

Matematika 2 za kemičare

drugi kolokvij, 25. svibnja 2019.

Napomene. Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dopuštene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni se bodovi pripisuju s negativnim predznakom.

Rješenja zadataka **1 - 3** pišite i predajte odvojeno od rješenja zadataka **4 - 6**.

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

1. (15) Riješite zadaću

$$\begin{cases} y'' + y = (2x + 6)e^x \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

2. (15) Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = (2x + y + 1)^{10} - 2.$$

3. (15) Ispitajte lokalne ekstreme funkcije

$$f(x, y, z) := (x - y)^2 + y^2 + z^2 - \ln z + 5.$$

NASTAVAK NA DRUGOJ STRANI!

4. (12) Jednom davno, recimo u srednjem vijeku, bijaše jedno selo sa 100 stanovnika. Putnik namjernik naišao je u selo, ali nažalost, bio je zaražen nekom tada neizlječivom zaraznom bolešću, recimo kugom. On je otputovao, ali ljudi su se počeli razbolijevati i umirati. Tjedan dana nakon što je otputovao, 5 stanovnika je pokazivalo simptome kuge. Još tjedan dana kasnije, bolesnih je bilo 15.

Koliko dana je trebalo da se i posljednji stanovnik sela zarazi ako je u svakom trenutku brzina zaražavanja (brzina promjene broja zaraženih stanovnika) bila razmjerna umnošku trenutnih brojeva zaraženih i zdravih stanovnika? U zaražene stanovnike brojimo i sve one koji su umrli od kuge, a pretpostavljamo da se kuga dovoljno brzo proširila da nitko u razdoblju od posjete putnika do izumiranja sela nije umro iz drugog razloga osim kuge (i da se nitko nije rodio u međuvremenu).

5. (11) Molarna polarizacija P_m molekulâ u ovisnosti o temperaturi T definira se jednadžbom

$$P_m = \frac{N_A}{3\varepsilon_0} \left(\alpha + \frac{\mu^2}{3kT} \right)$$

gdje je $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ Avogadrova konstanta, $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ J}^{-1} \text{ C}^2 \text{ m}^{-1}$ permitivnost vakuumu, α je polarizabilnost (u $\text{C}^2 \text{ m}^2 \text{ J}^{-1}$), $k = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ je Boltzmannova konstanta, a μ je iznos dipolnog momenta. Temeljem određenih mjerenja dobivena je sljedeća tablica podataka:

T/K	384,3	420,1	444,7	484,1
$P_m/(\text{cm}^3 \text{ mol}^{-1})$	57,4	53,5	50,1	46,8

Koristeći metodu najmanjih kvadrata odredite iznos dipolnog momenta μ koji odgovara zadanim podacima.

6. (12) Dvije rijeke teku tako da su im tokovi, kad se ucrtaju na kartu opskrbljenu Kartezijevim koordinatnim sustavom, dobro opisani parabolom $y = x^2$ i pravcem $x - y = 2$. Štedljiva država u kojoj se nalaze želi ih spojiti najkraćim mogućim ravnim kanalom jer na cijenu primarno utječe duljina kanala. Koje točke na tokovima tih dviju rijeka treba spojiti taj kanal?

Matematika 2 za kemičare

drugi kolokvij, 25. svibnja 2019.

Napomene. Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dopuštene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni se bodovi pripisuju s negativnim predznakom.

Rješenja zadataka **1 - 3** pišite i predajte odvojeno od rješenja zadataka **4 - 6**.

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

1. (15) Riješite zadaću

$$\begin{cases} y'' + y' = e^x(2x - 1) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

2. (15) Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = 5 - \frac{1}{(y - 5x + 5)^5}.$$

3. (15) Ispitajte lokalne ekstreme funkcije

$$f(x, y, z) := \ln x - (x^2 + y^2 + z^2 + yz + 1).$$

NASTAVAK NA DRUGOJ STRANI!

4. (12) Odredite krivulju koja ima sljedeće svojstvo: Lik koji je u Kartezijevom koordinatnom sustavu omeđen slijeva s y -osi, odozdo s x -osi, odozgor s traženom krivuljom i zdesna s vertikalom varijabilne pozicije, ima svojstvo da je za svaku poziciju desnog ruba apscisa težišta jednaka $\frac{3}{4}$ apscise desnog ruba.

Uputa: Poznato je da su koordinate težište lika omeđenog krivuljom $y = f(x)$, vertikalama $x = a$ i $x = b$ te s x -osi dane formulama

$$x_T = \frac{1}{P} \int_a^b x f(x) dx, \quad y_T = \frac{1}{2P} \int_a^b f^2(x) dx,$$

gdje je P površina tog lika.

5. (11) Langmuirova izoterma opisuje ovisnost volumena V adsorbiranog plina na neku površinu u ovisnosti o tlaku p pri konstantnoj temperaturi. Njezina formula je

$$V = V_\infty \frac{Kp}{1 + Kp},$$

gdje su K i V_∞ pozitivne konstante (V_∞ je tzv. volumen potpunog prekrivanja).

U jednom pokusu dobiveni su sljedeći podaci za adsorpciju CO na ugljenu pri 273 K:

p/kPa	13,3	40,0	66,7	93,3
V/cm^3	10,2	25,5	36,9	46,1

Koristeći metodu najmanjih kvadrata odredite volumen potpunog prekrivanja V_∞ za opisanu adsorpciju.

6. (12) Spasioc koji je zaposlen pri jednom bazenu oblika kruga (promjera 40 m) uočio je da se točno na suprotnoj strani od njega utapa jedna lijepa djevojka (dakle, u trenutku kad ju je spasio, spojnica pozicije spasioca i utopljenice je promjer bazena). Spasioc pliva brzinom 1,8 m/s, a trči četiri puta brže nego što pliva. Odlučio je prvo zaplivati, a onda manje ili više trčati. Pod kojim kutom u odnosu na spomenuti promjer treba zaplivati ako želi što prije stići do utopljenice?

Matematika 2 za kemičare

drugi kolokvij, 25. svibnja 2019.

Napomene. Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dopuštene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni se bodovi pripisuju s negativnim predznakom.

Rješenja zadataka **1 - 3** pišite i predajte odvojeno od rješenja zadataka **4 - 6**.

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

1. (15) Riješite zadaću

$$\begin{cases} y'' - 4y = (3x - 5)e^x \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

2. (15) Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = 2 + (y - 2x - 1)^{12}.$$

3. (15) Ispitajte lokalne ekstreme funkcije

$$f(x, y, z) := 5 - (x^2 - xy + 2y^2 + z^2 - \ln z).$$

NASTAVAK NA DRUGOJ STRANI!

4. (12) U jednom ribnjaku uzgajaju se pastrve. Uvjeti su takvi da ribnjak ne bi mogao prehraniti više od 1000 pastrva. Prirodno razmnožavanje doprinosi brzini promjene trenutnog broja riba u ribnjaku logistički (tj., kad bi se pastrve razmnožavale i ugibale bez da ih itko peca, u svakom trenutku brzina promjene njihove brojnosti bila bi razmjerna umnošku trenutnog broja i razlike trenutnog broja do kapaciteta jezera). No, vlasnik ribnjaka dopušta i pecanje, pri čemu prati da je brzina pecanja (smanjenje brojnosti riba uslijed pecanja) u svakom trenutku razmjerna trenutnom broju pastrva.

Odredite formulu grafa ovisnosti broja pastrva u tom ribnjaku ako znate da je broj pastrva na dan otvaranja ribnjaka bio 100, da ih je 50 dana kasnije bilo 120, a još 20 dana kasnije 130.

5. (11) Ovisnost standardne konstante ravnoteže K^\ominus o temperaturi T u izobarnim uvjetima opisuje se van't Hoffovom jednačbom. Jedan oblik te jednačbe glasi

$$K^\ominus(T) = K^\ominus(T_0) \exp\left(\frac{\Delta_r H^\ominus}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right),$$

gdje je $R = 8,3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ opća plinska konstanta. Pritom je T_0 bilo koja fiksirana temperatura.

Za reakciju $\text{Ag}_2\text{CO}_3(\text{s}) \rightleftharpoons \text{Ag}_2\text{O}(\text{s}) + \text{CO}_2(\text{g})$ u jednom su eksperimentu dobiveni sljedeći podaci:

T/K	350	400	450	500
K^\ominus	$3,98 \cdot 10^{-4}$	$1,41 \cdot 10^{-2}$	$1,86 \cdot 10^{-1}$	1,48

Koristeći metodu najmanjih kvadrata, odredite iznos standardne reakcijske entalpije $\Delta_r H^\ominus$ za navedenu reakciju.

6. (12) Odredite duljine stranica trokuta opsega 50 cm koji rotacijom oko jedne od svojih stranica generira rotaciono tijelo maksimalnog volumena.

Matematika 2 za kemičare

drugi kolokvij, 25. svibnja 2019.

Napomene. Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dopuštene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni se bodovi pripisuju s negativnim predznakom.

Rješenja zadataka **1 - 3** pišite i predajte odvojeno od rješenja zadataka **4 - 6**.

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

1. (15) Riješite zadaću

$$\begin{cases} y'' - 2y' = e^x(x - 1) \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

2. (15) Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = \frac{1}{(4x + y + 1)^4} - 4.$$

3. (15) Ispitajte lokalne ekstreme funkcije

$$f(x, y, z) := (x - z)^2 + y^2 + 2z^2 - (\ln y - 100).$$

NASTAVAK NA DRUGOJ STRANI!

4. (12) Među svim krivuljama u koordinatnoj ravnini (Kartezijev koordinatni sustav) koje imaju svojstvo da je za svaku točku T na njima površina trokuta koji je ograničen s x -osi, tangentom u T i radij-vektorom od T uvijek ista i iznosi π , odredite onu koja prolazi točkom $(0, 1)$.

5. (11) Ovisnost molarne provodnosti Λ_m (u $\text{S m}^2 \text{ mol}^{-1}$) o koncentraciji c jakog elektrolita opisuje se Kohlrauschovim zakonom

$$\Lambda_m = \Lambda_m^0 - K\sqrt{c},$$

gdje su Λ_m^0 (granična molarne provodnost) i K pozitivne konstante. Molarne provodnost u pravilu se mjeri indirektno mjerenjem otpora, a njihova veza dana je s $\Lambda_m = \frac{K_{\text{cell}}}{Rc}$, gdje je K_{cell} konstanta konduktometrijske ćelije.

U nekom mjerenju otpora niza vodenih otopina NaCl u ćeliji s $K_{\text{cell}} = 0,200 \text{ cm}^{-1}$ dobiveni su sljedeći podaci:

$c/(\text{molL}^{-1})$	$5,00 \cdot 10^{-4}$	$5,00 \cdot 10^{-3}$	$2,00 \cdot 10^{-2}$	$5,00 \cdot 10^{-2}$
R/Ω	3314	342	89	37

Kolika je granična molarne provodnost Λ_m^0 za taj elektrolit?

6. (12) Kult zlatnog reza želi sagraditi svoj hram u obliku kvadratne uspravne piramide volumena (u m^3) jednakog omjeru zlatnog reza pomnoženog s 1000. Taj kult je jako štedljiv pa za bojanje zidova te piramide žele potrošiti što manje boje. Odredite dimenzije piramide koju žele izgraditi. Napomena: Omjer zlatnog reza je omjer u kojem je podijeljena jedinična dužina ako se cijela odnosi prema većem dijelu kao veći dio prema manjem.