Matematika 2 za kemičare

prvi kolokvij, 29. travnja 2019.

Napomene. Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dopuštene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni se bodovi pripisuju s negativnim predznakom.

Rješenja prvih četiriju zadataka pišite i predajte odvojeno od rješenja petog zadatka.

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

1. (14) Gaussovom metodom eliminacije odredite sva rješenja $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ sustava

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= -1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 &= 2. \end{aligned}$$

2. (6 + 6) Zadane su matrice

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Izračunajte $\det(A)$.

(b) Izračunajte $\det(AB^{-1})$.

3. (22 = 5 + 7 + 4 + 6) Zadan je linearan operator $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$A(x, y) := (x + 3y, x + 3y).$$

(a) Odredite matricu operatora A s obzirom na kanonsku bazu e prostora $\mathbb{R}^2$.

(b) Odredite matricu operatora A s obzirom na bazu

$$f := ((1, -1), (1, 0))$$

prostora $\mathbb{R}^2$.

(c) Odredite spektar operatora A.

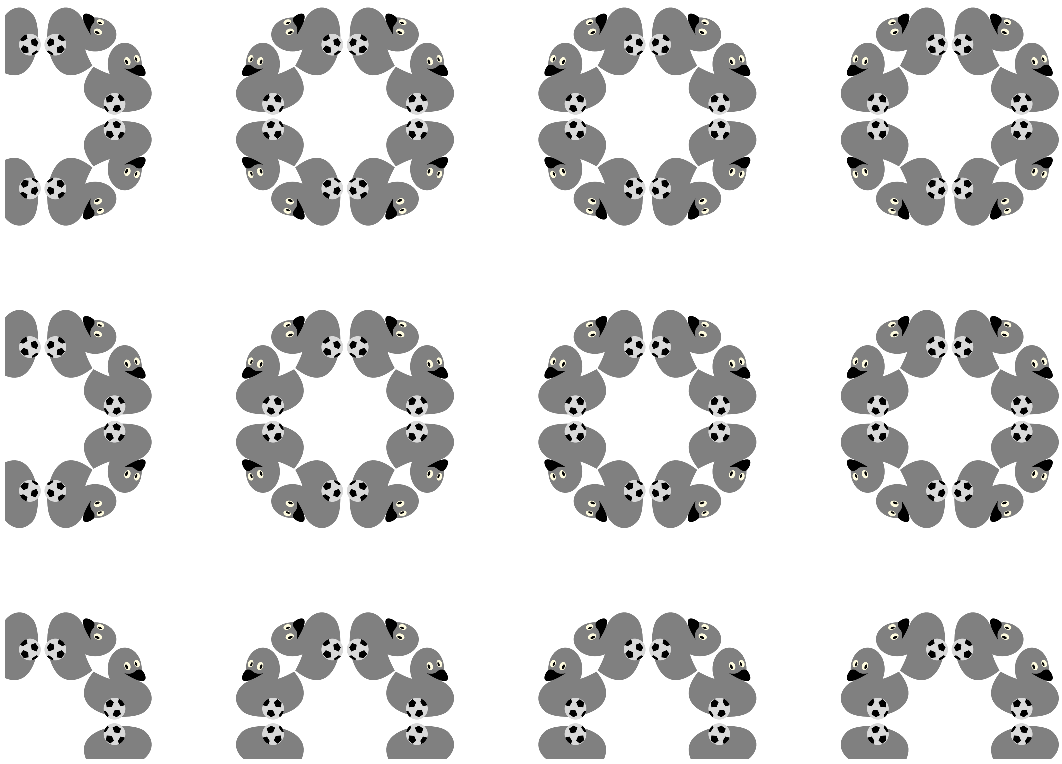
(d) Odredite sve svojstvene vektore operatora A.

4. (12) Organizatori "Dana i noći na PMF-u" odlučili su svakom od 300 volontera pokloniti po jednu bombonijeru: nekima Rafaello (masa: 150 g; cijena: 24 kn), nekima After Eight (masa: 200 g; cijena: 17 kn), a nekima Ferrero Rocher (masa: 200 g; cijena: 32 kn). Ako su ukupno kupili 58,5 kg slatkiša i platili ih 7560 kn, koliko je volontera dobilo koju bombonijeru?

5. (20) Rješenje ovog zadatka obavezno predati skupa s ovim listom papira. Rješenja bez ovog lista neće biti bodovana. Također, napišite svoje ime i prezime i na ovaj list.

Na slici dolje vidite primjer jedne „tapete”. Zamišljamo da se uzorak nastavlja s istom pravilnošću po cijeloj ravnini.

Jedinična ćelija tapete je paralelogram takav da se cijela tapeta može dobiti kopijama tog paralelograma translatiranim za cjelobrojne višekratnike njegovih stranica. Na slici gore jasno omeđite jednu jediničnu ćeliju za prikazanu tapetu. Baza tapete je baza $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ ravnine čiji vektori razapinju jediničnu ćeliju. Istaknite i bazu tapete u skladu s Vašim odabirom jedinične ćelije.



Zadatak je sljedeći: Odredite *sve* matrice svih linearnih operatora $\hat{A} : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$ koji su operatori simetrije gornje tapete, pri čemu se te matrice moraju odnositi na bazu tapete koju ste odabrali u uvodnom dijelu zadatka. Obavezno uz svaku matricu napišite i o kojim se operatorima radi (tj. ako se radi o zrcaljenju, s obzirom na koju os, ako se radi o rotaciji, za koji kut oko koje točke i t.d.).

Podsjetnik: *Linearan* operator je operator simetrije nekog objekta (ovdje: tapete) ako taj objekt izgleda jednako prije i poslije primjene operatora.

Bonus 5 bodova: Ako matematički argumentirate zašto je Vaš popis svih operatora simetrije ove tapete stvarno potpun, tj. zašto ste sigurni da nema drugih operatora simetrije.

Matematika 2 za kemičare

prvi kolokvij, 29. travnja 2019.

Napomene. Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dopuštene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni se bodovi pripisuju s negativnim predznakom.

Rješenja prvih četiriju zadataka pišite i predajte odvojeno od rješenja petog zadatka.

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

1. (14) Gaussovom metodom eliminacije odredite sva rješenja $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ sustava

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_4 - x_5 &= -1 \\ -x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ -2x_4 + 2x_5 &= 2. \end{aligned}$$

2. (6 + 6) Zadane su matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Izračunajte $\det(A)$.

(b) Izračunajte $\det\left(B^{-1}A\right)$.

3. (22 = 5 + 7 + 4 + 6) Zadan je linearan operator $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$A(x, y) := (2x + y, 2x + y).$$

(a) Odredite matricu operatora A s obzirom na kanonsku bazu e prostora $\mathbb{R}^2$.

(b) Odredite matricu operatora A s obzirom na bazu

$$f := ((1, 1), (-1, 0))$$

prostora $\mathbb{R}^2$.

(c) Odredite spektar operatora A.

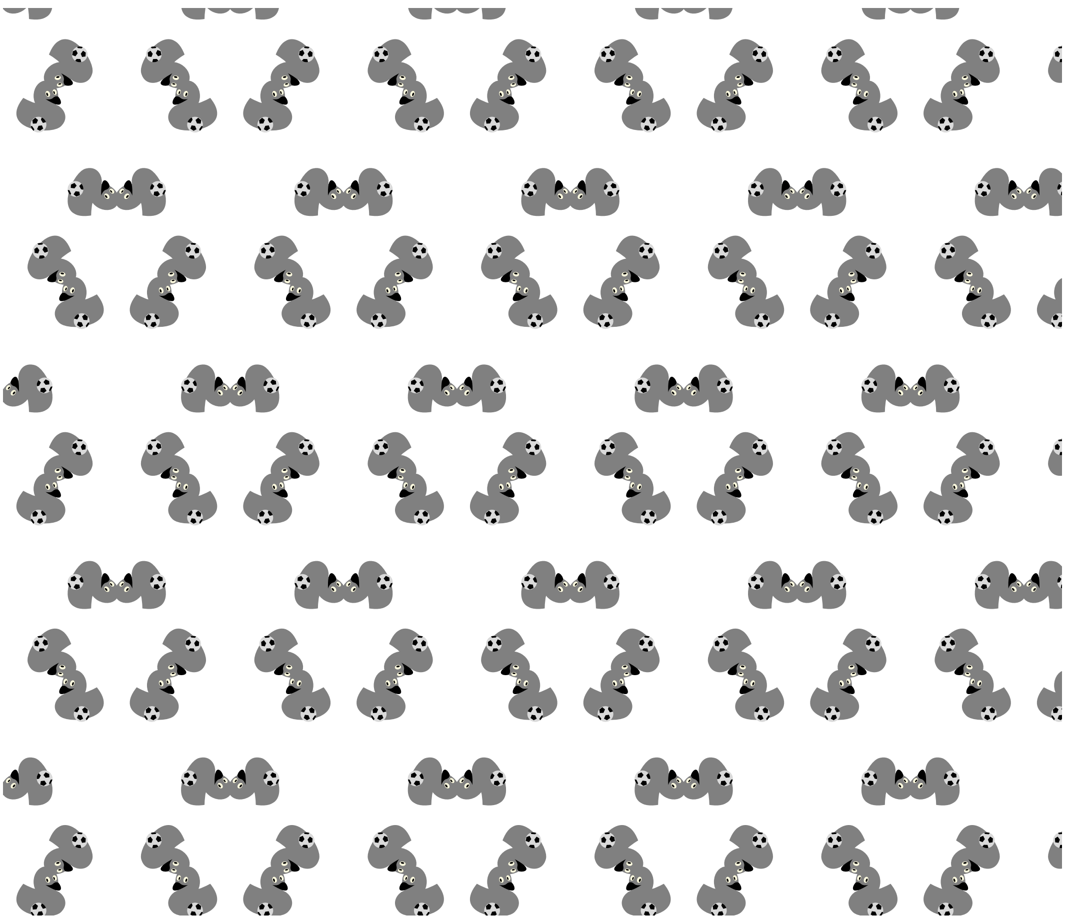
(d) Odredite sve svojstvene vektore operatora A.

4. (12) Organizatori "Dana i noći na PMF-u" odlučili su svakom od 300 volontera pokloniti po jednu bombonijeru: nekima praline "I Love Milka" (masa: 150 g; cijena: 24 kn), nekima Toffiffee (masa: 200 g; cijena: 17 kn), a nekima Merci (masa: 200 g; cijena: 32 kn). Ako su ukupno kupili 59, 5 kg slatkiša i platili ih 8770 kn, koliko je volontera dobilo koju bombonijeru?

5. (20) Rješenje ovog zadatka obavezno predati skupa s ovim listom papira. Rješenja bez ovog lista neće biti bodovana. Također, napišite svoje ime i prezime i na ovaj list.

Na slici dolje vidite primjer jedne „tapete". Zamišljamo da se uzorak nastavlja s istom pravilnošću po cijeloj ravnini.

Jedinična ćelija tapete je paralelogram takav da se cijela tapeta može dobiti kopijama tog paralelograma translatiranim za cjelobrojne višekratnike njegovih stranica. Na slici gore jasno omeđite jednu jediničnu ćeliju za prikazanu tapetu. Baza tapete je baza $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ ravnine čiji vektori razapinju jediničnu ćeliju. Istaknite i bazu tapete u skladu s Vašim odabirom jedinične ćelije.



Zadatak je sljedeći: Odredite *sve* matrice svih linearnih operatora $\hat{A} : V^2(O) \to V^2(O)$ koji su operatori simetrije gornje tapete, pri čemu se te matrice moraju odnositi na bazu tapete koju ste odabrali u uvodnom dijelu zadatka. Obavezno uz svaku matricu napišite i o kojim se operatorima radi (tj. ako se radi o zrcaljenju, s obzirom na koju os, ako se radi o rotaciji, za koji kut oko koje točke i t.d.).

Podsjetnik: *Linearan* operator je operator simetrije nekog objekta (ovdje: tapete) ako taj objekt izgleda jednako prije i poslije primjene operatora.

Bonus 5 bodova: Ako matematički argumentirate zašto je Vaš popis svih operatora simetrije ove tapete stvarno potpun, tj. zašto ste sigurni da nema drugih operatora simetrije.

Matematika 2 za kemičare

prvi kolokvij, 29. travnja 2019.

Napomene. Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dopuštene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni se bodovi pripisuju s negativnim predznakom.

Rješenja prvih četiriju zadataka pišite i predajte odvojeno od rješenja petog zadatka.

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

1. (14) Gaussovom metodom eliminacije odredite sva rješenja $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ sustava

$$\begin{aligned} -2x_4 + 2x_5 &= 2 \\ x_1 - x_2 - x_4 + x_5 &= 1 \\ -x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= -1. \end{aligned}$$

2. (6 + 6) Zadane su matrice

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Izračunajte $\det(A)$.

(b) Izračunajte $\det(AB^{-1})$.

3. (22 = 5 + 7 + 4 + 6) Zadan je linearan operator $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$A(x, y) := (3x - y, 3x - y).$$

(a) Odredite matricu operatora A s obzirom na kanonsku bazu e prostora $\mathbb{R}^2$.

(b) Odredite matricu operatora A s obzirom na bazu

$$f := ((0, 1), (-1, 1))$$

prostora $\mathbb{R}^2$.

(c) Odredite spektar operatora A.

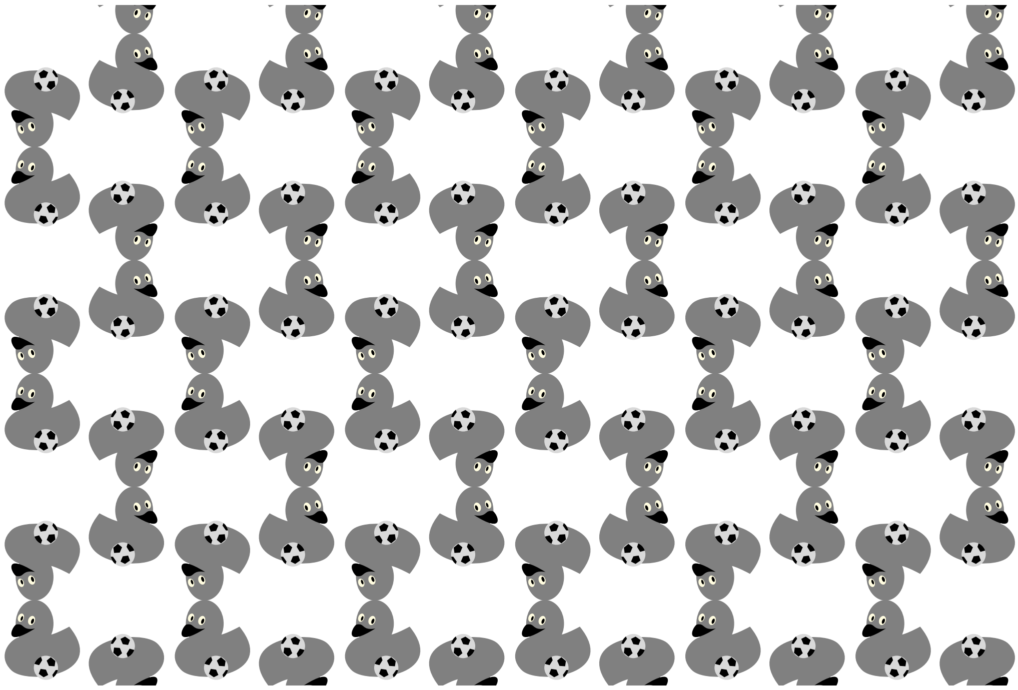
(d) Odredite sve svojstvene vektore operatora A.

4. (12) Organizatori "Dana i noći na PMF-u" odlučili su svakom od 300 volontera pokloniti po jednu bombonijeru: nekima praline "I love Milka" (masa: 150 g; cijena: 24 kn), nekima After Eight (masa: 200 g; cijena: 17 kn), a nekima Ferrero Rocher (masa: 200 g; cijena: 32 kn). Ako su ukupno kupili 57,5 kg slatkiša i platili ih 6200 kn, koliko je volontera dobilo koju bombonijeru?

5. **(20) Rješenje ovog zadatka obavezno predati skupa s ovim listom papira. Rješenja bez ovog lista neće biti bodovana. Također, napišite svoje ime i prezime i na ovaj list.**

Na slici dolje vidite primjer jedne „tapete”. Zamišljamo da se uzorak nastavlja s istom pravilnošću po cijeloj ravnini.

Jedinična ćelija tapete je paralelogram takav da se cijela tapeta može dobiti kopijama tog paralelograma translatiranim za cjelobrojne višekratnike njegovih stranica. Na slici gore jasno omeđite jednu jediničnu ćeliju za prikazanu tapetu. Baza tapete je baza $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ ravnine čiji vektori razapinju jediničnu ćeliju. Istaknite i bazu tapete u skladu s Vašim odabirom jedinične ćelije.



Zadatak je sljedeći: Odredite *sve* matrice svih linearnih operatora $\hat{A} : V^2(O) \to V^2(O)$ koji su operatori simetrije gornje tapete, pri čemu se te matrice moraju odnositi na bazu tapete koju ste odabrali u uvodnom dijelu zadatka. Obavezno uz svaku matricu napišite i o kojim se operatorima radi (tj. ako se radi o zrcaljenju, s obzirom na koju os, ako se radi o rotaciji, za koji kut oko koje točke i t.d.).

Podsjetnik: *Linearan* operator je operator simetrije nekog objekta (ovdje: tapete) ako taj objekt izgleda jednako prije i poslije primjene operatora.

Bonus 5 bodova: Ako matematički argumentirate zašto je Vaš popis svih operatora simetrije ove tapete stvarno potpun, tj. zašto ste sigurni da nema drugih operatora simetrije.

Matematika 2 za kemičare

prvi kolokvij, 29. travnja 2019.

Napomene. Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dopuštene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni se bodovi pripisuju s negativnim predznakom.

Rješenja prvih četiriju zadataka pišite i predajte odvojeno od rješenja petog zadatka.

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

1. (14) Gaussovom metodom eliminacije odredite sva rješenja $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ sustava

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ -x_1 + x_2 - x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= -1. \end{aligned}$$

2. (6 + 6) Zadane su matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Izračunajte $\det(A)$.

(b) Izračunajte $\det(B^{-1}A)$.

3. (22 = 5 + 7 + 4 + 6) Zadan je linearan operator $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$A(x, y) := (x - 2y, x - 2y).$$

(a) Odredite matricu operatora A s obzirom na kanonsku bazu e prostora $\mathbb{R}^2$.

(b) Odredite matricu operatora A s obzirom na bazu

$$f := ((0, -1), (1, 1))$$

prostora $\mathbb{R}^2$.

(c) Odredite spektar operatora A.

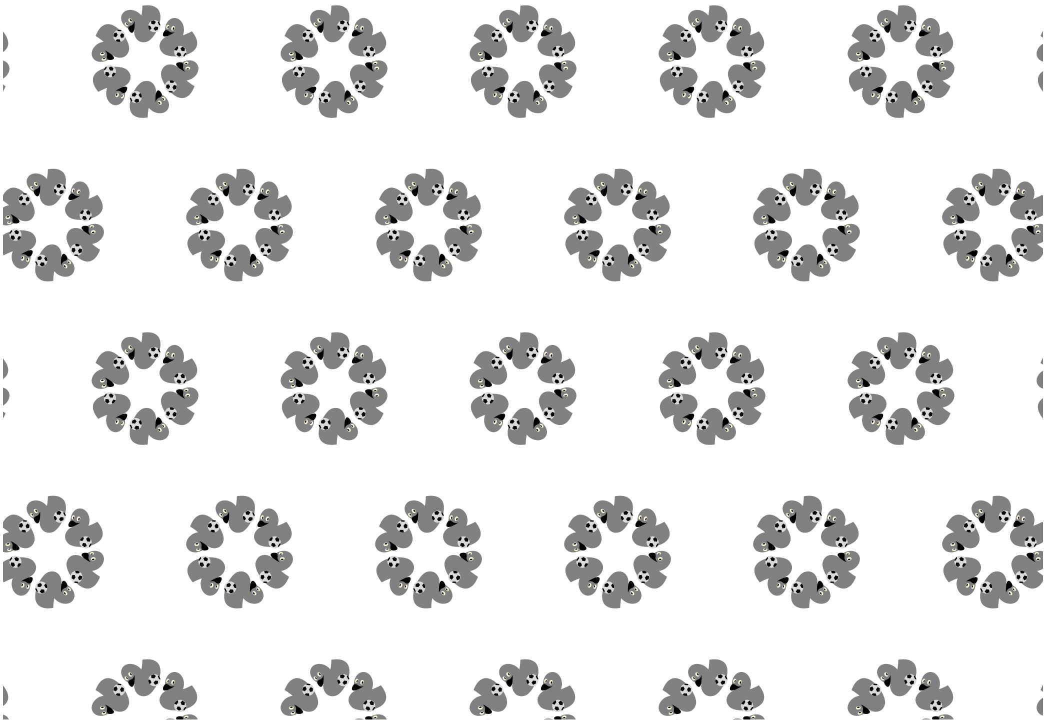
(d) Odredite sve svojstvene vektore operatora A.

4. (12) Organizatori "Dana i noći na PMF-u" odlučili su svakom od 300 volontera pokloniti po jednu bombonijeru: nekima Rafaello (masa: 150 g; cijena: 24 kn), nekima Toffiffee (masa: 200 g; cijena: 17 kn), a nekima Merci (masa: 200 g; cijena: 32 kn). Ako su ukupno kupili 50 kg slatkiša i platili ih 6800 kn, koliko je volontera dobilo koju bombonijeru?

5. (20) Rješenje ovog zadatka obavezno predati skupa s ovim listom papira. Rješenja bez ovog lista neće biti bodovana. Također, napišite svoje ime i prezime i na ovaj list.

Na slici dolje vidite primjer jedne „tapete". Zamišljamo da se uzorak nastavlja s istom pravilnošću po cijeloj ravnini.

Jedinična ćelija tapete je paralelogram takav da se cijela tapeta može dobiti kopijama tog paralelograma translatiranim za cjelobrojne višekratnike njegovih stranica. Na slici gore jasno omeđite jednu jediničnu ćeliju za prikazanu tapetu. Baza tapete je baza $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ ravnine čiji vektori razapinju jediničnu ćeliju. Istaknite i bazu tapete u skladu s Vašim odabirom jedinične ćelije.



Zadatak je sljedeći: Odredite *sve* matrice svih linearnih operatora $\hat{A} : V^2(O) \to V^2(O)$ koji su operatori simetrije gornje tapete, pri čemu se te matrice moraju odnositi na bazu tapete koju ste odabrali u uvodnom dijelu zadatka. Obavezno uz svaku matricu napišite i o kojim se operatorima radi (tj. ako se radi o zrcaljenju, s obzirom na koju os, ako se radi o rotaciji, za koji kut oko koje točke i t.d.).

Podsjetnik: *Linearan* operator je operator simetrije nekog objekta (ovdje: tapete) ako taj objekt izgleda jednako prije i poslije primjene operatora.

Bonus 5 bodova: Ako matematički argumentirate zašto je Vaš popis svih operatora simetrije ove tapete stvarno potpun, tj. zašto ste sigurni da nema drugih operatora simetrije.