MATEMATIKA 2 ZA KEMIČARE
Rješenja zadataka 1 – 3 s treće zadaće 2020./21.

1. (2 + 1) Skup $S \subseteq \mathbb{R}^3$ zadan je sa

$$S \ldots \ (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 1. \tag{1}$$

(a) Je li skup S ploha? Odgovor obrazložite.

(b) Navedite jednu točku skupa S.

Rješenje. (a) Skup S je očito nivo-skup funkcije $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) := (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2,$$

koja je klase C^1. Stacionarne točke funkcije f su točke $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ koje zadovoljavaju

$$\begin{cases} (\partial_x f)(x,y,z) = 0 \\ (\partial_y f)(x,y,z) = 0 \\ (\partial_z f)(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2x-y-z) = 0 \\ 2(2y-x-z) = 0 \\ 2(2z-x-y) = 0 \end{cases} \overset{\substack{\text{npr. Gaussovom} \\ \text{metodom} \\ \text{eliminacija}}}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \quad (x,y,z) = (t,t,t) \text{ za neki } t \in \mathbb{R}.$$

Dakle, stacionarne točke funkcije f su točke (t,t,t), gdje je $t \in \mathbb{R}$. Kako nijedna od njih nije u skupu S (jer uvrštavanjem točke (t,t,t) u jednadžbu (1) dobivamo $(t-t)^2 + (t-t)^2 + (t-t)^2 = 1$, tj. $0 = 1$, što nije istina), slijedi da je skup S ploha zadana funkcijom f.

(b) Jednu točku skupa S možemo odrediti, primjerice, sljedećim razmišljanjem. Uvrstimo li u lijevu stranu jednadžbe (1) npr. $(x,y,z) = (1,0,0)$, dobivamo

$$(1-0)^2 + (0-0)^2 + (0-1)^2 = 2, \tag{2}$$

dakle $(1,0,0) \notin S$. Ali dijeljenjem jednakosti (2) s 2 dobivamo jednakost

$$\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - 0\right)^2 + (0-0)^2 + \left(0 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1,$$

koja pokazuje da je $\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) \in S$.

2. (2) Odredite sve stacionarne točke i ispitajte lokalne ekstreme funkcije $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) := (\operatorname{arctg}(x + y))^2 + (x - 1)^2 + (z - 2)^2.$$

Rješenje. Stacionarne točke funkcije f su točke $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ koje zadovoljavaju

$$\begin{cases} (\partial_x f)(x, y, z) = 0 \\ (\partial_y f)(x, y, z) = 0 \\ (\partial_z f)(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{2 \operatorname{arctg}(x+y)}{1+(x+y)^2} + 2(x - 1) = 0 \\ \frac{2 \operatorname{arctg}(x+y)}{1+(x+y)^2} = 0 \\ 2(z - 2) = 0. \end{cases}$$

Oduzimanjem druge od prve jednadžbe u ovom sustavu dobivamo $2(x - 1) = 0$, tj. $x = 1$, pa iz druge jednadžbe slijedi $\operatorname{arctg}(1 + y) = 0$, tj. $1 + y = 0$, tj. $y = -1$, dok je treća jednadžba ekvivalentna sa $z = 2$. Dakle, jedina stacionarna točka funkcije f je točka $(1, -1, 2)$.

Kako je za sve $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} (Hf)(x, y, z) &= \begin{pmatrix} \partial_x^2 f & \partial_x \partial_y f & \partial_x \partial_z f \\ \partial_y \partial_x f & \partial_y^2 f & \partial_y \partial_z f \\ \partial_z \partial_x f & \partial_z \partial_y f & \partial_z^2 f \end{pmatrix} (x, y, z) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2 - 4 \operatorname{arctg}(x+y) \cdot (x+y)}{(1+(x+y)^2)^2} + 2 & \frac{2 - 4 \operatorname{arctg}(x+y) \cdot (x+y)}{(1+(x+y)^2)^2} & 0 \\ \frac{2 - 4 \operatorname{arctg}(x+y) \cdot (x+y)}{(1+(x+y)^2)^2} & \frac{2 - 4 \operatorname{arctg}(x+y) \cdot (x+y)}{(1+(x+y)^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

imamo

$$(Hf)(1, -1, 2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

dakle

$$A_1 = 4 > 0, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad A_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

pa je $(1, -1, 2)$ točka lokalnog minimuma funkcije f.

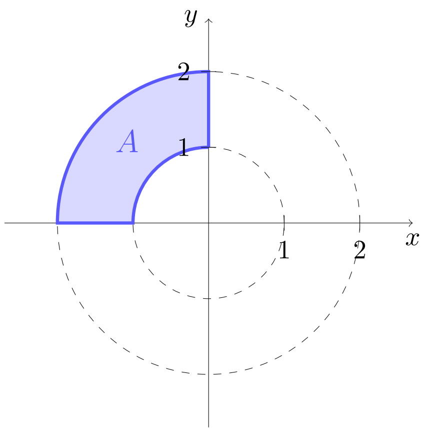
3. (2) Izračunajte integral

$$\int_S \frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2} \cdot x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdje je skup $S \subseteq \mathbb{R}^2$ zadan sa

$$S \ldots \begin{cases} 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \\ x \leq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Rješenje. Skup A po kojem integriramo prikazan je na sljedećoj slici:



Prijelazom na polarne koordinate dobivamo

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{r^2+1}{r^2} \cdot r\cos\varphi \cdot r \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(r^2+1\right)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= \int_1^2 \left(r^2+1\right)\,\mathrm{d}r \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \left(\frac{r^3}{3}+r\right)\Bigg|_{r=1}^{r=2} \cdot \sin\varphi\Bigg|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\pi} \\ &= \frac{10}{3}\cdot(-1) \\ &= -\frac{10}{3}. \end{aligned}$$