokazati da je $f'(0)$ invertibilno kada je $T \neq 2n\pi$ $(n \in \mathbb{N})$, pa prema Teoremu 3.4.1 slijedi da postoje okoline $U \subseteq X$ i $V \subseteq Y$ od 0 i $f(0) = 0$ takve da je $f : U \to V$ difeomorfizam.

3.5 Newtonova metoda

Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Želimo naći takav $x \in \mathbb{R}$ da je $f(x) = 0$, tj. tražimo nultočke. Newtonova metoda je metoda fiksne točke $x = g(x)$ gdje je

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Dakle, za zadani x_0, formiramo niz aproksimacija $x_{n+1} = g(x_n)$. Jasno je da mora barem vrijediti da je $f'(x_n) \neq 0$. Prisjetimo se teorema s Numeričke matematike.

Teorem Neka je α jednostruka nultočka funkcije f i neka je $I_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R} : |x - \alpha| \leqslant \varepsilon\}$ segment radijusa ε oko α. Pretpostavimo da je $f \in C^2(I_\varepsilon)$ za sve dovoljno male $\varepsilon > 0$. Definiramo brojeve

$$m_1(\varepsilon) := \min_{x \in I_\varepsilon} |f'(x)|, \ M_2(\varepsilon) := \max_{x \in I_\varepsilon} |f''(x)|,$$

i, na kraju,

$$M(\varepsilon) := \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)}.$$

Ako je ε toliko mali da je

$$2\varepsilon M(\varepsilon) < 1,$$

onda je, za bilo koju startnu točku $x_0 \in I_\varepsilon$,

- Newtonova metoda dobro definirana,
- i konvergira barem kvadratno prema jedinoj nultočki $\alpha \in I_\varepsilon$.

Sada nam je želja poopćiti taj rezultat na Banachove prostore X, Y i $f : X \to Y$. Primijetimo da je funkcija $g(x) = x - f'(x)^{-1} f(x)$ dobro definirana ako postoji $f'(x)^{-1}$ (to je tada element iz $\mathbb{B}(Y, X)$). Uočimo da je računanje $f'(x)^{-1}$ najskuplja operacija. Na primjer, ako je $X = Y = \mathbb{R}^n$, onda je $f'(x)$ matrica reda n. Stoga ćemo fiksirati $x_0 \in X$ i promatrati $g(x) = x - f'(x_0)^{-1} f(x)$. Ta metoda će konvergirati sporije, ali će se svaki korak brže izvršavati.

Teorem 3.5.1 Pretpostavimo da postoji $r > 0$ takav da je $f \in C^1(K(x_0, r); Y)$, f' Lipschitzova s konstantom Lipschitzovosti $L > 0$, postoji $f'(x)^{-1}$ za svaki $x \in K(x_0, r)$, vrijedi

$$\left\| f'(x_0)^{-1} \right\| \left\| f'(x_0)^{-1} f(x_0) \right\| L \leqslant \frac{1}{4},$$

te neka je λ_0 manji korijen jednadžbe

$$\lambda^2 \left\| f'(x_0)^{-1} \right\| \left\| f'(x_0)^{-1} f(x_0) \right\| L - \lambda + 1 = 0.$$

Tada u kugli $K(x_0, \lambda_0 \| f'(x_0)^{-1} f(x_0) \|)$ funkcija f ima točno jednu nultočku i niz (x_n) konvergira prema njoj.

Dokaz. Označimo

$$p := \left\| f'(x_0)^{-1} \right\|, \ q := \left\| f'(x_0)^{-1} f(x_0) \right\| \text{ i } \alpha := \left\| f'(x_0)^{-1} \right\| \left\| f'(x_0)^{-1} f(x_0) \right\| L.$$

Stoga imamo $\alpha\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, pa je

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha}}{2\alpha},$$

što su zbog pretpostavke realni brojevi i

$$\lambda_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha}}{2\alpha} \geqslant 0.$$

Označimo još $K := K(x_0, \lambda_0 q)$. Pokazat ćemo da je $g : \overline{K} \to \overline{K}$ $(g(x) = x - f'(x_0)^{-1} f(x))$ $\varkappa$-kontrakcija, pa će iz Teorema 2.1.3 slijedi tvrdnja.

Pokažimo najprije da je $g : \overline{K} \to \overline{K}$. Za $x \in \overline{K}$ vrijedi

$$\begin{aligned}\|g(x) - x_0\| &= \left\|x - f'(x_0)^{-1} f(x) - x_0\right\| \\ &= \left\|f'(x_0)^{-1} \left[f'(x_0)(x - x_0) - f(x) + f(x_0)\right] - f'(x_0)^{-1} f(x_0)\right\| \\ &\leqslant p \left\|f'(x_0)(x - x_0) - f(x) + f(x_0)\right\| + q.\end{aligned}$$

Definirajmo $\varphi(x) := f'(x_0)(x - x_0) - f(x) + f(x_0)$ i uočimo da je

$$\|\varphi'(x)\| = \|f'(x_0) - f'(x)\| \leqslant L\|x - x_0\| \leqslant L\lambda_0 q$$

za svaki $x \in \overline{K}$. Slijedi da je

$$\begin{aligned}\|\varphi(x)\| = \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| &\overset{3.3.15}{\leqslant} \sup_{z\in[x_0,x]} \|\varphi'(z)\|\|x - x_0\| \leqslant \sup_{z\in\overline{K}} \|\varphi'(z)\|\|x - x_0\| \\ &\leqslant L(\lambda_0 q)^2.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\|g(x) - x_0\| \leqslant pL(\lambda_0 q)^2 + q = q\left(pL\lambda_0^2 q + 1\right) = q\left(\alpha\lambda_0^2 + 1\right) = \lambda_0 q,$$

pa je $g(x) \in \overline{K}$.

Pokažimo da je $g : \overline{K} \to \overline{K}$ $\varkappa$-kontrakcija. Vidimo da je

$$\begin{aligned}\|g'(x)\| &= \left\|I - f'(x_0)^{-1} f'(x)\right\| = \left\|f'(x_0)^{-1} \left(f'(x_0) - f'(x)\right)\right\| \leqslant p \left\|f'(x_0) - f'(x)\right\| \\ &\leqslant pL\|x - x_0\| \leqslant pL\lambda_0 q = \alpha\lambda_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha}}{2} =: \varkappa \leqslant \frac{1}{2} < 1,\end{aligned}$$

čime je dokaz gotov. ■

Zadatak 3.5.2 Dana je integralna jednadžba

$$x(t) - \int_a^b K(t, s)g(s, x(s))\,\mathrm{d}s = 0,\ t \in [a, b],$$

gdje su $K \in C([a, b] \times [a, b])$ i $g \in C([a, b] \times \mathbb{R})$ zadani. Također, parcijalna derivacija od g po drugoj varijabli je Lipschitzova po drugoj varijabli, tj. postoji $L > 0$ takav da je

$$|\partial_u g(s, u_1) - \partial_u g(s, u_2)| \leqslant L|u_1 - u_2|,\ \forall\, u_1, u_2 \in \mathbb{R}.$$

Uz koje uvjete će Newtonova metoda primijenjena na gornju jednadžbu integralu način konvergirati?

Rješenje: Definirajmo $f : C([a, b]) \to C([a, b])$ s

$$f(x)(t) := x(t) - \int_a^b K(t, s)g(s, x(s))\,\mathrm{d}s,\ x \in C([a, b]), t \in [a, b].$$

Koristeći Zadatak 3.3.14 dobivamo da je

$$(f'(x)h)(t) = h(t) - \int_a^b K(t,s)\partial_u g(s,x(s))h(s)\,\mathrm{d}s,\ \ x,h \in C([a,b]), t \in [a,b].$$

Provjerimo Lipschitzovost od f':

$$\begin{aligned}
\|f'(x) - f'(y)\| &= \sup_{\|h\|_\infty = 1} \|f'(x)h - f'(y)h\|_\infty \\
&= \sup_{\|h\|_\infty = 1} \sup_{t \in [a,b]} \left| \int_a^b K(t,s) \left(\partial_u g(s,x(s)) - \partial_u g(s,y(s))\right) h(s)\,\mathrm{d}s \right| \\
&\leqslant \sup_{\|h\|_\infty = 1} \sup_{t \in [a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\, |\partial_u g(s,x(s)) - \partial_u g(s,y(s))|\, |h(s)|\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \sup_{t \in [a,b]} \int_a^b |K(t,s)| L |x(s) - y(s)|\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \left(L \sup_{t \in [a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\,\mathrm{d}s \right) \|x - y\|_\infty.
\end{aligned}$$

Zadatak 3.5.3 Zadana je integralna jednadžba

$$u(x) = \lambda \int_a^b f(x,t,u(t))\,\mathrm{d}t + g(x),\ \ x \in [a,b],$$

gdje je $g \in C([a,b])$, $f \in C([a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R})$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ dano. Dodatno pretpostavimo da je f Lipschitzova po trećoj varijabli.

Definirajmo $F : C([a,b]) \to C([a,b])$ s

$$F(u)(x) := \lambda \int_a^b f(x,t,u(t))\,\mathrm{d}t + g(x),\ \ x \in [a,b].$$

Odredite dovoljne uvjete da F bude $\varkappa$-kontrakcija. Može li se ovdje primijeniti Newtonova metoda?

Rješenje: Neka su $u_1, u_2 \in C([a,b])$ proizvoljne. Tada je

$$\begin{aligned}
|F(u_1)(x) - F(u_2)(x)| &= |\lambda| \left| \int_a^b \left(f(x,t,u_1(t)) - f(x,t,u_2(t))\right) \mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant |\lambda| \int_a^b |f(x,t,u_1(t)) - f(x,t,u_2(t)))|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\leqslant |\lambda| \int_a^b L|u_1(t) - u_2(t)|\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant |\lambda| L(b-a)\|u_1 - u_2\|_\infty,$$

iz čega slijedi da je $\|F(u_1) - F(u_2)\|_\infty \leqslant |\lambda|L(b-a)\|u_1 - u_2\|_\infty$, pa će F biti $\varkappa$-kontrakcija ako je $|\lambda|L(b-a) < 1$.

3.6 Teorem o implicitnoj funkciji

Neka su X_1 i X_2 Banachovi prostori, te neka je $X = X_1 \times X_2$. Možemo definirati normu na X s $\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\| + \|x_2\|$, i uz tu normu X postaje Banachov prostor (zbrajanje i množenje skalarom definiramo po koordinatama). Uočimo da je $X_1 \times \{0\} \leqslant X$ i $\{0\} \times X_2 \leqslant X$, pa uz identifikacije $X_1 \leftrightarrow X_1 \times \{0\}$ i $X_2 \leftrightarrow \{0\} \times X_2$ možemo reći da su X_1 i X_2 potprostori od X, te da vrijedi $X = X_1 \dot{+} X_2$. Tako će se naše definicije, koje se odnose na potprostore, moći primijeniti i na Kartezijev produkt prostora.

Definicija 3.6.1 Neka su X i Y Banachovi prostori, $U \subseteq X$ otvoren i $f : U \to Y$ funkcija. Kažemo da je f *derivabilna u* $x_0 \in U$ *po potprostoru* $X_0 \leqslant X$ ako postoji $A_{x_0} \in \mathbb{B}(X_0, Y)$ takav da

$$(\forall\, h \in X_0)\ x_0 + h \in U \ \Rightarrow\ f(x_0 + h) - f(x_0) - A_{x_0}h = o(h)$$

Operator A_{x_0} označavamo s $\partial_{X_0} f(x_0)$ i još zovemo *parcijalna derivacija funkcije f u točki x.*

Neka su X i Y Banachovi prostori i $X_1, X_2 \leqslant X$ takvi da je $X = X_1 \dot{+} X_2$. Neka je $U \subseteq X$ otvoren i $f : U \to Y$ derivabilna u $x \in U$, tj. $f'(x) \in \mathbb{B}(X, Y)$. Tada je $f'(x)|_{X_i} \in \mathbb{B}(X_i, Y)$ (linearnost lako slijedi, a i jasno je da vrijedi $\|f'(x)|_{X_i}\| \leqslant \|f'(x)\|$). Također je $\partial_{X_i} f(x) = f'(x)|_{X_i}$, pa vrijedi

$$f'(x)h = \partial_{X_1} f(x)h_1 + \partial_{X_2} f(x)h_2,\ \ h = h_1 + h_2 \in X, h_i \in X_i. \qquad (*)$$

Zanima nas vrijedi li obrat.

Teorem 3.6.2 Neka parcijalne derivacije $\partial_{X_i} f(x)$ postoje i neprekidne su na nekoj okolini od x. Tada je f derivabilna u x i vrijedi $(*)$.

Dokaz. Neka je $h = h_1 + h_2$ proizvoljan. Trebamo pokazati da je

$$f(x+h) - f(x) - (\partial_{X_1} f(x)h_1 + \partial_{X_2} f(x)h_2) = o(h).$$

Vidimo da je

$$\begin{aligned}
&\|f(x+h) - f(x) - (\partial_{X_1} f(x)h_1 + \partial_{X_2} f(x)h_2)\| \\
&\leqslant \|f(x+h_2+h_1) - f(x+h_2) - \partial_{X_1} f(x+h_2)h_1\| \\
&\quad + \|\partial_{X_1} f(x+h_2)h_1 - \partial_{X_1} f(x)h_1\| + \|f(x+h_2) - f(x) - \partial_{X_2} f(x)h_2\| \\
&\leqslant \|f(x+h_2+h_1) - f(x+h_2) - \partial_{X_1} f(x+h_2)h_1\| \\
&\quad + \|\partial_{X_1} f(x+h_2) - \partial_{X_1} f(x)\|\|h_1\| + \|f(x+h_2) - f(x) - \partial_{X_2} f(x)h_2\|,
\end{aligned}$$

što pokazuje tvrdnju. ■

Neka su sada X, Y_1, Y_2 Banachovi prostori, $U \subseteq X$ otvoren skup i $f_i : X \to Y_i$, $i = 1, 2$, funkcije. Definiramo $f : X \to Y_1 \times Y_2$ s $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Ako je f derivabilna u $x_0 \in U$, onda su f_1 i f_2 derivabilne u x_0 i vrijedi $f'(x_0) = (f_1'(x_0), f_2'(x_0))$, pa je $f'(x_0)h = (f_1'(x_0)h, f_2'(x_0)h)$. Vrijedi li obrat? Pretpostavimo da su f_1 i f_2 derivabilne u x_0. Tada je

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= (f_1(x_0 + h) - f_1(x_0), f_2(x_0 + h) - f_2(x_0)) \\ &= (f_1'(x_0)h + o(h), f_2'(x_0)h + o(h)) \\ &= (f_1'(x_0)h, f_2'(x_0)h) + (o(h), o(h)) \\ &= (f_1'(x_0)h, f_2'(x_0)h) + o(h), \end{aligned}$$

pa je i f derivabilna u x_0 i vrijedi $f'(x_0) = (f_1'(x_0), f_2'(x_0))$.

Teorem 3.6.3 (o implicitnoj funkciji) Neka su X i Y Banachovi prostori, $U \subseteq X \times Y$ otvoren skup, $F : U \to Y$ funkcija i $(x_0, y_0) \in U$ točka takva da je

- $F(x_0, y_0) = 0$,
- F je neprekidno derivabilna na U ($F \in C^1(U; Y)$),
- $\partial_Y F(x_0, y_0)$ ima neprekidni inverz ($(\partial_Y F(x_0, y_0)^{-1} \in \mathbb{B}(Y)$).

Tada postoji okolina $U_X \subseteq P_X(U)$[1] točke x_0 i funkcija $f : U_X \to Y$ takva da je

- $f(x_0) = y_0$,
- $F(x, f(x)) = 0$ za svaki $x \in U_X$,
- f je derivabilna na U_X.

Dokaz. Definirajmo $\varphi : U \to X \times Y$ s $\varphi(x, y) = (x, F(x, y))$. Uočimo da je $\varphi = (\pi_1, F)$ (π_1 je projekcija na prvu koordinatu), a kako su π_1 i F derivabilne na U ($\pi_1 \in \mathbb{B}(X \times Y, X)$), po napomeni prije iskaza teorema slijedi da je φ derivabilna na U. Uočimo da je (po napomeni prije Teorema 3.6.2)

$$\varphi'(x_0, y_0)(h, k) = (h, \partial_X F(x_0, y_0)h + \partial_Y F(x_0, y_0)k).$$

Neka je $(\tilde{h}, \tilde{k}) \in X \times Y$ takav da je $\varphi'(x_0, y_0)(h, k) = (\tilde{h}, \tilde{k})$. Tada je $h = \tilde{h}$ i $k = \partial_Y F(x_0, y_0)^{-1}(\tilde{k} - \partial_X F(x_0, y_0)\tilde{h})$, pa postoji $\varphi'(x_0, y_0)^{-1}$. Ograničenost se lako provjeri. Po Teoremu 3.4.1 slijedi da postoji okolina $\widetilde{U} \subseteq U$ točke (x_0, y_0) i okolina $\widetilde{V} \subseteq X \times Y$ točke $\varphi(x_0, y_0) = (x_0, F(x_0, y_0)) = (x_0, 0)$ tako da je $\varphi : \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ difeomorfizam. Slijedi da postoji neprekidno derivabilna funkcija ψ takva da je $\varphi^{-1}(x, y) = (x, \psi(x, y))$, za svaki $(x, y) \in \widetilde{V}$. Dobivamo da je

$$(x, y) = (\varphi \circ \varphi^{-1})(x, y) = \varphi(x, \psi(x, y)) = (x, F(x, \psi(x, y))), \ (x, y) \in \widetilde{V},$$

pa je $F(x, \psi(x, y)) = y$. Kako je $(x_0, 0) \in \widetilde{V}$, možemo uvrstiti $y = 0$ da dobimo da je $F(x, \psi(x, 0)) = 0$, pa definiramo $f(x) = \psi(x, 0)$. Iz toga slijedi derivabilnost od f i svojstvo $F(x, f(x)) = 0$. Vidimo da je

$$(x, y) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)(x, y) = \varphi^{-1}(x, F(x, y)) = (x, \psi(x, F(x, y))), \ (x, y) \in \widetilde{U},$$

iz čega slijedi da je $\psi(x, F(x, y)) = y$. Posebno je (za $x = x_0$ i $y = y_0$) $f(x_0) = \psi(x_0, 0) = \psi(x_0, F(x_0, y_0)) = y_0$. ■

[1] $P_X(U)$ je projekcija od U na X, tj. $P_X(U) = \{x \in X : (\exists\, y \in Y)\ (x, y) \in U\}$

Poglavlje 4

Varijacijske metode

4.1 Uvod

Neka je X Banachov prostor i $f : X \to \mathbb{R}$ funkcional. Želimo na zadanom skupu $K \subseteq X$ naći minimum (maksimum) od f, ako postoji.

Definicija 4.1.1 Kažemo da je x_0 točka:

- *lokalnog minimuma (maksimuma)* funkcije f ako postoji otvorena okolina U točke x_0 takva da je $f(x_0) \leqslant f(x)$ $(f(x_0) \geqslant f(x))$ za svaki $x \in U$.
- *strogog lokalnog minimuma (maksimuma)* funkcije f ako postoji otvorena okolina U točke x_0 takva da je $f(x_0) < f(x)$ $(f(x_0) > f(x))$ za svaki $x \in U \setminus \{x_0\}$.
- *(strogog) lokalnog ekstrema* funkcije f ako je x_0 točka (strogog) lokalnog minimuma ili (strogog) lokalnog maksimuma.

Teorem 4.1.2 Neka f ima lokalni ekstrem u točki x_0, te neka je f derivabilna u x_0. Tada je $f'(x_0) = 0$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $f'(x_0) \neq 0$. Tada postoji $h \in X$ takav da je $f'(x_0)h > 0$. Vrijedi

$$f'_h(x_0) = \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda h) - f(x_0)}{\lambda} = f'(x_0)h > 0$$

i

$$f'_{-h}(x_0) = \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{f(x_0 - \lambda h) - f(x_0)}{\lambda} = -f'(x_0)h < 0.$$

Slijedi da za sve $\lambda > 0$ iz neke okoline nule vrijedi $f(x_0 - \lambda h) < f(x_0) < f(x_0 + \lambda h)$, što je u kontradikciji s time da je x_0 točka lokalnog ekstrema funkcije f. ■

Teorem kaže da, kao i inače, rješavanjem jednadžbe $f'(x_0) = 0$ dobivamo kandidate za lokalne ekstreme. Točku x_0 za koju vrijedi $f'(x_0) = 0$ zovemo *kritična točka*.

Pokazali smo da ako je $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidna i $K \subseteq X$ kompaktan, onda f poprima svoje ekstreme na K. Sljedeći teorem pokazuje da nam to nije pretjerano korisno u beskonačnodimenzionalnim prostorima.

Teorem 4.1.3 (Riesz) Neka je X normirani prostor. Tada je $\overline{K}(0,1)$ kompaktan skup ako i samo ako je X konačnodimenzionalan.

Lako se vidi da tvrdnja teorema vrijedi za svaku kuglu. Stoga za svaki kompaktan skup $K \subseteq X$ je $\operatorname{Int} K = \emptyset$, ako je $\dim X = +\infty$. Dakle, svaki kompaktan skup u beskonačnodimenzionalnom normiranom prostoru je nigdje gust (šupalj). Stoga ćemo oslabiti pretpostavke na funkciju f i skup K kako bi dobili isti rezultat kao u konačnoj dimenziji.

Definicija 4.1.4 Neka je X normiran prostor, $x_0 \in X$ točka i $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je f *slabo nizovno poluneprekidna odozdo (SNPO)* u x_0 ako za svaki niz (x_n) iz X koji slabo konvergira prema x_0 vrijedi

$$f(x_0) \leqslant \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

Primjer 4.1.5 Neka niz (x_n) slabo konvergira prema x. Po Hahn-Banachovom teoremu postoji $f \in X'$ takav da je $\|f\| = 1$ i $f(x) = \|x\|$. Slijedi da je

$$\|x\| = f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|f\|\|x_n\| = \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Dakle, $\|\cdot\|$ je SNPO.

Definicija 4.1.6 Neka je X normiran prostor i $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je f *koercitivna* ako $f(x) \to +\infty$ kad $\|x\| \to +\infty$, tj.

$$(\forall\, M > 0)(\exists\, R > 0)(\forall\, x \in X)\ \|x\| \geqslant R \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant M.$$

Definicija 4.1.7 Neka je X normiran prostor i $K \subseteq X$ skup. Kažemo da je K *slabo nizovno kompaktan (SNK)* ako svaki niz u K ima podniz koji slabo konvergira prema vektoru iz K.

Teorem 4.1.8 (osnovni) Neka je X normiran prostor, $K \subseteq X$ SNK skup i $f : K \to \mathbb{R}$ SNPO na K. Tada je f ograničena odozdo na K i dostiže minimum na K.

Dokaz. Iz definicije infimuma slijedi da postoji niz (x_n) u K takav da $f(x_n)$ konvergira prema $\inf_{x\in K} f(x)$ (dopuštamo $\inf_{x\in K} f(x) = -\infty$). Kako je K SNK, postoji podniz (x_{n_k}) koji slabo konvergira prema nekom $x_0 \in K$. Funkcija f je SNPO, pa imamo

$$\inf_{x\in K} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \inf_{x\in K} f(x).$$

Dakle, $f(x_0) = \inf_{x\in K} f(x)$, čime smo pokazali tvrdnju teorema. ∎

Teorem 4.1.9 Neka X refleksivan Banachov prostor, $f : X \to \mathbb{R}$ SNPO i koercitivna. Tada je f ograničena odozdo i dostiže svoj infimum na X.

Dokaz. Neka je $M > 0$ takav da je $M > \inf_{x\in X} f(x)$. Kako je f koercitivna, postoji $R > 0$ takav da je $f(x) \geqslant M$ za sve $x \in X$, $\|x\| \geqslant R$. Vidimo da je $\inf_{x\in X} f(x) = \inf_{x\in \overline{K}(0,R)} f(x)$. Skup $\overline{K}(0,R)$ je SNK jer je X refleksivan Banachov prostor. Prema Teoremu 4.1.8 slijedi tvrdnja. ∎

Provjeravanje da je funkcija SNPO ili da je skup SNK preko definicije je komplicirano. Stoga tražimo dovoljne uvjete koje je jednostavno provjeriti. Sljedeći teorem daje dovoljne uvjete za SNK.

Teorem 4.1.10 Neka je X refleksivan Banachov prostor i $K \subseteq X$ ograničen, zatvoren i konveksan skup. Tada je K SNK.

Za dokaz tog teorema se koriste sljedeći teoremi.

Teorem 4.1.11 Svaki ograničen niz u refleksivnom Banachovom prostoru ima slabo konvergentan podniz.

Teorem 4.1.12 Svaki zatvoren i konveksan podskup normiranog prostora je slabo zatvoren.

Dovoljni uvjeti za SNPO su dani u sljedećem teoremu.

Teorem 4.1.13 Neka je X normiran prostor, $K \subseteq X$ konveksan skup i $f : K \to \mathbb{R}$ konveksna i neprekidna funkcija. Tada je f SNPO na K.

Za dokaz Teorema 4.1.13 potrebna nam je sljedeća lema.

Lema 4.1.14 Neka je X normiran prostor i $K \subseteq X$ neprazan skup. Funkcija $f : K \to \mathbb{R}$ je SNPO na K ako i samo ako je za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ skup $D(\alpha) := \{x \in K : f(x) \leqslant \alpha\}$ slabo nizovno zatvoren (SNZ) u K.

Dokaz. $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Neka je (x_n) niz u $D(\alpha)$ koji slabo konvergira prema $x \in K$. Kako je f SNPO, vrijedi

$$f(x) \leqslant \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant \alpha,$$

što znači da je $x \in D(\alpha)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je (x_n) proizvoljan niz koji slabo konvergira prema $x \in K$. Definirajmo

$$\alpha := \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

Po definiciji gomilišta, postoji podniz (x_{n_k}) takav da $(f(x_{n_k}))_k$ konvergira prema α. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada je $f(x_{n_k}) \leqslant \alpha + \varepsilon$ za sve dovoljne velike k. Kako je $D(\alpha + \varepsilon)$ SNZ u K, slijedi da je $x \in D(\alpha + \varepsilon)$. Dakle, vrijedi $f(x) \leqslant \alpha + \varepsilon$ za svaki $\varepsilon > 0$, pa je $f(x) \leqslant \alpha$. ∎

Dokaz Teorema 4.1.13. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Za sve $x, y \in D(\alpha)$ i svaki $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$, jer je f konveksna, vrijedi

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \leqslant \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha,$$

pa je $\lambda x + (1-\lambda)y \in D(\alpha)$. Dakle, $D(\alpha)$ je konveksan skup. Kako je f neprekidna, skup $D(\alpha) = f^{-1}(\langle -\infty, \alpha])$ je zatvoren u K. Prema Teoremu 4.1.12 je $D(\alpha)$ slabo zatvoren, a time i SNZ. Iz Leme 4.1.14 slijedi da je f SNPO. ∎

Neprekidnost nije dovoljna za SNPO, kao što sljedeći primjer pokazuje.

Primjer 4.1.15 Neka X Hilbertov prostor i (e_n) ONB u X. Definiramo $f : X \to \mathbb{R}$ s

$$f(x) := \begin{cases} -\|x\|, & x \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K\left(e_n, \dfrac{1}{2}\right), \\ -\|x\| + \dfrac{2(n-1)}{n}\left(\dfrac{1}{2} - \|x - e_n\|\right), & x \in K\left(e_n, \dfrac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Uočimo da su kugle $K(e_n, \frac{1}{2})$ disjunktne, pa je f dobro definirano. Može se pokazati da je funkcional f neprekidan, ali nije SNPO.

Iz Teorema 4.1.10 i 4.1.13 dobivamo sljedeće korolare.

Korolar 4.1.16 Neka je X refleksivan Banachov prostor, $K \subseteq X$ neprazan, ograničen, zatvoren, konveksan skup i $f : K \to \mathbb{R}$ neprekidan i konveksan funkcional. Tada je f ograničen odozdo na K i poprima minimum na K.

Korolar 4.1.17 Neka je X refleksivan Banachov prostor i $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidan, konveksan i koercitivan funkcional. Tada je f ograničen odozdo i poprima svoj infimum na X. Ako je f strogo konveksan, minimum je jedinstven.

Dajemo poučan primjer.

Primjer 4.1.18 Promotrimo

$$\left\{ \begin{array}{l} EIu^{(4)} - \frac{E}{2}\|u'\|^2_{L^2([0,1])^2} - (pu')' = f \text{ na } \langle 0,1\rangle \\ u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0 \end{array} \right. \tag{$*$}$$

gdje je $f \in L^2([0,1])^2$, $p \in L^\infty([0,1])$, $E, I > 0$ zadano i

$$\|u'\|^2_{L^2([0,1])^2} = \int_0^1 \left({u_1'}^2 + {u_2'}^2\right).$$

Problem $(*)$ se može pojednostavniti na

$$\left\{ \begin{array}{l} -v'' + \|v\|^2_{L^2([0,1])^2} + pv = g \text{ na } \langle 0,1\rangle \\ v(0) = v(1) = 0 \end{array} \right. \tag{P}$$

gdje je $p, g \in L^2([0,1])$. Množenjem jednadžbe u (P) s $\varphi \in H^1_0([0,1])$, integriranjem i parcijalnom integracijom dobivamo varijacijsku jednadžbu

$$\int_0^1 v'\varphi' + \|v\|^2_{L^2} \int_0^1 v\varphi + \int_0^1 pv\varphi - \int_0^1 g\varphi = 0, \ \forall\, \varphi \in H^1_0([0,1]). \tag{VJ}$$

Funkciju $v \in H^1_0([0,1])$ koja zadovoljava (VJ) zovemo slabo rješenje od (P). Ako je v slabo rješenje i $v \in H^2([0,1]) \cap H^1_0([0,1])$, onda v zadovoljava (P). Definiramo funkcional $F : H^1_0([0,1]) \to \mathbb{R}$ s

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 u'^2 + \frac{1}{4}\|u\|^2_{L^2}\int_0^1 u^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 pu^2 - \int_0^1 gu.$$

Pokaže se da je za svaki $\varphi \in H_0^1([0,1])$

$$F'_\varphi(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} F(u+\lambda\varphi)\Big|_{\lambda=0} = \int_0^1 u'\varphi' + \|u\|_{L^2}^2 \int_0^1 u\varphi + \int_0^1 pu\varphi - \int_0^1 g\varphi.$$

Dakle, vrijedi $F'_\varphi(u) = 0$ za svaki $\varphi \in H_0^1([0,1])$ ako i samo ako je u slabo rješenje. Zato želimo vidjeti postiže li F svoj infimum na $H_0^1([0,1])$. Uočimo da je

$$F(u) = \frac{1}{2}\|u'\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\|u\|_{L^2}^4 + \frac{1}{2}\int_0^1 pu^2 - \int_0^1 gu.$$

Bit će nam potrebna Poincaréova nejednakost $\|u\|_{L^2} \leqslant \|u'\|_{L^2}$ za $u \in H_0^1([0,1])$. Računamo:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2}^2 &= \int_0^1 u(x)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^x u'(y)\,\mathrm{d}y \right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^x 1 \cdot u'(y)\,\mathrm{d}y \right)^2 \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}y \int_0^x u'(y)^2\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 1\,\mathrm{d}y \int_0^1 u'(y)^2\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \|u'\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}x = \|u'\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Na prostoru $H^1([0,1])$ se zadaje skalarni produkt

$$(u,v) = \int_0^1 (uv + u'v')$$

i inducirana norma

$$\|u\|_{H^1} = \sqrt{\int_0^1 \left(u^2 + u'^2\right)}.$$

Na $H_0^1([0,1])$, kao potprostoru od $H^1([0,1])$, se mogu zadati isti skalarni produkt i norma. No, lako se vidi da je na $H_0^1([0,1])$ preslikavanje $u \mapsto \|u'\|_{L^2}$ norma koja je ekvivalenta s $\|\cdot\|_{H^1}$. Naime, da je $u \mapsto \|u'\|_{L^2}$ norma na $H_0^1([0,1])$ slijedi iz toga da je, u nekom smislu, $u(0) = 0$. Da pokažemo ekvivalentnost normi, uočimo da nejednakost $\|u'\|_{L^2} \leqslant \|u\|_{H^1}$ očito vrijedi, a da iz Poincaréove nejednakosti slijedi da je $\|u\|_{H^1} \leqslant 2\|u'\|_{L^2}$. Nadalje ćemo $H_0^1([0,1])$ promatrati s normom $\|u'\|_{L^2}$.

Vratimo se primjeru. Promatrat ćemo dva slučaja: $p = 0$ i $p \neq 0$.

1° $p = 0$

Funkcional F je konveksan kao zbroj konveksnih funkcionala. Dodatno, možemo vidjeti da je F strogo konveksan. Vidimo da je

$$F(u) \geqslant \frac{1}{2}\|u'\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\|u\|_{L^2}^4 - \|g\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \geqslant \frac{1}{2}\|u'\|_{L^2}^2 - \|g\|_{L^2}\|u'\|_{L^2}$$

$$= \|u'\|_{L^2}\left(\frac{1}{2}\|u'\|_{L^2} - \|g\|_{L^2}\right),$$

pa $F(u) \to \infty$ kada $\|u'\|_{L^2} \to \infty$, tj. F je koercitivan. Da pokažemo neprekidnost, uzmimo niz (u_n) koji konvergira u $H_0^1([0,1])$ prema u. Uočimo da je

$$\begin{aligned}\left|\|u_n'\|_{L^2}^2 - \|u'\|_{L^2}^2\right| &= \left|\int_0^1 {u_n'}^2 - \int_0^1 u'^2\right| = \left|\int_0^1 \left({u_n'}^2 - u'^2\right)\right| \\ &= \left|\int_0^1 (u_n' - u')(u_n' + u')\right| \leqslant \|u_n' - u'\|_{L^2}\|u_n' + u'\|_{L^2}\end{aligned}$$

$$\left|\int_0^1 gu_n - \int_0^1 gu\right| = \left|\int_0^1 g(u_n - u)\right| \leqslant \|g\|_{L^2}\|u_n - u\|_{L^2} \leqslant \|g\|_{L^2}\|u_n' - u'\|_{L^2}$$

iz čega vidimo da je F neprekidan. Prema Korolaru 4.1.17 slijedi da F poprima svoj infimum te da ima jedinstven minimum.

2° $p \neq 0$

Koercitivnost vidimo iz

$$\begin{aligned}F(u) &\geqslant \frac{1}{2}\|u'\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\|u\|_{L^2}^4 - \frac{1}{2}\|p\|_\infty\|u\|_{L^2} - \|g\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \\ &\geqslant \underbrace{\|u'\|_{L^2}\left(\frac{1}{2}\|u'\|_{L^2} - \|g\|_{L^2}\right)}_{\to\infty} + \underbrace{\frac{1}{2}\|u\|_{L^2}^2\left(\frac{1}{2}\|u\|_{L^2} - \|p\|_\infty\right)}_{\text{ograničeno ili } \to\infty}\end{aligned}$$

kad $\|u'\|_{L^2} \to \infty$. Kako F nije nužno konveksan, morat ćemo direktno pokazati da je F SNPO. Uočimo da je dovoljno pokazati da je $h : H_0^1([0,1]) \to \mathbb{R}$ definiran s

$$h(u) = \int_0^1 pu^2$$

SNPO. Tvrdnja vrijedi jer svaki slabo konvergentan niz u H^1 jako konvergira u L^2 (operator identitete s H^1 u L^2 je kompaktan).

4.2 Monotoni operatori

Znamo da ako za $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vrijedi

- f je neprekidna,
- f je strogo monotona,

- $|f(x)| \to \infty$ kad $|x| \to \infty$,

onda je f bijekcija, što znači da $f(x) = y$ ima jedinstveno rješenje za svaki $y \in \mathbb{R}$. Želimo taj rezultat poopćiti na Banachove prostore.

Pitanje je kako definirati monotonost funkcije A na nekim Banachovim prostorima. Promotrimo rastuću funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. To znači da $x < y$ povlači $f(x) \leqslant f(y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Lako se vidi da je to ekvivalentno s $(f(x) - f(y))(x - y) \geqslant 0$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Tako dolazimo do sljedeće definicije.

Definicija 4.2.1 Neka je X Banachov prostor i $A : X \to X'$ funkcija (ne nužno linearna). Kažemo da je A *monotona* funkcija ako vrijedi $(A(x) - A(y))(x - y) \geqslant 0$ za sve $x, y \in X$.

Ako je X Hilbertov prostor, poistovjećujemo X i X', i kažemo da je $A : X \to X$ monotona funkcija ako je $(A(x) - A(y), x - y) \geqslant 0$ za sve $x, y \in X$. Nadalje će nam X biti Hilbertov prostor.

Prisjetimo se da ako je $f : X \to \mathbb{R}$ derivabilan funkcional, onda je $f' : X \to \mathbb{B}(X, \mathbb{R}) = X$.

Teorem 4.2.2 Neka je $f \in C^1(X; \mathbb{R})$. Tada je f' monoton ako i samo ako je f konveksan.

Dokaz. $\boxed{\Leftarrow}$ Uočimo da je

$$\begin{aligned} f(y + \lambda(x - y)) &= f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \\ &= f(y) + \lambda(f(x) - f(y)) \end{aligned}$$

za sve $x, y \in X$ i $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$. Slijedi da je

$$\frac{f(y + \lambda(x - y)) - f(y)}{\lambda} \leqslant f(x) - f(y).$$

Puštanjem $\lambda \searrow 0$ dobivamo da je $f'(y)(x - y) \leqslant f(x) - f(y)$. Zamjenom uloga x i y dobivamo $f'(x)(y - x) \leqslant f(y) - f(x)$. Zbrajanjem tih dviju nejednakosti slijedi da je $(f'(x) - f'(y))(x - y) \geqslant 0$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Neka su $x, y \in X$ proizvoljni. Definiramo

$$p(\lambda) = f(\lambda x + (1 - \lambda)y) - \lambda f(x) - (1 - \lambda)f(y)$$

za sve $\lambda \in [0, 1]$. Potrebno je pokazati da je $p(\lambda) \leqslant 0$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ takav da je $p(\lambda) > 0$ (vidimo da je $p(0) = p(1) = 0$). Funkcija p je neprekidna, pa postoji $\lambda_0 \in \langle 0, 1\rangle$ takav da je $p(\lambda_0) = \max_{\lambda \in [0,1]} p(\lambda)$. Vrijedi i $p'(\lambda_0) = 0$. Neka je $\lambda \in \langle \lambda_0, 1\rangle$. Tada je

$$\begin{aligned} p'(\lambda) - p'(\lambda_0) &= f'(\lambda x + (1 - \lambda)y)(x - y) - f(x) + f(y) \\ &\quad - f'(\lambda_0 x + (1 - \lambda_0)y)(x - y) + f(x) - f(y) \\ &= \frac{1}{\lambda - \lambda_0}(f'(\lambda x + (1 - \lambda)y) - f'(\lambda_0 x + (1 - \lambda_0)y), \\ &\qquad (\lambda x + (1 - \lambda)y) - (\lambda_0 x + (1 - \lambda_0)y)) \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Slijedi da je $p'(\lambda) \geqslant 0$ za sve $\lambda \in \langle \lambda_0, 1\rangle$, pa je $p(1) \geqslant p(\lambda_0) > 0$, što je nemoguće. ■

Posljedica ovog teorema je da, ako je $f \in C^1(X;\mathbb{R})$ i f' je monotona funkcija, onda je f SNPO.

Vratimo se na početni problem. Kažemo da je $A : X \to X$ monoton operator ako je $(A(x) - A(y), x - y) \geqslant 0$ za sve $x, y \in X$. Definiramo jača svojstva koja će nam biti potrebna.

Definicija 4.2.3 Kažemo da je operator $A : X \to X$

- *striktno monoton* ako je $(A(x) - A(y), x - y) > 0$ za sve $x, y \in X$, $x \neq y$,
- *strogo monoton* ako postoji $c > 0$ takav da je $(A(x) - A(y), x - y) \geqslant c\|x - y\|^2$ za sve $x, y \in X$.

Uočimo da ako je A strogo monoton operator, onda $\|A(x)\| \to \infty$ kad $\|x\| \to \infty$. Za takav operator ($\|A(x)\| \to \infty$ kad $\|x\| \to \infty$) kažemo da je *koercitivan* (primijetite da je drugačije od koercitivnosti funkcionala).

Teorem 4.2.4 Neka je $A : X \to X$ neprekidan, koercitivan i monoton operator. Tada je A surjekcija. Nadalje, ako je A striktno monoton, onda je A injekcija.

Dokaz. Dokažimo injektivnost uz pretpostavku striktne monotonosti. Neka je $A(x_1) = A(x_2)$ za neke $x_1, x_2 \in X$. Slijedi da je $(A(x_1) - A(x_2), x_1 - x_2) = 0$, pa je nužno $x_1 = x_2$.

Koristit ćemo da ako je A neprekidan i strogo monoton operator, onda je surjekcija. Tu tvrdnju nećemo dokazivati.

Dokaz surjektivnosti provodimo u nekoliko koraka.

1° Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo $A_n : X \to X$ s $A_n(x) = \frac{1}{n}x + A(x)$. Vidimo da je

$$
\begin{aligned}
(A_n(x) - A_n(y), x - y) &= \left(A(x) - A(y) + \frac{1}{n}(x - y), x - y\right) \\
&= (A(x) - A(y), x - y) + \frac{1}{n}(x - y, x - y) \geqslant \frac{1}{n}\|x - y\|^2,
\end{aligned}
$$

što znači da je A_n strogo monoton operator.

Neka je $y \in X$ proizvoljan. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji jedinstveni $x_n \in X$ takav da je $A_n(x_n) = y$ (koristimo iskazanu tvrdnju i dokazanu injektivnost).

2° Dokažimo da je niz (x_n) ograničen. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji podniz (x_{n_k}) takav da $\|x_{n_k}\| \to \infty$. Uočimo da je

$$
\begin{aligned}
\|y\| &\geqslant \left(y, \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\right) = \left(A_{n_k}(x_{n_k}), \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\right) = \left(\frac{1}{n_k}x_{n_k} + A(x_{n_k}), \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\right) \\
&= \frac{1}{n_k}\|x_{n_k}\| + \frac{1}{\|x_{n_k}\|}(A(x_{n_k}), x_{n_k}) \\
&= \frac{1}{n_k}\|x_{n_k}\| + \frac{1}{\|x_{n_k}\|}(A(x_{n_k}) - A(0), x_{n_k} - 0) + \frac{1}{\|x_{n_k}\|}(A(0), x_{n_k}) \\
&\geqslant \frac{1}{n_k}\|x_{n_k}\| + \frac{1}{\|x_{n_k}\|}(A(0), x_{n_k})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant \frac{1}{n_k}\|x_{n_k}\| - \frac{1}{\|x_{n_k}\|}\|A(0)\|\|x_{n_k}\| \\
&= \frac{1}{n_k}\|x_{n_k}\| - \|A(0)\|,
\end{aligned}
$$

iz čega slijedi da je $\|y\| + \|A(0)\| \geqslant \frac{1}{n_k}\|x_{n_k}\|$. Niz $(\frac{1}{n_k}x_{n_k})_k$ je ograničen, pa ima slabo konvergentan podniz $(\frac{1}{n_{k_l}}x_{n_{k_l}})_l$ koji konvergira slabo prema $\overline{x} \in X$. Kako vrijedi

$$y = A_{n_{k_l}}(x_{n_{k_l}}) = \frac{1}{n_{k_l}}x_{n_{k_l}} + A(x_{n_{k_l}}),$$

slijedi da niz $(A(x_{n_{k_l}}))_l$ konvergira slabo prema $y-\overline{x}$, pa je $(A(x_{n_{k_l}}))_l$ ograničen niz. To je kontradikcija, jer zbog koercitivnosti $\|A(x_{n_{k_l}})\| \to \infty$.

Dakle, niz (x_n) je ograničen, pa $\frac{1}{n}x_n \to 0$. Stoga

$$A(x_n) = A_n(x_n) - \frac{1}{n}x_n \to y.$$

3° Dokažimo da postoji $x_0 \in X$ takav da je $A(x_0) = y$. Kako je niz (x_n) ograničen, postoji podniz (x_{n_k}) koji konvergira slabo prema $x_0 \in X$. Jer $A(x_n) \to y$, slijedi da $A(x_{n_k}) \to y$. Vrijedi $(A(x_{n_k}) - A(x), x_{n_k} - x) \geqslant 0$ za svaki $x \in X$. Općenito, ako su $(u_n), (v_n)$ nizovi u X takvi da (u_n) konvergira prema u i (v_n) konvergira slabo prema v, onda $(u_n, v_n) \to (u, v)$. Doista,

$$
\begin{aligned}
|(u_n, v_n) - (u, v)| &= |(u_n - u, v_n) + (u, v_n) - (u, v)| \\
&\leqslant |(u_n - u, v_n)| + |(u, v_n) - (u, v)| \\
&\leqslant \|u_n - u\|\|v_n\| + |(u, v_n) - (u, v)| \\
&\to 0.
\end{aligned}
$$

Iz toga slijedi da je $(y - A(x), x_0 - x) \geqslant 0$ za svaki $x \in X$. Uzimajući $x = x_0 + \lambda z$ za $z \in X$ i $\lambda > 0$ dobivamo $(y - A(x_0 + \lambda z), -\lambda z) \geqslant 0$, pa je $(y - A(x_0 + \lambda z), z) \leqslant 0$ za svaki $z \in X$ i $\lambda > 0$. Puštajući $\lambda \searrow 0$ slijedi da je $(y - A(x_0), z) \leqslant 0$ za svaki $z \in X$. Uzimajući $x = x_0 - \lambda z$, $\lambda > 0$, dobivamo obrnutu nejednakost. Dakle, $(y - A(x_0), z) = 0$ za svaki $z \in X$. Slijedi da je $A(x_0) = y$.

Time smo pokazali da je A surjektivan operator. ■

Primjer 4.2.5 Promotrimo polulinearnu jednadžbu

$$\begin{cases} -u'' + g(u) = f(x), \ x \in \langle 0, 1 \rangle \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases},$$

gdje su $f \in L^2([0,1])$ i $g \in C^{1-}(\mathbb{R})$ (g je lokalno Lipschitzova na $\mathbb{R}$, tj. Lipschitzova je na svakom kompaktu). Kako se u jednadžbi pojavljuje druga derivacija od u, rješenje ćemo tražiti u $H^1([0,1])$. Zbog homogenih Dirichletovih rubnih uvjeta, dovoljno je promatrati prostor $H^1_0([0,1])$. Dobivamo varijacijsku jednadžbu

$$\int_0^1 (u'\varphi' + g(u)\varphi) = \int_0^1 f\varphi, \quad \varphi \in H^1_0. \tag{VJ}$$

Znamo da je H_0^1 Hilbertov prostor sa skalarnim produktom

$$(u,v) = \int_0^1 u'v'.$$

Uočimo da je

$$\left| \int_0^1 f\varphi \right| \leqslant \|f\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2}\|\varphi\|_{H_0^1}$$

prema Cauchy-Schwarzovoj i Poincaréovoj nejednakosti. To znači da je $H_0^1 \ni \varphi \mapsto \int_0^1 f\varphi \in \mathbb{R}$ ograničen linearni funkcional, pa postoji jedinstveni $\bar{f} \in H_0^1$ takav da je

$$\int_0^1 f\varphi = \int_0^1 \bar{f}'\varphi', \ \forall\, \varphi \in H_0^1.$$

Kako je $u \in H_0^1$, znamo da je onda $u \in C([0,1])$ (preciznije, klasa $u \in H_0^1$ ima neprekidnog predstavnika). Po pretpostavci je $g \in C^{1-}([0,1]) \subseteq C([0,1])$, pa je $g(u) \in C([0,1])$ kao kompozicija neprekidnih funkcija. Slijedi da je $g(u) \in L^2([0,1])$. Kao i prije se pokaže da je $H_0^1 \ni \varphi \mapsto \int_0^1 g(u(x))\varphi(x) \in \mathbb{R}$ ograničen linearni funkcional, pa postoji jedinstveni $G(u) \in H_0^1$ takav da je

$$\int_0^1 g(u(x))\varphi(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(u(x))\varphi'(x), \ \forall\, \varphi \in H_0^1.$$

Time smo (VJ) preveli u

$$(u,\varphi) + (G(u),\varphi) = (\bar{f},\varphi), \ \forall\, \varphi \in H_0^1,$$

tj.

$$(u + G(u) - \bar{f}, \varphi) = 0, \ \forall\, \varphi \in H_0^1.$$

Dakle, dobili smo jednadžbu $u + G(u) = \bar{f}$. Ako definiramo $A = \mathrm{Id} + G$, dobivamo $A(u) = \bar{f}$, što znači da trebamo pokazati da je A surjekcija kako bi dokazali da početni rubni problem ima rješenje.

- A neprekidan

  Kako je Id neprekidan, dovoljno je provjeriti da je $G : H_0^1 \to H_0^1$ neprekidan. Neka niz (u_n) konvergira prema u u H_0^1. Tada (u_n) konvergira prema u i u $C([0,1])$, pa postoji segment $[a,b]$ takav da je $u([0,1]) \subseteq [a,b]$ i $u_n([0,1]) \subseteq [a,b]$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Neka je $L \geqslant 0$ Lipschitzova konstanta od g na $[a,b]$. Slijedi da je

$$\|G(u_n) - G(u)\|_{H_0^1} = \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1} \leqslant 1} (G(u_n) - G(u), \varphi) = \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1} \leqslant 1} \int_0^1 (g(u_n) - g(u))\varphi$$

$$\leqslant \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1}\leqslant 1} (\|g(u_n)-g(u)\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}) \leqslant \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1}\leqslant 1} \Big(\|g(u_n)-g(u)\|_{L^2}\|\varphi\|_{H_0^1}\Big)$$
$$= \|g(u_n)-g(u)\|_{L^2} \leqslant \|g(u_n)-g(u)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |g(u_n(x))-g(u(x))|$$
$$\leqslant \sup_{x\in[0,1]} L|u_n(x)-u(x)| = L\|u_n-u\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Dakle, $G(u_n)\to G(u)$, što smo i trebali pokazati.

- A monoton

  Pretpostavimo da je g rastuća funkcija. Tada za svaki $u, v \in H_0^1$ vrijedi

$$(A(u)-A(v), u-v) = (u+G(u)-v-G(v), u-v)$$
$$= \|u-v\|_{H_0^1}^2 + \int_0^1 (g(u)-g(v))(u-v) \geqslant \|u-v\|_{H_0^1}^2,$$

  što povlači da je A strogo monoton.

- Zbog stroge monotonosti je A i koercitivan.

Prema Teoremu 4.2.4 je A surjektivan.

Poglavlje 5

Varijacijske nejednakosti

5.1 Varijacijske nejednakosti u Hilbertovim prostorima

Primjer 5.1.1

1. Neka je $f \in C^1([0,1])$. Tada postoji $x_0 \in [0,1]$ takav da je $\inf_{x\in[0,1]} f(x) = f(x_0)$. Što možemo reći o $f'(x_0)$? Imamo tri slučaja: ako je $x_0 \in \langle 0,1\rangle$, onda je $f'(x_0) = 0$; ako je $x_0 = 0$, onda je $f'(x_0) \geqslant 0$; ako je $x_0 = 1$, onda je $f'(x_0) \leqslant 0$. Lako se vidi da su ta tri slučaja ekvivalentna s $(\forall\, x \in [0,1])\ f'(x_0)(x - x_0) \geqslant 0$.

2. Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan i kompaktan skup, $f \in C^1(K)$ i $\inf_{x\in K} f(x) = f(x_0)$ za neki $x_0 \in K$. Može se pokazati da je tada $(\nabla f(x_0), x - x_0) \geqslant 0$ za svaki $x \in K$.

3. Neka je $P \in C([0,1])$ funkcija takva da je $P(0), P(1) \leqslant 0$ i $\max_{x\in[0,1]} P(x) > 0$. Funkciju P zovemo *prepreka*. Promotrimo prostor $C_0^1([0,1]) = \{v \in C([0,1]) : v(0) = v(1) = 0\}$ i definirajmo $K = \{v \in C_0^1([0,1]) : (\forall\, x \in [0,1])\ v(x) \geqslant P(x)\}$. Može se pokazati da je $K \subseteq C_0^1([0,1])$ konveksan i zatvoren podskup. Zanima nas postiže li se
$$\inf_{u\in K} \int_0^1 u'^2$$
na K. To odgovara napetoj žici čiji su rubovi učvršćeni u $(0,0)$ i $(1,0)$ te koja prelazi prepreku. Pretpostavimo da se infimum postiže u $u_0 \in K$ te neka je $u \in K$ proizvoljan. Kako je K konveksan, vrijedi $[u_0, u] \subseteq K$, pa definiramo
$$\varphi(\lambda) = \int_0^1 [(u_0 + \lambda(u - u_0))']^2$$
za $\lambda \in [0,1]$. Vidimo da je
$$0 \leqslant \varphi'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\varphi(\lambda)\Big|_{\lambda=0} = 2\int_0^1 u_0'(u - u_0)'.$$

Dakle, vrijedi

$$\int_0^1 u_0'(u-u_0)' \geqslant 0$$

za svaki $u \in K$.

Definicija 5.1.2 Neka je X Hilbertov prostor i $a : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je a:

- *bilinearna forma* ako je linearna po obje varijable,
- *neprekidna forma* ako postoji $M > 0$ takav da je $|a(u,v)| \leqslant M\|u\|\|v\|$ za sve $u, v \in X$,
- *X-eliptička (eliptička) forma* ako postoji $c > 0$ takav da je $a(u,u) \geqslant c\|u\|^2$ za svaki $u \in X$,
- *simetrična forma* ako je $a(u,v) = a(v,u)$ za sve $u, v \in X$.

Primjer 5.1.3

1. Skalarni produkt $(\cdot,\cdot)$ je bilinearna, neprekidna ($|(u,v)| \leqslant \|u\|\|v\|$), eliptička ($(u,u) = \|u\|^2$) i simetrična forma.
2. Neka je $X = \mathbb{R}^n$ i $A \in M_n$. Definiramo $a(x,y) = (Ax, y)$. Vidimo da je a bilinearna forma. Vrijedi $|a(x,y)| \leqslant \|A\|\|x\|\|y\|$, pa je a neprekidna forma. Uočimo da je $a(x,y) = a(y,x)$ ako i samo ako je $(Ax,y) = (x,Ay)$, pa je a simetrična forma ako i samo ako je A simetrična matrica. Po definiciji, a je eliptička forma ako i samo ako je A pozitivno definitna matrica.
3. Neka je $X = H_0^1([0,1])$. Definiramo

   $$a(u,v) = \int_0^1 pu'v', \quad u, v \in H_0^1,$$

   gdje je $p \in C([0,1])$ takav da je $p(x) \geqslant p_0 > 0$ za svaki $x \in [0,1]$. Lako se vidi da je a bilinearna, simetrična i neprekidna forma. Eliptičnost slijedi iz

   $$a(u,u) = \int_0^1 pu'^2 \geqslant p_0 \int_0^1 u'^2 = p_0\|u\|^2_{H_0^1}.$$

Zadatak 5.1.4 Definiramo

$$a(u,v) = \int_0^1 (u'v' + qu'v), \quad u, v \in H_0^1,$$

gdje je $q \in C^1([0,1])$. Kakva je a forma ovisno o q?

Zadatak 5.1.5 Neka je a bilinearna, neprekidna, eliptička i simetrična forma. Dokažite da je tada a skalarni produkt te da je norma inducirana tim skalarnim produktom ekvivalentna polaznom.

Neka je $a : X \times X \to \mathbb{R}$, $f \in X'$ i $K \subseteq X$ konveksan i zatvoren. Zanima nas postoji li $u \in K$ koji zadovoljava *apstraktnu varijacijsku nejednakost*

$$a(u, v-u) \geqslant f(v-u), \ \forall\, v \in K. \tag{AVN}$$

Teorem 5.1.6 (Stampacchia) Neka je a bilinearna, neprekidna, X-eliptička forma, $f \in X'$ i $K \subseteq X$ konveksan, zatvoren i neprazan skup. Tada (AVN) ima točno jedno rješenje u_f. Štoviše, vrijedi $\|u_f - u_g\| \leqslant \frac{1}{c}\|f-g\|$ za sve $f, g \in X'$.

Dokaz. Dokažimo najprije posljednju tvrdnju pretpostavljajući egzistenciju rješenja. Neka su $f, g \in X'$ i $u_f, u_g \in K$ neka pripadna rješenja od (AVN). To znači da je

$$a(u_f, v-u_f) \geqslant f(v-u_f) \text{ i } a(u_g, v-u_g) \geqslant g(v-u_g)$$

za svaki $v \in K$. Posebno, to znači da je

$$a(u_f, u_g-u_f) \geqslant f(u_g-u_f) \text{ i } a(u_g, u_f-u_g) \geqslant g(u_f-u_g).$$

Zbrajanjem tih nejednakosti dobivamo da je

$$-a(u_f-u_g, u_f-u_g) \geqslant (g-f)(u_f-u_g).$$

Slijedi da je

$$c\|u_f-u_g\|^2 \leqslant a(u_f-u_g, u_f-u_g) \leqslant (f-g)(u_f-u_g) \leqslant \|f-g\|\|u_f-u_g\|,$$

tj. $\|u_f-u_g\| \leqslant \frac{1}{c}\|f-g\|$.

Jedinstvenost rješenja (AVN) slijedi iz dokazane nejednakosti (stavimo $g=f$). Preostaje pokazati egzistenciju, i to ćemo učiniti u nekoliko koraka.

1. Neka je a dodatno simetrična forma. Definirajmo funkcional $J : X \to \mathbb{R}$ s $J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - f(u)$ za svaki $u \in X$. Jer su a i f neprekidni, slijedi da je J neprekidan. Uočimo da je

   $$J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - f(u) \geqslant \frac{1}{2}c\|u\|^2 - \|f\|\|u\| = \frac{1}{2}\|u\|(c\|u\| - 2\|f\|),$$

   iz čega slijedi da je J koercitivan. Stoga infimum od J na K možemo tražiti na ograničenom, konveksnom i zatvorenom podskupu od K. Iz Zadatka 5.1.5 slijedi da je $u \mapsto a(u,u)$ strogo konveksno preslikavanje, a kako je f linearno, slijedi da je J strogo konveksan. Prema Korolaru 4.1.16 slijedi da J poprima jedinstveni minimum na K.

   Neka je $u \in K$ točka minimuma od J na K. Neka je $v \in K$ proizvoljan. Definiramo $\varphi(\lambda) = J(u + \lambda(v-u))$ za $\lambda \in [0,1]$. Kako je K konveksan, vrijedi $[u,v] \subseteq K$, pa φ poprima minimum u $\lambda = 0$ i $\varphi'(0) \geqslant 0$. Slijedi da je

   $$0 \leqslant \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} J(u + \lambda(v-u))\Big|_{\lambda=0}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{1}{2}a(u+\lambda(v-u), u+\lambda(v-u)) - f(u+\lambda(v-u))\right)\bigg|_{\lambda=0} \\
&= \left(\frac{1}{2}a(v-u, u+\lambda(v-u)) + \frac{1}{2}a(u+\lambda(v-u), v-u) - f(v-u)\right)\bigg|_{\lambda=0} \\
&= a(u, v-u) - f(v-u).
\end{aligned}
$$

Dakle, $u \in K$ je rješenje (AVN).

2. Neka nadalje a nije simetrična. Definiramo $a_{\mathrm{sym}}(u,v) = \frac{1}{2}(a(u,v) + a(v,u))$ (simetrični dio od a), $a_{\mathrm{skw}}(u,v) = \frac{1}{2}(a(u,v) - a(v,u))$ (asimetrični dio od a) i $A_\lambda(u,v) = a_{\mathrm{sym}}(u,v) + \lambda a_{\mathrm{skw}}(u,v)$ za $\lambda \in [0,1]$. Uočimo da je $A_1 = a$, A_λ je bilinearna, neprekidna i eliptička s konstantom c ($A_\lambda(u,u) = a(u,u) \geqslant c\|u\|^2$).

3. Definiramo
$$
m := \sup_{u,v\neq 0} \frac{|a_{\mathrm{skw}}(u,v)|}{\|u\|\|v\|}.
$$
Uočimo da je $m \in \langle 0, +\infty\rangle$. Fiksirajmo $\varkappa \in \langle 0, \frac{c}{m}\rangle$. Dokažimo da ako (AVN) ima rješenje za neki $\lambda_0 \in [0,1]$ za sve $f \in X'$, onda (AVN) ima rješenje za sve $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \varkappa]$ i sve $f \in X'$. Primijetimo da ćemo time dokazati egzistenciju rješenja (AVN) za $\lambda = 1$ jer smo pokazali egzistenciju za $\lambda_0 = 0$.

   Neka (AVN) ima rješenje za neki $\lambda_0 \in [0,1]$ za sve $f \in X'$. Neka su $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \varkappa]$ i $f \in X'$ proizvoljni. Za $w \in X$ definiramo $F_w(v) = f(v) - (\lambda - \lambda_0)a_{\mathrm{skw}}(w,v)$. Vidimo da je $F_w \in X'$, pa po pretpostavci (i dokazanoj jedinstvenosti) postoji jedinstveni $u \in K$ takav da je $A_{\lambda_0}(u, v-u) \geqslant F_w(v-u)$ za svaki $v \in K$. Zbog toga je $T : X \to K$ dobro definirano s $T(w) = u$. Neka su $w_1, w_2 \in X$ proizvoljni. Pokazali smo da je $\|T(w_1) - T(w_2)\| \leqslant \frac{1}{c}\|F_{w_1} - F_{w_2}\|$. Vidimo da je

$$
\begin{aligned}
\|F_{w_1} - F_{w_2}\| &= \sup_{v\neq 0} \frac{|(F_{w_1} - F_{w_2})(v)|}{\|v\|} = \sup_{v\neq 0} \frac{|(\lambda - \lambda_0)a_{\mathrm{skw}}(w_1 - w_2, v)|}{\|v\|} \\
&\leqslant |\lambda - \lambda_0| \sup_{z,v\neq 0} \frac{|a_{\mathrm{skw}}(z,v)|}{\|z\|\|v\|}\|w_1 - w_2\| \leqslant \varkappa m\|w_1 - w_2\|,
\end{aligned}
$$

   pa je
$$
\|T(w_1) - T(w_2)\| \leqslant \frac{\varkappa m}{c}\|F_{w_1} - F_{w_2}\|,
$$
   što znači da je T $\frac{\varkappa m}{c}$-kontrakcija jer je $\frac{\varkappa m}{c} < 1$. Prema Teoremu 2.1.3 slijedi da T ima jedinstvenu fiksnu točku $u \in K$. Slijedi

$$
\begin{gathered}
A_{\lambda_0}(u, v-u) \geqslant F_u(v-u), \ \forall v \in K \\
a_{\mathrm{sym}}(u, v-u) + \lambda_0 a_{\mathrm{skw}}(u, v-u) \geqslant f(v-u) - (\lambda - \lambda_0)a_{\mathrm{skw}}(u, v-u), \ \forall v \in K \\
A_\lambda(u, v-u) \geqslant f(v-u), \ \forall v \in K,
\end{gathered}
$$

   tj. u je rješenje (AVN) za λ.

∎

Primijetimo da smo u dokazu pokazali, kada je a dodatno simetrična forma, da je u rješenje (AVN) ako i samo ako je u minimum funkcionala $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - f(v)$ na K.

Neka je K zatvoren potprostor od X i neka postoji $u \in K$ takav da vrijedi $a(u, v-u) \geqslant f(v-u)$, $v \in K$. Kako je K potprostor, to je ekvivalentno s $a(u,\varphi) \geqslant f(\varphi)$, $\varphi \in K$. Iz toga slijedi da je $a(u,-\varphi) \geqslant f(-\varphi)$, $\varphi \in K$, pa je zbog linearnosti $a(u,\varphi) \leqslant f(\varphi)$, $\varphi \in K$. Dakle, $u \in K$ je rješenje (AVN) ako i samo ako je rješenje *varijacijske jednakosti* $a(u,\varphi) = f(\varphi)$, $\varphi \in K$. Posebno, ako je $K = X$, Teorem 5.1.6 pokazuje da varijacijska jednakost $a(u,\varphi) = f(\varphi)$, $\varphi \in X$, ima jedinstveno rješenje, što je tvrdnja Lax-Milgramove leme.

Primjer 5.1.7 Promatrajmo $H_0^1([0,1])$ i definirajmo

$$a(u,v) = \int_0^1 u'v'$$

za sve $u, v \in H_0^1([0,1])$. Neka je $f \in L^2([0,1])$ i $P \in C^1([0,1])$ takav da je $P(0) < 0$ i $P(1) < 0$. Definiramo $K = \{v \in H_0^1 : v \geqslant P\}$. Skup K je konveksan, zatvoren i neprazan. Zanima nas ima li varijacijska nejednakost

$$\int_0^1 u'(v'-u') \geqslant \int_0^1 f(v-u), \;\; v \in K,$$

rješenje $u \in K$. Znamo da je ekvivalentno tražiti

$$\inf_{v\in K} \left(\frac{1}{2} \int_0^1 v'^2 - \int_0^1 fv \right).$$

Pretpostavimo da je $u \in K$ rješenje. Definiramo skup incidencije (dodira) $I = \{x \in [0,1] : u(x) = P(x)\} \subseteq \langle 0,1 \rangle$. Uočimo da je $I = (u-P)^{-1}(0)$, a kako su u i P neprekidne funkcije, slijedi da je I zatvoren skup, pa i kompaktan. Definiramo $\mathcal{O} = [0,1] \setminus I$, što je onda otvoren skup u $[0,1]$, i vrijedi $u(x) > P(x)$ za sve $x \in \mathcal{O}$.

Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(\langle 0,1 \rangle)$, $\varphi \geqslant 0$, proizvoljan. Tada je $u + \varphi \in H_0^1$ i $u + \varphi \geqslant P$, tj. $\varphi \in K$. To znači da je

$$\int_0^1 u'\varphi' \geqslant \int_0^1 f\varphi, \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\langle 0,1 \rangle), \varphi \geqslant 0.$$

Stoga je, u smislu distribucija (s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ označavamo djelovanje distribucije na test-funkciju),

$$-\langle u'', \varphi \rangle \geqslant \langle f, \varphi \rangle, \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\langle 0,1 \rangle), \varphi \geqslant 0,$$

tj.

$$\langle -u'' - f, \varphi \rangle \geqslant 0, \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\langle 0,1 \rangle), \varphi \geqslant 0.$$

Dakle, $-u'' - f$ je nenegativna distribucija, što povlači da je $-u'' - f$ nenegativna Radonova mjera μ. Slijedi da je $-u'' = f + \mu$ u $\mathcal{D}'(\langle 0,1 \rangle)$.

Dokažimo da je $-u'' = f$ s.s. na $\mathcal{O}$. Neka je $y \in \mathcal{O} \setminus \{0,1\}$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $\langle y-\varepsilon, y+\varepsilon\rangle \subseteq \mathcal{O}$. Označimo

$$d := \inf_{x \in \langle y-\varepsilon, y+\varepsilon\rangle} (u(x) - P(x)) > 0.$$

Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(\langle y-\varepsilon, y+\varepsilon\rangle)$, $\varphi \neq 0$, proizvoljan. Uočimo da je

$$u \pm d\frac{\varphi}{\|\varphi\|_\infty} \in K,$$

pa je

$$\int_0^1 u' \left(\pm d\frac{\varphi}{\|\varphi\|_\infty}\right)' \geqslant \int_0^1 f\left(\pm d\frac{\varphi}{\|\varphi\|_\infty}\right).$$

Slijedi da je

$$\int_0^1 u'\varphi' = \int_0^1 f\varphi,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\langle y-\varepsilon, y+\varepsilon\rangle),$$

tj.

$$-\langle u'', \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\langle y-\varepsilon, y+\varepsilon\rangle).$$

Dakle, $-u'' = f$ u $\mathcal{D}'(\langle y-\varepsilon, y+\varepsilon\rangle)$, pa je $-u'' = f$ s.s. na $\mathcal{O}$.

Pokazali smo da je $\operatorname{supp}\mu \subseteq I$. Kako je I kompaktan, slijedi da je $\mu(I) < +\infty$, a time je $\mu([0,1]) = \mu(I) < +\infty$. Stoga možemo definirati $\psi(x) = \mu(\langle 0, x\rangle)$. Vidimo da je ψ rastuća (μ je nenegativna mjera) i ograničena (μ je konačna mjera) funkcija. Slijedi da ψ ima najviše prebrojivo točaka prekida i svi su prve vrste (postoji $\psi(x_-)$ i $\psi(x_+)$). Može se pokazati da je $\psi' = \mu$ u $\mathcal{D}'$ (nećemo dokazivati).

Neka je F primitivna funkcija za f. Slijedi da je $u' = -F - \psi + C$ za neku konstantu C. Za $x > y$ vrijedi

$$|F(x) - F(y)| = \left|\int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|1\|_{L^2([y,x])}\|f\|_{L^2([y,x])} \leqslant \|f\|_{L^2([0,1])}\sqrt{x-y},$$

tj.

$$\frac{|F(x) - F(y)|}{(x-y)^{\frac{1}{2}}}$$

je ograničeno, što znači da je F Hölder neprekidna s eksponentom $\frac{1}{2}$. Posebno, F je neprekidna. Kako je $\operatorname{supp}\mu \subseteq I$, slijedi da je ψ konstantna na $\mathcal{O}$. Dakle, u' je neprekidna na $\mathcal{O}$.

Može se pokazati da ako je P konveksna, onda je u' neprekidna na $\langle 0,1\rangle$ (Kinderlehrer, Stampacchia).

Primjer 5.1.8 Neka je $f < 0$ konstanta i $P(x) = d < 0$. Po prošlom primjeru je $u \in C_0^1([0,1])$.

Rješavanjem $-u'' = f$ na $\langle 0,1\rangle$ uz $u(0) = u(1) = 0$ dobivamo $u(x) = \frac{f}{2}x(1-x)$. Dakle, ako je $d \leqslant u(\frac{1}{2}) = \frac{f}{8}$, nema prepreke.

Neka je $d > \frac{f}{8}$ i $z = \min I > 0$. Tada je $\langle 0, z\rangle \subseteq \mathcal{O}$, pa vrijedi $-u'' = f$ na $\langle 0, z\rangle$, $u(0) = 0$ i $u(z) = d$. Iz diferencijalne jednadžbe i lijevog rubnog uvjeta slijedi da je $u(x) = ax(b - x)$ za neke $a, b \in \mathbb{R}$. Vidimo da je $-u'' = 2a$, pa je $a = \frac{f}{2}$. Zbog $u \in C^1$ i $u \geqslant d$ slijedi da je $u'(z) = 0$, što povlači da je $b = 2z$. Iz $u(z) = d$ slijedi da je $z = \sqrt{2d/f}$. Dakle, po simetričnosti, rješenje je

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{f}{2}x\left(2\sqrt{2d/f} - x\right), & x \in \left[0, \sqrt{2d/f}\right\rangle \\ 0, & x \in \left[\sqrt{2d/f}, 1 - \sqrt{2d/f}\right] \\ \dfrac{f}{2}\left(x - \left(1 - 2\sqrt{2d/f}\right)\right)(1 - x), & x \in \left\langle 1 - \sqrt{2d/f}, 1\right] \end{cases}.$$