Matematika 2 za kemičare

treći kolokvij, 17. lipnja 2019.

Napomene. Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dopuštene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni se bodovi pripisuju s negativnim predznakom.

Rješenja zadataka **1** – **4** predajte odvojeno od rješenja zadataka **5** – **6**.

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

1. *(15)* Odredite koji su od sljedećih skupova plohe u $\mathbb{R}^3$ i, za svaki koji jest, odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na tu plohu u točki $(0,0,0)$:

(a) $\mathcal{P}_1 \dots \; x^2 - y^2 - z^2 = 0$

(b) $\mathcal{P}_2 \dots \; x^2 - y - z^2 = 0$.

Odgovor obrazložite.

2. *(15)* Izračunajte integral

$$\int_S \left(\sqrt[4]{x^2+y^2+z^2} - 1 \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

gdje je skup $S \subseteq \mathbb{R}^3$ zadan sa

$$S \dots \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le 4 \\ z \le 0. \end{cases}$$

3. *(10 = 5 + 5)* Zadane su funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ i krivulja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ formulama

$$f(x,y,z) := 2e^{x-y+z}, \qquad \gamma(t) := \left(t^2, 2t^2, 2t^2\right).$$

Izračunajte:

(a) $\int_\gamma f \, \mathrm{d}s$

(b) $\operatorname{div}(\nabla f)$.

4. *(10)* Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Okrenite!

5. *(15)* Centar mase svakog tijela postavljenog u Kartezijev koordinatni sustav ima koordinate $\overline{x} = M_x/M$, $\overline{y} = M_y/M$, $\overline{z} = M_z/M$, gdje je M masa tog tijela, definirana kao integral funkcije gustoće po cijelom tijelu, a M_x, M_y i M_z su redom integrali (isto po cijelom tijelu) funkcije gustoće pomnožene s x, y odnosno z. Gdje se nalazi centar mase polukugle u kojoj je gustoća u svakoj točki razmjerna udaljenosti te točke do središta?

6. *(15)* Funkcija gustoće normalne razdiobe (s očekivanjem μ i standardnom devijacijom σ) ima formulu

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Na dvije decimale točno (tj. na puni postotak) procijenite vjerojatnost da se normalno distribuirana slučajna varijabla (dakle, slučajna varijabla opisana gornjom funkcijom gustoće) nađe unutar intervala $\langle \mu - \sigma, \mu + \sigma \rangle$. *Hint.* Taylorovi redovi.

Matematika 2 za kemičare

treći kolokvij, 17. lipnja 2019.

Napomene. Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dopuštene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni se bodovi pripisuju s negativnim predznakom.

Rješenja zadataka **1** – **4** predajte odvojeno od rješenja zadataka **5** – **6**.

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

1. *(15)* Odredite koji su od sljedećih skupova plohe u $\mathbb{R}^3$ i, za svaki koji jest, odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na tu plohu u točki $(0,0,0)$:

(a) $\mathcal{P}_1 \ldots\ x + y^2 - z = 0$

(b) $\mathcal{P}_2 \ldots\ x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Odgovor obrazložite.

2. *(15)* Izračunajte integral

$$\int_S \left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

gdje je skup $S \subseteq \mathbb{R}^3$ zadan sa

$$S \ldots \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 9 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

3. *(10 = 5 + 5)* Zadane su funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ i krivulja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ formulama

$$f(x,y,z) := 3e^{-x+y+z}, \qquad \gamma(t) := \left(t^2, 2t^2, -2t^2\right).$$

Izračunajte:

(a) $\int_\gamma f \, \mathrm{d}s$

(b) $\operatorname{div}(\nabla f)$.

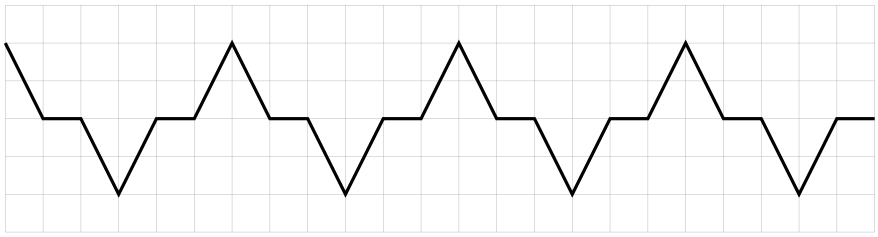
4. *(10)* Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}}.$$

Okrenite!

5. *(15)* Prosječna vrijednost neprekidne skalarne funkcije na skupu S uvijek je, kao i u slučaju jedne varijable jednaka ukupnoj vrijednosti (integralu te funkcije po skupu S) podijeljenoj s mjerom skupa S (duljinom od S ako se radi o funkciji jedne varijable, površinom od S ako se radi o funkciji dviju varijabli, volumenom od S ako se radi o funkciji triju varijabli). Ako je električni naboj raspoređen unutar kugle polumjera 5 cm tako da mu je gustoća u svakoj točki kugle za 1 veća od kvadrata udaljenosti te točke do središta, kolika je prosječna gustoća naboja u toj kugli?

6. *(15)* Na slici dolje prikazan je jedan periodični signal (horizontalni smjer predstavlja vrijeme, vertikalni intenzitet signala). Nacrtajte graf najbolje aproksimacije tog signala linearnom kombinacijom od 4 funkcije sinus i kosinus s prilagođenim periodima.



Matematika 2 za kemičare

treći kolokvij, 17. lipnja 2019.

Napomene. Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dopuštene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni se bodovi pripisuju s negativnim predznakom.

Rješenja zadataka **1** – **4** predajte odvojeno od rješenja zadataka **5** – **6**.

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

1. *(15)* Odredite koji su od sljedećih skupova plohe u $\mathbb{R}^3$ i, za svaki koji jest, odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na tu plohu u točki $(0, 0, 0)$:

(a) $\mathcal{P}_1 \dots \ x - y^2 + z^2 = 0$

(b) $\mathcal{P}_2 \dots \ x^2 - y^2 + z^2 = 0.$

Odgovor obrazložite.

2. *(15)* Izračunajte integral

$$\int_S \left(1 - \sqrt[8]{x^2 + y^2 + z^2}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z,$$

gdje je skup $S \subseteq \mathbb{R}^3$ zadan sa

$$S \dots \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 16 \\ z \geq 0. \end{cases}$$

3. *(10 = 5 + 5)* Zadane su funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ i krivulja $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ formulama

$$f(x, y, z) := 4e^{x-y+z}, \qquad \gamma(t) := \left(2t^2, 2t^2, -t^2\right).$$

Izračunajte:

(a) $\operatorname{div}(\nabla f)$

(b) $\int_\gamma f \,\mathrm{d}s.$

4. *(10)* Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n}.$$

Okrenite!

5. *(15)* Centar mase svakog tijela postavljenog u Kartezijev koordinatni sustav ima koordinate $\overline{x} = M_x/M$, $\overline{y} = M_y/M$, $\overline{z} = M_z/M$, gdje je M masa tog tijela, definirana kao integral funkcije gustoće po cijelom tijelu, a M_x, M_y i M_z su redom integrali (isto po cijelom tijelu) funkcije gustoće pomnožene s x, y odnosno z. Gdje se nalazi centar mase kugle u kojoj je gustoća u svakoj točki razmjerna udaljenosti te točke od tangencijalne ravnine u jednoj fiksiranoj točki te kugle? (Udaljenost točke do ravnine definirana je kao udaljenost te točke do svoje ortogonalne projekcije na tu ravninu)

6. *(15)* Čestica mase m se giba po x-osi te su joj pozicija x i brzina v funkcije vremena. U početnom trenutku ($t = 0$) čestica je na poziciji x_0 i ima brzinu v_0. Pokažite da neovisno o sili koja na tu česticu djeluje tijekom gibanja u trenucima t kratko nakon početnog trenutka uvijek vrijedi

$$2x(t) \approx 2x_0 + (v_0 + v(t)) \cdot t.$$

Hint. Drugi Newtonov zakon i Taylorovi redovi.

Matematika 2 za kemičare

treći kolokvij, 17. lipnja 2019.

Napomene. Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dopuštene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni se bodovi pripisuju s negativnim predznakom.

Rješenja zadataka **1** – **4** predajte odvojeno od rješenja zadataka **5** – **6**.

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

1. *(15)* Odredite koji su od sljedećih skupova plohe u $\mathbb{R}^3$ i, za svaki koji jest, odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na tu plohu u točki $(0,0,0)$:

(a) $\mathcal{P}_1 \ldots \; -x + y^2 - z^2 = 0$

(b) $\mathcal{P}_2 \ldots \; -x^2 + y^2 - z^2 = 0.$

Odgovor obrazložite.

2. *(15)* Izračunajte integral

$$\int_S \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} + 2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

gdje je skup $S \subseteq \mathbb{R}^3$ zadan sa

$$S \ldots \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le 16 \\ x \ge 0. \end{cases}$$

3. *(10 = 5 + 5)* Zadane su funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ i krivulja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ formulama

$$f(x,y,z) := 5e^{x+y-z}, \qquad \gamma(t) := \left(2t^2, -2t^2, -t^2\right).$$

Izračunajte:

(a) $\operatorname{div}(\nabla f)$

(b) $\int_\gamma f\,\mathrm{d}s.$

4. *(10)* Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n^2}}.$$

Okrenite!

5. *(15)* Prosječna vrijednost neprekidne skalarne funkcije na skupu S uvijek je, kao i u slučaju jedne varijable jednaka ukupnoj vrijednosti (integralu te funkcije po skupu S) podijeljenoj s mjerom skupa S (duljinom od S ako se radi o funkciji jedne varijable, površinom od S ako se radi o funkciji dviju varijabli, volumenom od S ako se radi o funkciji triju varijabli). Za jednu planinu pokazalo se da je visina iznad točke sa zemljopisnim koordinatama λ (zemljopisna dužina) i φ (zemljopisna širina) jednaka $h = \dfrac{4(\varphi+40)^3 + 2(\varphi+40)}{1+(\lambda+30)^2}$. Baza te planine ima oblik elipse s poluosima duljina 1 km (u smjeru istok-zapad) i 450 m (u smjeru sjever-jug) i središtem na 40° sjeverne zemljopisne širine i 30° istočne zemljopisne dužine. Ako znamo da se za dovoljno mala područja, poput onog na kojem se nalazi opisana planina, može uzeti da su zemljopisne koordinate Kartezijeve, koja je prosječna visina te planine?

6. *(15)* Na slici dolje prikazan je jedan periodični signal (horizontalni smjer predstavlja vrijeme, vertikalni intenzitet signala). Nacrtajte graf najbolje aproksimacije tog signala linearnom kombinacijom od 4 funkcije sinus i kosinus s prilagođenim periodima.