

Ime i prezime: _____ Broj bodova: _____

Matematika, PD Biologija — *Kolokvij br. 1*

18. 11. 2011.

Nije dozvoljeno koristiti nikakva pomagala osim pribora za pisanje i brisanje.

Vrijeme rješavanja: **120 minuta**. Ukupni broj bodova: **40**.

1. (*2 boda*) Nađite x i y koji zadovoljavaju jednakost

$$\begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

2. (*3 boda*) Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

izračunajte

$$A^{-1}(A^2 + A^{-1})(A + A^{-2}) - (2A^{-1} + A^{-4}).$$

3. U sljedećem sustavu linearnih jednadžbi desna strana nije vidljiva.

$$\begin{array}{rrcrcl} 3x & + & 2y & + & z & = & \blacksquare \\ x & + & 2y & + & 3z & = & \blacksquare \\ x & - & 2y & - & 5z & = & \blacksquare \end{array}$$

- (a) (3 boda) Izračunajte rang (neproširene) matrice sustava.
- (b) (1 bod) Ukoliko je poznato da sustav ima barem jedno rješenje, nađite rang proširene matrice sustava.
- (c) (2 boda) Koji rezultat s predavanja ste koristili u (b) dijelu zadatka? Navedite ime i formulaciju tog teorema.

4. (3 boda) Ispitajte jesu li vektori

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

linearno nezavisni. Svoj odgovor obavezno potvrdite računom i/ili obrazloženjem.

5. Neka su A i B dvije kvadratne matrice reda 2011 takve da je

$$\det A = 3, \quad \det B = -2.$$

(a) (2 boda) Izračunajte $\det(A^2 B^3)$.

(b) (2 boda) Koji rezultat s predavanja ste koristili u (a) dijelu zadatka? Navedite ime i formulaciju tog teorema.

6. (2 boda) Riješite jednadžbu

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ x & x & x \\ 3 & x & 4 \end{vmatrix} = 20.$$

7. (a) (3 boda) Izračunajte determinantu matrice

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(b) (1 bod) Postoji li inverz gornje matrice?

8. Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektori u $\mathbb{R}^3$. Koji od sljedećih izraza su dobro definirani (tj. imaju smisla). Označite svoj odgovor u odgovarajućoj kućici. Obrazloženje nije potrebno.

- | | | | |
|-------------|---|--|---|
| (a) (1 bod) | $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b}$ | ☐ dobro definiran | ☐ nije dobro definiran |
| (b) (1 bod) | $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$ | ☐ dobro definiran | ☐ nije dobro definiran |
| (c) (1 bod) | $(\vec{a} \cdot \vec{c}) \times (\vec{b} \cdot \vec{c})$ | ☐ dobro definiran | ☐ nije dobro definiran |
| (d) (1 bod) | $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ | ☐ dobro definiran | ☐ nije dobro definiran |
| (e) (1 bod) | $\left((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \right) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ | ☐ dobro definiran | ☐ nije dobro definiran |

9. (a) (3 boda) Ispitajte sijeku li se sljedeća dva pravca zadana jednadžbama u kanonskom obliku:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{2}, \quad \frac{x+5}{5} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+5}{4}.$$

Ukoliko se sijeku, nađite njihovu točku presjeka.

(b) (2 boda) Izračunajte kut između gornjih pravaca.

10. (a) (3 boda) Riješite sljedeći sustav linearnih jednačbi Gaussovom metodom eliminacije.

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ & & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \end{array}$$

- (b) (1 bod) Što je to homogeni sustav linearnih jednačbi? Da li je gornji sustav homogen?
- (c) (2 boda) Koliko rješenja ima homogeni linearni sustav od 2000 jednačbi s 2011 nepoznanica? Argumentirajte odgovor pozivajući se na tvrdnje s predavanja ili obrazložite svojim riječima.