7.4. TEORIJA POLUGRUPA

ALTERNATIVNA TEHNIKA ZA EVOLUCIJSKE PROBLEME (LINEARNE)

7.4.1. DEFINICIJE

X - BANACHOV

PROMATRAMO C-ZADAĆU

$$(*) \quad \begin{cases} u'(t) = A\,u(t) & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

PRI ČEMU JE

$$' = \frac{d}{dt}$$

$X \ni u_0$ – ZADAN

$$A : D(A) \longrightarrow X, \qquad D(A) \subseteq X$$

LINEARAN OPERATOR DOMENA

NEOGRANIČEN, MOGUĆE DIFERENCIJALNI

ZANIMA NAS EGZISTENCIJA RJEŠENJA OD (*), TJ.

$u : [0, \infty\rangle \longrightarrow X.$

POLUGRUPE

NEKA (*) IMA JEDINSTVENO RJEŠENJE

$$u : [0, \infty\rangle \longrightarrow X$$

ZA SVAKI POČETNI UVJET.

DEFINIRAMO OPERATOR $S(t) : X \longrightarrow X$

$$u_0 \longmapsto u(t)$$

$$u(t) = S(t)\, u$$

SVOJSTVA:

1) $S(t) : X \to X$ JE L.O.

2) $S(0)\, u_0 = u_0 \quad , \quad u_0 \in X$

3) $S(t+s)\, u_0 = S(t)\, S(s)\, u_0 = S(s)\, S(t)\, u_0 \,, \quad t, s \geq 0, \; u_0 \in X$ (JEDINSTVENOST)

4) PRESLIKAVANJE $t \longmapsto S(t)\, u_0$ JE NEPREKIDNO
$[0, \infty\rangle \longrightarrow X$

DEF:

(i) FAMILIJA $(S(t))_{t \geq 0}$ OGRANIČENIH L.O $S(t) : X \to X$ NAZIVAMO POLUGRUPA AKO VRIJEDI 1) — 4).

(ii) $(S(t))_{t \geq 0}$ JE POLUGRUPA AKO VRIJEDI ,

$$\| S(t) \| \leq 1 \; , \quad t \geq 0$$

$\| \;\; \|$ JE OPERATORSKA NORMA NA X , $\quad \| S(t) u_0 \|_X \leq \| u_0 \|_X \, , \quad u_0 \in X, \; t \geq 0$

JE LI POLUGRUPA GENERIRANA S ODJ (*)?
AKO JEST, ZA KOJI A?

<u>DEF</u>: NEKA JE $(S(t))_{t\geq 0}$ POLUGRUPA NA X.

$$D(A) := \left\{ u_0 \in X : \lim_{t\to 0+} \frac{S(t)u_0 - u_0}{t} \text{ POSTOJI U } X \right\} \subseteq X$$

~~TADA~~ ZA $u_0 \in D(A)$

$$A u_0 := \lim_{t\to 0+} \frac{S(t)u_0 - u_0}{t}$$

$A : D(A) \longrightarrow X$ NAZIVAMO (INFINITEZIMALNI) GENERATOR POLUGRUPE $(S(t))_{t\geq 0}$

$D(A)$ NAZIVAMO DOMENA OD A.

<u>TEOREM 1</u> (DIFERENCIJALNA SVOJSTVA POLUGRUPA)

NEKA JE $u_0 \in D(A)$. TADA

(i) $S(t)u_0 \in D(A)$, $t \geq 0$,

(ii) $AS(t)u_0 = S(t)Au_0$, $t > 0$,

(iii) PRESLIKAVANJE $t \longmapsto S(t)u_0$ JE DIFERENCIJABILNO, $t > 0$,

(iv) $\frac{d}{dt} S(t)u_0 = AS(t)u_0$, $t > 0$.

<u>DOK</u>:

DOK: (i) ⇒ (ii)

$u_0 \in D(A)$

$$\lim_{s\to 0+} \frac{S(s)(S(t)u_0) - S(t)u_0}{s} = \lim_{s\to 0+} \frac{S(t)(S(s)u_0 - u_0)}{s}$$

$$= S(t) \lim_{s\to 0+} \frac{S(s)u_0 - u_0}{s} = S(t)Au_0$$

LIMES POSTOJI $\Rightarrow$ $\underset{(i)}{S(t)u_0 \in D(A)}$ & $\underset{(ii)}{AS(t)u_0 = \lim \dots = S(t)Au_0}$

(iii) ⇒ (iv)

$u_0 \in D(A)$, $h>0$, $t>0$

$$\lim_{h\to 0+} \left(\frac{S(t)u_0 - S(t-h)u_0}{h} - S(t)Au_0 \right)$$

$$= \lim_{h\to 0+} \left(S(t-h)\frac{S(h)u_0 - u_0}{h} - S(t)Au_0 \right)$$

$$= \lim_{h\to 0+} \Bigg(\underbrace{S(t-h)}_{\substack{\downarrow \\ S(t) \\ \text{ALI } \|S(t-h)\|\le 1}} \Bigg(\underbrace{\frac{S(h)u_0 - u_0}{h} - Au_0}_{\substack{\downarrow \\ 0}}\Bigg) + \underbrace{(S(t-h) - S(t))}_{\substack{\downarrow \\ 0}}\underbrace{Au_0}_{\substack{\downarrow \\ Au_0}} \Bigg)$$

$= 0$

SLIČNO

$$\lim_{h\to 0+} \frac{S(t+h)u_0 - S(t)u_0}{h} = S(t)\lim_{h\to 0} \frac{S(h)u_0 - u_0}{h} = S(t)Au_0$$

POSTOJE OBA LIMESA (LIJEVI I DESNI I JEDNAKI SU) $\Rightarrow$ $S(t)u_0$ JE DFB I VRIJEDI

$$\frac{d}{dt}(S(t)u_0) = S(t)Au_0 \overset{(ii)}{=} AS(t)u_0$$

NAP: U DEF SMO PRETPOSTAVILI $t \longmapsto S(t)u_0$ JE NEPREKIDNA. DOBILI SMO DA JE DFB, A JER JE $t \longmapsto AS(t)u_0$ NEPR. $\Rightarrow$ ~~KLASEČ~~ 'KLASIČ' JE ~~ZA~~ $u_0 \in D(A)$.

TEOREM 2

(i) $D(A)$ JE GUSTA U X

(ii) A JE ZATVOREN OPERATOR.

NAP: OPERATOR $A : X \to Y$ JE ZATVOREN AKO MU JE GRAF

$$\Gamma_A = \{ (x, Ax) : x \in D(A) \}$$

ZATVOREN. TO ZNAČI, $\forall \, (x_n, Ax_n) \to (x, y)$ U PRODUKTNOJ TOPOLOGIJI $X \times Y$, VRIJEDI $x \in D(A)$ & $y = Ax$.

DOK (i) NEKA JE $u_0 \in X$.

DEF:

$$u^t := \int_0^t S(s) u_0 \, ds$$

$t \longmapsto S(t) u_0$ JE NEPREKIDNA

$$\Rightarrow \quad \frac{u^t}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t S(s) u_0 \, ds \longrightarrow u_0 \qquad \text{(SREDNJA VRIJEDNOST)}$$

DAKLE $\frac{u^t}{t}$ JE APROKSIMIRAJUĆI NIZ ZA u_0.

TV: $u^t \in D(A)$ $\qquad (\Rightarrow D(A)$ JE GUST$)$

DOK: $r > 0$

$$\frac{S(r) u^t - u^t}{r} = \frac{1}{r} \left(S(r) \int_0^t S(s) u_0 \, ds - \int_0^t S(s) u_0 \, ds \right)$$

$$= \frac{1}{r} \int_0^t \left(S(r+s) u_0 - S(s) u_0 \right) ds$$

$$= \frac{1}{r} \int_r^{t+r} S(s) u_0 \, ds - \frac{1}{r} \int_0^t S(s) u_0 \, ds$$

$$= \underbrace{\frac{1}{r} \int_r^{t+r} S(s) u_0 \, ds - \frac{1}{r} \int_r^t S(s) u_0 \, ds}_{} - \frac{1}{r} \int_0^r S(s) u_0 \, ds$$

$$= \frac{1}{r} \int_t^{t+r} S(s) u_0 \, ds - \frac{1}{r} \int_0^r S(s) u_0 \, ds$$

$$\Longrightarrow \quad S(t) u_0 - u_0 \qquad \text{KAD } r \to 0^+$$

DAKLE LIMES POSTOJI $\longrightarrow$ $u^t \in D(A)$

USPUT
$$A u^t = S(t) u_0 - u_0$$

(ii) ZATVORENOST

NEKA JE $u_k \in D(A)$ T.D.

$$u_k \longrightarrow u, \quad Au_k \longrightarrow v \quad \text{u } X$$

TV: $u \in D(A)$ & $v = Au$.

DOK: ZNAMO:

$$\frac{d}{dt} S(t) u_k = A S(t) u_k \qquad \Big| \int_0^t$$

$$S(t) u_k - u_k = \int_0^t A S(s) u_k \, ds \qquad \Big| \lim_{k \to +\infty}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$S(t) u - u = \int_0^t S(s) v \, ds$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0+} \frac{S(t)u - u}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t} \int_0^t S(s) v \, ds = v$$

$$\Rightarrow u \in D(A) \ \& \ Au = v.$$

DEF: (i) $\rho(A) := \{ \lambda \in \mathbb{R} : \lambda I - A : D(A) \to X$ BIJEKCIJA $\}$

REZOLVENTNI SKUP OD A (KOMPLEMENT OD SPEKTRA)

(ii) ZA $\lambda \in \rho(A)$ DEF:

$$R_\lambda : X \to X, \qquad R_\lambda u_0 := (\lambda I - A)^{-1} u_0$$

REZOLVENTA

NAP: ZA $\lambda \in \rho(A)$ $\lambda I - A$ JE BIJEKTIVAN $: D(A) \to X$

$\Gamma_{(\lambda I - A)^{-1}} = X \times D(A) \Rightarrow R_\lambda$ JE ZATVOREN

TM. O ZATVORENOM GRAFU $\Rightarrow R_\lambda$ JE OGRANIČEN (L.O.)

VRIJEDI I

$$A R_\lambda u_0 = R_\lambda A u_0 \quad (\text{JER } \lambda I - A \text{ KOMUTIRA S } A)$$

TEOREM 3 (SVOJSTVA REZOLVENTE)

(i) ZA $\lambda, \mu \in \rho(A)$ $\quad R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$

$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$$

(ii) ZA $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$

$$R_\lambda u_0 = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u_0 \, dt \,, \quad u_0 \in X$$

$\Rightarrow \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$.

NAP: REZOLVENTA JE LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA POLUGRUPE.

DOK: KREĆEMO OD INTEGRALA. OZNAČIM GA SA $\tilde{R}_\lambda u_0$.
DOBRO JE DEF JER JE $\lambda > 0$ & $\|S(t)\| \leq 1$

POKAŽEMO

$$\lim_{h \to 0+} \frac{S(h) \tilde{R}_\lambda u_0 - \tilde{R}_\lambda u_0}{h} = -u_0 + \lambda \tilde{R}_\lambda u_0$$

$\Rightarrow \quad \tilde{R}_\lambda u_0 \in D(A)$ & $A \tilde{R}_\lambda u_0 = -u_0 + \lambda \tilde{R}_\lambda u_0$

$\Rightarrow (\lambda I - A) \tilde{R}_\lambda u_0 = u_0$

POKAŽEMO

$$\tilde{R}_\lambda A = A \tilde{R}_\lambda$$

$\longrightarrow \quad \lambda I - A : D(A) \to X$ ~~BIJ~~ BIJEKCIJA

$\Rightarrow \quad \tilde{R}_\lambda (\lambda I - A) u_0 = u_0$

$\Rightarrow$

7.4.2. HILLE-YOSIDA TEOREM

TEOREM 4 (HILLE-YOSIDA)

NEKA JE $A : D(A) \subseteq X \to X$ ZATVORENI OPERATOR, LINEAR. I DEFINIRAN NA GUSTOM PODSKUPU $D(A)$ OD X. TADA JE

$$A \text{ GENERATOR POLUGRUPE } (S(t))_{t \geq 0}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\langle 0, \infty \rangle \subset \rho(A) \quad \& \quad \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}, \; \lambda > 0$$

NAPOMENA: NEKA JE $\omega \in \mathbb{R}$.
AKO JE $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$, $t \geq 0$ ZA POLUGRUPU $(S(t))_{t \geq 0}$ ONDA JU NAZIVAMO ...
GENERALNIJA VERZIJA HILLE-YOSIDA TEOREMA KAŽE DA ZATVORENI, GUSTO DEFINIRANI L.O. A GENERIRA POLUGRUPU AKO I SAMO AKO

$$\langle \omega, \infty \rangle \subseteq \rho(A) \quad \& \quad \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \; \lambda > \omega.$$

7.4.3. PRIMJENE

PARABOLIČKA JEDNADŽBA

$$\begin{cases} u_t + Lu = 0 & \text{u } U_T \\ u = 0 & \text{NA } \partial U \times [0,T] \\ u = g & \text{NA } U \times \{0\} \end{cases}$$

$$Lu = -\operatorname{div}(\tilde{A} \nabla u) + b \cdot \nabla u + cu$$ DIVERGENTNI OBLIK

$\tilde{A}, b, c$ NEOVISNI O t !!!

U OGRANIČEN S GLATKIM RUBOM

$$X := L^2(U)$$

$$D(A) = H_0^1(U) \cap H^2(U)$$

$$Au := -Lu$$

ZNAMO DA VRIJEDI: $\exists\, \beta > 0, \gamma \geq 0$ T.D.

$$\beta \|u\|^2_{H_0^1(U)} \leq B[u,u] + \gamma \|u\|^2_{L^2(U)}, \quad u \in H_0^1(U).$$

TEOREM 5 OPERATOR A GENERIRA POLUGRUPU $(S(t))_{t \geq 0}$ NA $L^2(U)$.

DOK: IDEMO NA GENERALNI OBLIK H-Y TM.
UMJESTO ω : γ!

1. KORAK: $D(A) \subseteq X$ GUST (OČITO)

$$H_0^1(U) \cap H^2(U) \qquad L^2(U)$$

2. KORAK: A JE ZATVOREN

$(u_k)_k \subseteq D(A)$ ... $u_k \to u$, $Au_k \to f$ u X

TEOREM REGULARNOSTI ~~ZA~~ ZA ELIPTIČKU JEDNADŽBU TM4 §6.3.?

$$\|\tilde{u}\|_{H^2(U)} \leq C\left(\|\hat{f}\|_{L^2(U)} + \|\tilde{u}\|_{L^2(U)}\right)$$

D.S. JEDNADŽBE

$\Rightarrow$ $$\|u_k - u_e\|_{H^2(U)} \leq C\left(\|Au_k - Au_e\|_{L^2(U)} + \|u_k - u_e\|_{L^2(U)}\right)$$

Au_k C-NIZ u L^2 $\quad$ u_k C-NIZ u L^2

$\Rightarrow$ $(u_k)_k$ C-NIZ u $H^2(U)$

$\Rightarrow$ $u_k \to u$ $H^2(U)$

$\Rightarrow$ $u \in D(A)$!

$Au_k \to Au$ $L^2(U)$ $\Rightarrow$ $f = Au$

3. KORAK $\langle \gamma, \infty \rangle \subseteq \rho(A)$

TM 3 u § 6.2.1. (ENERGETSKE OCJENE):

$\forall \lambda \geq \gamma$ ZADAĆA: $(**) \begin{cases} Lu + \lambda u = f & u \ U \\ u = 0 & \text{na } \partial U \end{cases}$

IMA JEDINSTVENO SLABO RJEŠENJE $u \in H^1_0(U)$, $\forall f \in L^2(U)$.

REGULARNOST $\Rightarrow$ $u \in H^2(U) \cap H^1_0(U) = \mathcal{D}(A)$

"$L = -A$"

$$(\lambda I - A)u = f$$

$\forall f \in L^2(U) \ \exists! \ u \in \mathcal{D}(A)$ T.D. $\Big) \Rightarrow \lambda I - A : \mathcal{D}(A) \to X$ BIJEKCIJA

$\Rightarrow \quad \lambda \in \rho(A) \quad \Rightarrow \quad \langle \gamma, \infty \rangle \subseteq \rho(A)!$

4. KORAK: OCJENA ZA REZOLVENTU

SLABA FORMULACIJA OD $(**)$

$$B[u,v] + \lambda(u,v) = (f,v), \quad v \in H^1_0(U)$$

STAVIMO $v = u$

$$B[u,u] + \lambda(u,u) = (f,u)$$

ZA $\lambda > \gamma$

$$\underbrace{B[u,u] + \gamma(u,u)}_{\geq 0} + (\lambda - \gamma)\|u\|^2_{L^2(U)} = (f,u)$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda - \gamma)\|u\|^2_{L^2(U)} = (f,u) \leq \|f\|_{L^2(U)} \|u\|_{L^2(U)}$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda - \gamma)\|u\|_{L^2(U)} \leq \|f\|_{L^2(U)}$$

$$\Rightarrow \quad \|u\|_{L^2(U)} \leq \frac{1}{\lambda - \gamma}\|f\|_{L^2(U)}$$

$(\lambda I - A)u = f \Rightarrow u = R_\lambda f$

$$\Rightarrow \quad \|R_\lambda f\|_{L^2(U)} \le \frac{1}{\lambda-\gamma}\|f\|_{L^2(U)}$$

$$\Rightarrow \quad \|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda-\gamma}, \quad \lambda>\gamma$$

NAP: POLUGRUPE $\longrightarrow$ DAJU BOLJA RJEŠENJA (PRIJE REGULARNOSTI)
$\longrightarrow$ L NE OVISI O t!

$u(t) = S(t)g$, $g \in L^2(U)$, $u(t) \in L^2(U)$

$u \in C^1([0,T]; L^2(U))$

TM1 $\Rightarrow$ $g \in D(A) = H^1_0(U) \cap H^2(U)$

$\Rightarrow$ $u(t) = S(t)g \in D(A) = H^1_0(U) \cap H^2(U)$

$\Rightarrow$ $u \in C^1([0,T]; H^1_0(U) \cap H^2(U))$

NAP: U EVANSU POSTOJI I PRIMJER ~~ZA~~ HIPERBOLIČKU J.

NAP: ZA $\lambda \in \rho(A)$ $\lambda I - A : D(A) \to X$ BIJEKTIVAN

ZA GENERATOR POLUGRUPE POKAZALI SMO DA JE ZATVOREN. PROMATRAMO

$$\Gamma_{(\lambda I - A)^{-1}}$$

I TVRDIMO DA JE ZATVOREN.

DOK: NEKA JE $\Big(u_k, \underbrace{(\lambda I - A)^{-1} u_k}_{\Vert \atop v_k}\Big) \to (u, v)$ u $X \times X$.

$(v_k) \subseteq D(A)$ & $v_k \to v$ & $(\lambda I - A) v_k = u_k \to u$

$$\Downarrow$$

$$A v_k \to \lambda v - u$$

JER JE A ZATVOREN

$$\Rightarrow \lambda v - u = Av$$

$$\Rightarrow u = (\lambda I - A) v$$

$$\Rightarrow v = (\lambda I - A)^{-1} u$$

$\Rightarrow (\lambda I - A)^{-1}$ JE ZATVOREN

PO TEOREMU O ZATVORENOM GRAFU

$R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ JE OGRANIČEN L.O.

TAKOĐER VRIJEDI: $A R_\lambda u_0 = R_\lambda A u_0$

$$\Updownarrow$$

JER $(\lambda I - A) A R_\lambda u_0 = A u_0$

$$\Updownarrow$$

$$A \underbrace{(\lambda I - A) R_\lambda}_{\Vert \atop I} u_0 = A u_0$$

$$\Updownarrow$$

$$A u_0 = A u_0$$

HIPERBOLIČKA JEDNADŽBA

$$u_{tt} + Lu = 0 \qquad U \times \langle 0,T\rangle$$
$$u = 0 \qquad \partial U \times \langle 0,T\rangle$$
$$u = g \qquad t=0$$
$$u_t = h \qquad t=0$$

SUPSTITUCIJA: $v = u_t$

$$v_t + Lu = 0 \qquad U \times \langle 0,T\rangle$$
$$u_t - v = 0$$
$$u = v = 0 \qquad \partial U \times \langle 0,T\rangle$$
$$u = g \qquad t=0$$
$$v = h \qquad t=0$$

SUSTAV ZA $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I \\ L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{u } U \times \langle 0,T\rangle$$
$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{na } \partial U \times \langle 0,T\rangle$$
$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} \qquad \text{za } t=0$$

$$A = -\begin{bmatrix} 0 & -I \\ L & 0 \end{bmatrix}, \qquad X = H_0^1(U) \times L^2(U)$$
$$D(A) = \left(H^2(U) \cap H_0^1(U)\right) \times H_0^1(U)$$

PRETP: $b \equiv 0$ u DEF OD L & $c \geq 0$

$$Lu = -\operatorname{div}(A \nabla u) + \underbrace{b \cdot \nabla u}_{=0} + cu$$

TEOREM 6 A GENERIRA KONTRAKCIJSKU POLUGRUPU NA X

DOK: 1. KORAK: $D(A) \subseteq X$ GUST

$$\left(H^2(U)\cap H^1_0(U)\right)\times H^1_0(U) = D(A) \supseteq H^1_0(U)\times L^2(U)$$

2. KORAK: A JE ZATVOREN

$(u_k) \subseteq D(A)$ $\quad u_k \xrightarrow{H^1} u$, $\quad v_k \xrightarrow{L^2} v$ $\quad A(u_k,v_k) \to (f_1,f_2)$ u X

$\Downarrow$

$v_k \to f_1 \quad H^1$

$-Lu_k \to f_2 \quad L^2$

$H^1 \Rightarrow f_1 = v$

KAO U PRETHODNOM SLUČAJU PARABOLIKE

$u_k \to u \quad H^2$

&

$$\Rightarrow (u,v) \in \left(H^2(U)\cap H^1_0(U)\right)\times H^1_0(U) = D(A) \qquad f_2 = -Lu$$

&

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -Lu \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

3. KORAK $\lambda > 0$ $\quad (f_1,f_2)\in X$

$$\lambda\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - A\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \lambda u - v = f_1 \\ \lambda v + Lu = f_2 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$(*)$ $\lambda^2 u + Lu = \lambda f_1 + f_2$

$\parallel$

$(L+\lambda^2 I)u = \lambda f_1 + f_2$

ZA $b \geq 0$ & $c \geq 0$

KOERCITIVNOST + JEDINSTVENO RJ

$\Rightarrow \exists R_\lambda$ ZA $\lambda > 0 \Rightarrow \rho(A) \supseteq (0,+\infty)$

4. KORAK: iz $(*)_2$

$$\lambda \|v\|_{L^2}^2 + B[u,v] = (f_2, v)$$

iz $(*)_1$ $\quad v = \lambda u - f_1$

$$\lambda \|v\|_{L^2}^2 + \lambda B[u,u] = (f_2, v) + B[u, f_1]$$

$$\leq \|f_2\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + B[f_1,f_1]^{1/2} B[u,u]^{1/2}$$

$$\leq \left(\|f_2\|_{L^2}^2 + B[f_1,f_1]\right)^{1/2} \left(\|v\|_{L^2}^2 + B[u,u]\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \left(\|v\|_{L^2}^2 + B[u,u]\right)^{1/2} \leq \frac{1}{\lambda}\left(\|f_2\|_{L^2}^2 + B[f_1,f_1]\right)^{1/2}$$

$$\left\| R_\lambda \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right\|_X \leq \frac{1}{\lambda} \left\| \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right\|_X$$

$$\Rightarrow \quad \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda > 0$$