Matematika 2

treća zadaća, 29. svibnja 2015.

Slaven Kožić

1. (3 boda) Riješite diferencijalnu jednadžbu s početnim uvjetima

$$y'' = e^x + 12x^2;$$
$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Rješenje. Dva puta integriramo jednadžbu i tako dobijemo opće rješenje

$$y = e^x + x^4 + cx + d, \qquad c, d \in \mathbb{R}.$$

Iz početnih uvjeta dobivamo

$$c = -1, \qquad d = -1$$

pa traženo partikularno rješenje glasi

$$y = e^x + x^4 - x - 1.$$

2. (4 boda) Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$(x+3)^{-1}y = y' - (x^2 + 5x + 6).$$

Rješenje. Diferencijalnu jednadžbu možemo zapisati kao

$$y' - \frac{1}{x+3}y = x^2 + 5x + 6$$

pa vidimo da se radi o linearnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda. Opće rješenje pripadne homogene jednadžbe

$$y' - \frac{1}{x+3}y = 0$$

glasi

$$y_H = (x+3)c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Sada varijacijom konstanti dolazimo i do općeg rješenja polazne jednadžbe:

$$y = (x+3)\left(\frac{x^2}{2} + 2x + d\right), \qquad d \in \mathbb{R}.$$

3. (3 boda) Izračunajte

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^1\int_0^1 xy\cos(yz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Rješenje. Ukratko,

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^1\int_0^1 xy\cos(yz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\pi}(2-\sqrt{2}).$$

Matematika 2

treća zadaća, 29. svibnja 2015.

Slaven Kožić

1. (3 boda) Riješite diferencijalnu jednadžbu s početnim uvjetima

$$y'' = \cos x + 20x^3;$$
$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Rješenje. Dva puta integriramo jednadžbu i tako dobijemo opće rješenje

$$y = -\cos x + x^5 + cx + d, \qquad c, d \in \mathbb{R}.$$

Iz početnih uvjeta dobivamo

$$c = 0, \qquad d = 1$$

pa traženo partikularno rješenje glasi

$$y = -\cos x + x^5 + 1.$$

2. (4 boda) Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y = (2 + x)(y' - x^2 - 5x - 6).$$

Rješenje. Diferencijalnu jednadžbu možemo zapisati kao

$$y' - \frac{1}{x+2} y = x^2 + 5x + 6$$

pa vidimo da se radi o linearnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda. Opće rješenje pripadne homogene jednadžbe

$$y' - \frac{1}{x+2} y = 0$$

glasi

$$y_H = (x + 2)c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Sada varijacijom konstanti dolazimo i do općeg rješenja polazne jednadžbe:

$$y = (x + 2)\left(\frac{x^2}{2} + 3x + d\right), \qquad d \in \mathbb{R}.$$

3. (3 boda) Izračunajte

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 xye^{yz} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z.$$

Rješenje. Ukratko,

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 xye^{yz} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \frac{e}{2} - 1.$$