6.2.3. FREDHOLMOVA ALTERNATIVA

AKO JE $\gamma > 0$ TM3 NE DAJE NAM REZULTAT KOJI ŽELIMO ZA

$$(*) \quad \begin{cases} Lu = f & u \; U \\ u = 0 & \text{na } \partial U \end{cases}$$

ALTERNATIVNI PRISTUP : FREDHOLMOVA ALTERNATIVA §D.5

X, Y BANACHOVI (REALNI)

DEF: OGRANIČEN L.O.

$$K : X \to Y$$

JE KOMPAKTAN AKO:

SVAKI OGRANIČENI NIZ $(u_k)_k \subseteq X$

PRESLIKA U $(Ku_k)_k$ PREDKOMPAKTAN U Y

(IMA KONV. PODNIZ)

PR: H - HILBERTOV, $K : H \to H$ KOMPAKTAN L.O.

$u_k \rightharpoonup u$. TADA $Ku_k \to Ku$

DOK: 1) $u_k \rightharpoonup u \Rightarrow u_k$ OGRANIČEN u H

2) K - KOMPAKTAN $\Rightarrow \exists\, u_{k_\ell}$ T.D. $Ku_{k_\ell} \to v$ u H

3) $u_k \rightharpoonup u \Rightarrow (u_k, v) \to (u, v)$, $v \in H$

$\Rightarrow (u_k, K^* v) \to (u, K^* v)$, $v \in H$

$\Rightarrow (K u_k, v) \to (Ku, v)$, $v \in H$

$\Rightarrow K u_k \rightharpoonup K u \quad H$

4) JEDINSTVENOST LIMESA $\Rightarrow v = Ku$

$\Rightarrow Ku_{k_\ell} \to Ku$

5) JEDINSTVENOST LIMESA $\Rightarrow Ku_k \to Ku$! ZADAĆA

TEOREM (FREDHOLMOVA ALTERNATIVA)

NEKA JE $K: H \to H$ KOMPAKTAN L.O. TADA

(i) $N(I-K) = \ker(I-K)$ JE KONAČNODIMENZIONALAN

(ii) $R(I-K)$ JE ZATVOREN

(iii) $R(I-K) = N(I-K^*)^\perp$

(iv) $N(I-K) = \{0\} \iff R(I-K) = H$

(v) $\dim N(I-K) = \dim N(I-K^*)$

NAP: (iv) FREDHOLMOVA ALTERNATIVA

ILI JE: $\forall f \in H \quad \exists!\, u \in H$ T.D. $u - Ku = f$ (α)

ILI JE: $\exists\, u \in H,\ u \neq 0$ T.D. $u - Ku = 0$ (β)

DODATNO, AKO JE (β) ZADOVOLJENO VRIJEDI:

- PROSTOR RJEŠENJA JE KONAČNODIMENZIONALAN (i)
- ZADAĆA $u - Ku = f$ IMA RJEŠENJA
  AKO I SAMO AKO JE $f \in N(I-K^*)^\perp$ (iii)

NAP:

POSAO JE RUBNU ZADAĆU ZA PDJ UKLOPITI U OVU TEORIJU

ADJUNGIRANI OPERATOR OD L

$$\underset{H^{-1}}{\langle} Lu, v \underset{H^1_0}{\rangle} = B[u,v] = \int_U A\nabla u \cdot \nabla v + b\cdot\nabla u\, v + cuv$$

$\uparrow$
P.I.

HOĆEMO NAPRAVITI JOŠ JEDNU P.I. I PREBACITI DERIVACIJE NA V!

$$= \int_U \nabla u \cdot A\nabla v + (bv)\cdot\nabla u + cuv$$

$$= \int_U -u\, \mathrm{div}(A\nabla v) - \mathrm{div}(bv)\,u + cuv$$

$$= \int_U \underbrace{[-\mathrm{div}(A\nabla v + bv) + cv]}_{=:\, L^* v} u \qquad , \; u,v \in C_c^\infty(U)$$

$$= \underset{H^{-1}}{\langle} L^* v, u \underset{H^1_0}{\rangle}$$

DEF:

$$L^* v = -\mathrm{div}(A\nabla v) - b\cdot\nabla v + (c - \mathrm{div}\, b)v$$

ISTOG JE TIPA

PRIDRUŽENA FORMA:

$$B^*[v,u] := B[u,v]$$

ADJUNGIRANA ZADAĆA:
$$\begin{cases} L^* v = f & u\ U \\ v = 0 & u\ \partial U \end{cases}$$

SLABO RJEŠENJE $v \in H^1_0(U)$:

$$B^*[v,u] = (f,u) \quad , \; u \in H^1_0(U).$$

TM4 (2. TM EGZISTENCIJE)

(i) ILI JE: $\forall f \in L^2(U)\ \exists!\ u \in H_0^1(U)$ SLABO RJ $\begin{cases} Lu = f & u\ U \\ u = 0 & na\ \partial U \end{cases}$ (R)

ILI JE: $\exists\ u \in H_0^1(U),\ u \neq 0$ SLABO RJ $\begin{cases} Lu = 0 & u\ U \\ u = 0 & na\ \partial U \end{cases}$ (N)

(ii) AKO VRIJEDI (N) PROSTOR RJ N JE KONAČNODIMENZIONALAN I PO DIMENZIJI JEDNAK PROSTORU RJ $N^* \subset H_0^1$ ZADAĆE

$$\begin{cases} L^* v = 0 & u\ U \\ v = 0 & na\ \partial U \end{cases}$$

(iii) ZADAĆA $\begin{cases} Lu = f & u\ U \\ u = 0 & na\ \partial U \end{cases}$ IMA RJ $\Leftrightarrow$ $(f, v) = 0,\ v \in N^*$

NAPOMENA (iii) JE ZANIMLJIV SAMO ZA NETRIVIJALNI N^* ($\Leftrightarrow$ NETRIV N)
DAKLE U SLUČAJU (N)

DOK: (i) IZ TM3 SLIJEDI DA ZA $\mu = \gamma$ ZADAĆA

$$\boxed{\text{NAĆI } u \in H_0^1(U) \quad B_\gamma[u, v] = (g, v), \quad v \in H_0^1(U)}$$

IMA JEDINSTVENO RJ. $\forall g \in L^2(U)$

$$B_\gamma[u, v] = B[u, v] + \gamma(u, v)$$

$$L_\gamma u := Lu + \gamma u$$

ZNAČI:

$$L^2(U) \ni g \xrightarrow[L_\gamma^{-1}]{} u \in H_0^1(U) \quad \text{RJEŠENJE}$$

L_γ^{-1} ← OZNAKA ZA TO PRESLIKAVANJE

$g_1, g_2 \in L^2(U)$

$$B_\gamma[L_\gamma^{-1} g_1, v] = (g_1, v) \quad , v \in H_0^1(U)$$
$$B_\gamma[L_\gamma^{-1} g_2, v] = (g_2, v) \quad , v \in H_0^1(U) \quad \Big| +$$

$$B_\gamma[L_\gamma^{-1} g_1 + L_\gamma^{-1} g_2, v] = (g_1 + g_2, v) \quad , v \in H_0^1(U)$$

$\Rightarrow$ $\qquad \shortparallel$

$$L_\gamma^{-1}(g_1 + g_2) \Rightarrow \text{ADITIVNOST}$$

HOMOGENOST SLIČNO

$\Rightarrow \quad L_\gamma^{-1}$ JE L.O.

$$\beta \|u\|_{H_0^1}^2 \leq B_\gamma[u,u] = (g, u) \leq \|g\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^2} \|u\|_{H_0^1}$$

$$\Rightarrow \qquad \|u\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\beta} \|g\|_{L^2}$$

$$\|L_\gamma^{-1} g\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\beta} \|g\|_{L^2} \qquad \left(\text{OGRANIČENOST } L_\gamma^{-1} : L^2(U) \to H_0^1(U)\right)$$

$\Rightarrow \quad L_\gamma^{-1} : L^2(U) \to H_0^1(U)$ JE OGRANIČEN L.O. !

(2) u JE SL. RJEŠENJE $\begin{cases} Lu = f & u\ U \\ u = 0 & na\ \partial U \end{cases}$

$$\Updownarrow$$

$$B[u,v] = (f,v) \quad , v \in H_0^1(U)$$

$$\Updownarrow$$

$$B[u,v] + \gamma(u,v) = (f + \gamma u, v) \quad , v \in H_0^1(U)$$

$$\Updownarrow$$

$$B_\gamma[u,v] = (f + \gamma u, v) \quad , v \in H_0^1(U)$$

$$\Updownarrow$$

$$u = L_\gamma^{-1}(f + \gamma u)$$

$$\Updownarrow \quad \text{LINEARNOST}$$

$$u = \gamma L_\gamma^{-1} u + L_\gamma^{-1} f$$

$$\Updownarrow$$

$$u - Ku = h \qquad h := L_\gamma^{-1} f \ , \ K = \gamma L_\gamma^{-1}$$

$H_0^1(U) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(U) \Rightarrow$ $\boxed{K : L^2(U) \to L^2(U) \text{ JE LINEARAN, OGRANIČEN I KOMPAKTAN}}$

OGR $\|Kv\|_{L^2} \leq \|Kv\|_{H_0^1} \leq \|\gamma L_\gamma^{-1} v\|_{H_0^1} \leq \frac{\gamma}{\beta}\|v\|_{L^2}$

KOMP $K(L^2(U)) \subseteq H_0^1(U)$ PREDKOMPAKTAN u $L^2(U)$

KRAJ: OPERATOR KOJI PRIDRUŽUJE RJ. ZADAĆE JE KOMPAKTAN

PRETP F.A ISPUNJENE:

ILI JE $\forall h \in L^2(U)$ $\exists!$ $u \in L^2(U)$ T.D. $u - Ku = h \Longleftrightarrow (\alpha)$

ILI JE $\exists \underset{\neq 0}{u} \in L^2(U)$ $u - Ku = 0$ $\Longleftrightarrow$ (β)

(ii) IZ F.A. DIREKTNO

(iii) IZ F.A. (iii) $u - Ku = h$ IMA RJ $\Leftrightarrow$ $h \in N(I - K^*)^\perp$

$\Leftrightarrow$ $(h, v)_{L^2} = 0$, v ZADOVOLJAVA $v - K^*v = 0$

$$0 = (h, v)_{L^2} = (L_\gamma^{-1} f, v) = \frac{1}{\gamma}(Kf, v) = \frac{1}{\gamma}(f, K^*v) = \frac{1}{\gamma}(f, v)$$

DAKLE: $u - Ku = h$ IMA RJ $\Leftrightarrow$ $(f, v) = 0$, $v \in H^*$.

TM5 (3. TM EGZISTENCIJE)

(i) POSTOJI NAJVIŠE PREBROJIV SKUP $\Sigma \subseteq \mathbb{R}$ T.D.:

$$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \Sigma$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall f \in L^2(U)\ \exists!\ u \in H_0^1(U) \text{ T.D. } \begin{cases} Lu = \lambda u + f & \text{u } U \\ u = 0 & \text{na } \partial U \end{cases} \text{ U SLABOM SMISLU}$$

(ii) AKO JE Σ BESKONAČAN MOŽEMO GA ZAPISATI SA

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots \quad \text{(RASTUĆI)}$$

$$\lambda_n \longrightarrow +\infty$$

NAP: $\Sigma = \sigma(L)$ SPEKTAR

ZA $\lambda \in \Sigma$ DAKLE, $\begin{cases} Lu = \lambda u & \text{u } U \\ u = 0 & \text{na } \partial U \end{cases}$ U SLABOM SMISLU

NEMA JEDINSTVENO RJEŠENJE

PA $\exists$ NETRIVIJALNO RJ $u \neq 0$

λ - SVOJSTVENA VRIJEDNOST

u - SVOJSTVENI VEKTOR

NAP: REZULTAT JE BAZIRAN NA SVOJSTVU KOMPAKTNIH OPERATORA (SPEKTRALNOM TM)

TM: NEKA JE $\dim H = \infty$, $K : H \to H$ KOMPAKTAN. TADA

(i) $0 \in \sigma(K)$

(ii) $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\}$ — TOČKOVNI SPEKTAR (SVOJSTVENE VR)

(iii) ILI JE $\sigma(K) \setminus \{0\}$ KONAČAN

ILI JE $\sigma(K) \setminus \{0\}$ NIZ KOJI TEŽI K 0.

DOK. TM5: NEKA JE $\gamma > 0$ IZ TM2 (B_μ - POZ DEF $\forall \mu \geq \gamma$)

F.A. $\Rightarrow$

$$\forall f \in L^2(U) \ \exists! \ u \in H_0^1(U) \text{ T.D. } \begin{cases} Lu = \lambda u + f & u\ U \\ u = 0 & \text{na } \partial U \end{cases} \quad \text{U SLABOM SMISLU}$$

$$\Updownarrow$$

$u = 0$ JE JEDINO SLABO RJ. $\begin{cases} Lu = \lambda u & u\ U \\ u = 0 & \text{na } \partial U \end{cases}$

$$\Updownarrow$$

$u = 0$ JE JEDINO SLABO RJ. $\begin{cases} Lu + \gamma u = (\gamma + \lambda) u & u\ U \\ u = 0 & \text{na } \partial U \end{cases}$

$$\Updownarrow$$

$u = 0$ JE JEDINO SLABO RJ. $\begin{cases} L_\gamma u = (\gamma + \lambda) u & u\ U \\ u = 0 & \text{na } \partial U \end{cases}$

$$\Updownarrow$$

$u = 0$ JE JEDINO SLABO RJ. $u = L_\gamma^{-1}(\gamma + \lambda) u = \frac{\gamma + \lambda}{\gamma} K u$

$(K = \gamma L_\gamma^{-1})$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\gamma}{\gamma + \lambda} \notin \sigma(K)$$

K KOMPAKTAN L.O. $\Rightarrow$ $\sigma(K)$ NAJVIŠE PREBROJIV

$\Rightarrow$ (i)

$\Rightarrow$ OSIM $\{0\}$ SAMO SVOJSTVENE VRIJEDNOSTI ZAK

$\Rightarrow$ $\sigma(K)$ KONAČAN ILI NIZ $\to 0$

L_γ POZITIVAN $\quad B_\gamma[u,u] \geq \beta \|u\|^2_{H^1_0}$

$\Rightarrow \quad L_\gamma u = (\lambda+\gamma) u \quad |\cdot u \quad \int_U$

$$B_\gamma[u,u] = (\lambda+\gamma)\|u\|^2_{L^2}$$
$$\vee\!|$$
$$\beta\|u\|^2_{H^1_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda+\gamma>0}$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \frac{\gamma}{\gamma+\lambda} \in \sigma(K)$$

$\Rightarrow \quad \sigma(K)$ NIZ POZITIVNIH VRIJEDNOSTI & $\mu_k \to 0$

$\Rightarrow$ MOGU ~~IH~~ SORTIRATI PADAJUĆE $\quad \mu_k \to 0$, $\mu_k > 0$

$$\frac{\gamma}{\gamma+\lambda_k} = \mu_k \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma}{\mu_k} = \gamma+\lambda_k$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_k = \frac{\gamma}{\mu_k} - \gamma \longrightarrow +\infty$$

RASTUĆI NIZ.

THM 6 (OGRANIČENOST INVERZA)

NEKA JE $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \Sigma$. TADA $\exists C > 0$ T.D.

$$\|u\|_{L^2(U)} \leq C \|f\|_{L^2(U)}$$

ZA SVE $f \in L^2(U)$ I $u \in H^1_0(U)$ SLABO RJEŠENJE (JED.)

$$\begin{cases} Lu = \lambda u + f & \text{u } U \\ u = 0 & \text{na } \partial U \end{cases}$$

$(C(\lambda, U, A, b, c)$, $C \to +\infty$ KAD $\lambda \to \Sigma)$

DOK: PRETP. SUPROTNO:..

$\forall C > 0 \ \exists f_C \in L^2(U)$, $\exists u_C \in H^1_0(U)$ SLABO RJ.

$$\begin{cases} Lu_C = \lambda u_C + f_C \\ u_C = 0 \end{cases} \quad \& \quad \|u_C\|_{L^2(U)} > C \|f_C\|_{L^2(U)}$$

$C = k \in \mathbb{N}$ $\quad (f_k) \subseteq L^2(U)$, $(u_k) \subseteq H^1_0(U)$

$$\begin{cases} Lu_k = \lambda u_k + f_k & \text{u } U \\ u_k = 0 & \text{na } \partial U \end{cases} \quad \& \quad \|u_k\|_{L^2} > k \|f_k\|_{L^2}$$

DEF: $\quad v_k = \dfrac{u_k}{\|u_k\|_{L^2}}$, $\quad g_k = \dfrac{f_k}{\|u_k\|_{L^2}}$

TADA:

$$\begin{cases} Lv_k = \lambda v_k + g_k \\ v_k = 0 \end{cases} \quad \& \quad \frac{1}{k} > \|f_k\|_{L^2} \quad \& \quad \|v_k\|_{L^2} = 1$$

$f_k \longrightarrow 0 \quad L^2(U)$

$$L v_k + \gamma v_k = (\lambda + \gamma) v_k + g_k$$

SLABA FORMULACIJA

$$B_\gamma [v_k, v_k] = (\lambda+\gamma)\underbrace{(v_k, v_k)}_{=1} + \underbrace{(g_k, v_k)}_{\leq \|g\|_{L^2}\|v_k\|_{L^2} = 1}$$

$$\underbrace{B_\gamma [v_k, v_k]}_{\geq\, \beta \|v_k\|^2_{H^1_0}} \leq (\lambda+\gamma) + \|g\|_{L^2}$$

$$\Rightarrow \quad \|v_k\|^2_{H^1_0} \leq \text{CONST.}$$

$$\Rightarrow \quad v_{k_\ell} \longrightarrow v \quad H^1_0(U)$$

KOMPAKTNOST ULAGANJA $H^1_0 \hookrightarrow L^2$

$$f_{k_\ell} \longrightarrow 0 \quad L^2(U)$$

$$v_{k_\ell} \longrightarrow v \quad L^2(U)$$

---

v_k ZADOVOLJAVA

$$\forall w \in H^1_0(U)$$

$$\int_U A \nabla v_{k_\ell} \cdot \nabla w + b \cdot \nabla v_{k_\ell} w + c v_{k_\ell} w = \int_U \lambda v_{k_\ell} w + g_k w$$

$$\downarrow$$

$$\int_U A \nabla v \cdot \nabla w + b \cdot \nabla v\, w + c v w = \int_U \lambda v w \quad 0$$

$$\Rightarrow \quad v \text{ JE SL. RJ. } \begin{cases} L v = \lambda v \\ v = 0 \end{cases}$$

JER JE $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \Sigma \Rightarrow v = 0 \quad \Rightarrow\Leftarrow \quad \|v\|_{L^2} = 1$

NAP.: TEORIJA SE PROŠIRUJE ZA FUNKCIJE S KOMPLEKSNIM VRIJEDNOSTIMA.

6.3. REGULARNOST

RJEŠENJE IMAMO U $H^1_0(U)$.

KAD JE RJ. I BOLJE?

MOTIVACIJA: $\quad -\Delta u = f \quad$ U $\mathbb{R}^n$

I NEKA JE u DOVOLJNO GLATKO I IDE $\to 0$ DOVOLJNO BRZO KAD $|x| \to \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2 \, dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_i} u_{x_j x_j}$$

$$\overset{P.I.}{=} -\sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_i x_j} u_{x_j}$$

$$\overset{P.I.}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_j} u_{x_i x_j} = \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 \, dx$$

$$\Rightarrow \quad \|D^2 u\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$$

DEF: $\quad \tilde{u} := u_{x_k} \quad \to \quad -\Delta \tilde{u} = f_{x_k}$

$$\Rightarrow \|D^3 u\|_{L^2} \leq C \|Df\|_{L^2}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \|D^{m+2} u\|_{L^2} \leq C \|D^m f\|_{L^2}$$

NADA: $\quad f \in H^m(U) \to u \in H^{m+2}(U) \cap H^1_0(U)$

PROBLEM: ZA GORNJI RAČUN PRETPOSTAVILI SMO I VIŠE NEGO ZAKLJUČIMO.

6.3.1. UNUTARNJA REGULARNOST

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ OTVOREN, OGRANIČEN

<u>TM 1</u> (UNUTARNJA H^2-REGULARNOST)

NEKA JE:

$$A \in C^1(U; M_n(\mathbb{R})), \; b \in L^\infty(U; \mathbb{R}^n), \; c \in L^\infty(U; \mathbb{R})$$

$$f \in L^2(U)$$

$u \in H^1(U)$ SLABO RJEŠENJE $Lu = f$ u U.

TADA:

$$u \in H^2_{loc}(U)$$

$\forall \, V \subset\subset U$, $\exists c > 0$ T.D. $\|u\|_{H^2(V)} \leq c \left(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)} \right)$

$c(V, U, L)$

<u>NAP.</u> (i) NEMA R.U.

(ii) $u \in H^2_{loc}(U)$ S.R. $Lu = f$. $\qquad Lu \in L^2_{loc}(U)$

$$B[u, v] = (f, v), \quad v \in C_c^\infty(U)$$

$$\parallel$$

$$(Lu, v)$$

$$\Rightarrow \quad (Lu - f, v) = 0, \; v \in C_c^\infty(U) \Rightarrow \underline{Lu = f \text{ s.s.}}$$