Drugi kolokvij, 07.02.2014.
Rješenja zadataka

1. *(4 boda)* Neka je $f(x) = \dfrac{x^3+5x^2-8x-48}{3x^3+x^2-38x+24}$, izračunajte $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ te $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ za $c=3$, $c=1$ i $c=-4$.
Rješenje.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{5}{x}-\frac{8}{x^2}-\frac{48}{x^3}}{3+\frac{1}{x}-\frac{38}{x^2}+\frac{24}{x^3}} = \frac{1}{3},\\
\lim_{x\to 3} f(x) &= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 3} \frac{3x^2+10x-8}{9x^2+2x-38} = \frac{49}{49} = 1,\\
\lim_{x\to 1} f(x) &= \frac{-50}{-10} = 5,\\
\lim_{x\to -4} f(x) &= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -4} \frac{3x^2+10x-8}{9x^2+2x-38} = \frac{0}{98} = 0.
\end{aligned}$$

2. Izračunajte:

(a) *(2 boda)* $f'(x)$ za $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1+2x) + \cos\left(x^2-2x+1\right) - e^{-x}$,

(b) *(3 boda)* $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x$.

Rješenje.

(a) $f'(x) = \dfrac{1}{1+2x} - 2\cdot(x-1)\cdot\sin\left(x^2-2x+1\right) + e^{-x}$,

(b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} y & = \sin x \\ \mathrm{d}y & = \cos x\,\mathrm{d}x \end{array}\right\} = \int \frac{1}{1+2y}\,\mathrm{d}y =$ ((**a**) dio zadatka) $= \dfrac{1}{2}\ln|1+2y| + C = \dfrac{1}{2}\ln|1+2\sin x| + C$.

3. *(10 bodova)* Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \ln\left(e^x + e^{-x}\right)$. Odredite jednadžbu i nacrtajte tangentu na graf funkcije $f(x)$ u točki $x=1$. Ima li i u kojim točkama funkcija $f(x)$ lokalni/globalni minimum/maksimum?
Rješenje. Očito je domena funkcije cijeli $\mathbb{R}$. Dakle, nema vertikalnih asimptota, kada $x\to-\infty$, onda znamo da $e^{-x}\to+\infty$, odnosno $f(x)\to+\infty$, isti zaključak imamo i kada $x\to+\infty$. Dakle, nema niti horizontalnih asimptota. Tražimo kose asimptote:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= -\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{-x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = -\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}{-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = -1,\\
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1.
\end{aligned}$$

Dalje računamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} (f(x)+x) &= \lim_{x\to-\infty} \ln\left(e^{f(x)+x}\right) = \ln\left(\lim_{x\to-\infty}\left(e^{f(x)}\cdot e^x\right)\right)\\
&= \ln\left(\lim_{x\to-\infty}\left(\left(e^x+e^{-x}\right)\cdot e^x\right)\right) = \ln\left(\lim_{x\to-\infty}\left(e^{2x}+1\right)\right) = \ln 1 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) &= \lim_{x\to+\infty}\ln\left(e^{f(x)-x}\right)=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(e^{f(x)}\cdot e^{-x}\right)\right)\\ &=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\left(e^x+e^{-x}\right)\cdot e^{-x}\right)\right)=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+e^{-2x}\right)\right)=\ln 1=0.\end{aligned}$$

Dakle, imamo dvije kose asimptote, $y = x$ i $y = -x$. Dalje računamo prvu i drugu derivaciju.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \tfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\\ f''(x) &= \tfrac{\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=\tfrac{4}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}.\end{aligned}$$

Zaključujemo da postoji jedna stacionarna točka, to je $x = 0$ i u njoj funkcija postiže lokalni, ali i globalni minimum $y = \ln 2$. Druga derivacija funkcije je pozitivna za svaki $x \in \mathbb{R}$ pa zaključujemo da funkcija nema točaka infleksije te da je konveksna nad cijelom domenom. Graf je sada lako nacrtati...
Traimo jednadžbu tangente u točki $x_0 = 1$, vidimo da je $y_0 = f(x_0) = \ln\left(e + \frac{1}{e}\right)$, također je $f'(x_0) = f'(1) = \frac{e-\frac{1}{e}}{e+\frac{1}{e}} = \frac{e^2-1}{e^2+1}$. Konačno imamo jednadžbu tangente (koju sada i lako nacrtamo):

$$y-\ln\left(e+\frac{1}{e}\right)=\frac{e^2-1}{e^2+1}\cdot(x-1).$$

4. *(4 boda)* Izračunajte: $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}\int_1^2 \tfrac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x &= \left\{\begin{array}{c} t=\frac{1}{x},\ 1\to 1,\ 2\to\frac{1}{2}\\ \mathrm{d}t=-\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \mathrm{d}x=-x^2\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\end{array}\right\}\\ &= -\int_1^{\frac{1}{2}} te^t\,\mathrm{d}t=\left\{\begin{array}{ll} u=t & \mathrm{d}u=\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}v=e^t\,\mathrm{d}t & v=e^t\end{array}\right\}\\ &= -te^t\Big|_1^{\frac{1}{2}}+\int_1^{\frac{1}{2}} e^t\,\mathrm{d}t=-\tfrac{1}{2}\sqrt{e}+e+e^t\Big|_1^{\frac{1}{2}}=-\tfrac{1}{2}\sqrt{e}+e+\sqrt{e}-e=\tfrac{\sqrt{e}}{2}.\end{aligned}$$

5. *(5 bodova)* Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Rješenje. Odmah vidimo da je domena $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, također, imamo vertikalnu asimptotu $x = -1$ te lako vidimo da je limes slijeva jedna $-\infty$, a onaj zdesna jednak $+\infty$. Nadalje, horizontalnih asimptota nema, što se vidi direktno, dakle, tražimo kose. $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x) = -1$. Imamo kosu asimptotu $y = x - 1$. Lako računamo prve dvije derivacije: $f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$, $\quad f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$. Vidimo da funkcija poprima lokalni maksimum u točki $x = -2$ i on iznosi -4, također, poprima lokalni minimum u $x = 0$ i on iznosi 0. Funkcija nema točaka infleksije, ali vidimo da je konkavna na $\langle -\infty, -1\rangle$ te konveksna na $\langle -1, +\infty\rangle$. Graf se sada lako nacrta...