MATEMATIKA 2 – rješenja druge zadaće
2020./2021.

1. (2) Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' + \sin^2(x+y) = 0.$$

Rješenje. Uvođenjem supstitucije

$$u = x + y$$

(dakle $u' = 1 + y'$, tj. $y' = u' - 1$) jednadžba prelazi u oblik

$$u' = 1 - \sin^2 u,$$

tj.

$$u' = \cos^2 u.$$

Ovu jednadžbu rješavamo metodom separacije varijabli: množenjem jednadžbe

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos^2 u$$

sa $\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 u}$ i integriranjem dobivamo

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u} = \int \mathrm{d}x,$$

tj.

$$\operatorname{tg} u = x + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

dakle opće je rješenje zadane jednadžbe dano sa

$$\operatorname{tg}(x+y) = x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(Postoje i singularna rješenja: $u = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tj. $y = \frac{\pi}{2} + k\pi - x$, $k \in \mathbb{Z}$.)

2. (2) Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = \frac{xe^y}{ye^{x^2}}.$$

Rješenje. Ovu jednadžbu rješavamo metodom separacije varijabli: množenjem jednadžbe

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{xe^y}{ye^{x^2}}$$

sa $\frac{y\,\mathrm{d}x}{e^y}$ i integriranjem dobivamo

$$\int ye^{-y}\,\mathrm{d}y = \int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Integral s lijeve strane lako se izračuna parcijalnim integriranjem, a integral s desne strane uvođenjem supstitucije $t = -x^2$. Dobivamo da je opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe dano sa

$$-(y+1)e^{-y} = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

3. (3) Riješite zadaću

$$\begin{cases} y'' - y' = \cos(2x) + \sin(3x) \\ y(0) = -\frac{1}{6} \\ y'(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Rješenje. Zadana je diferencijalna jednadžba očito linearna diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima pa je rješavamo tako da najprije riješimo pripadnu homogenu jednadžbu

$$y'' - y' = 0. \tag{1}$$

Kako njezina karakteristična jednadžba

$$\lambda^2 - \lambda = 0$$

ima rješenja $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 1$, njeno je opće rješenje

$$y_H = C_1 + C_2 e^x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Nadalje, primijetimo da se na desnoj strani zadane diferencijalne jednadžbe nalazi suma dvaju izraza iz tablice partikularnih rješenja, pa je rješavamo metodom superpozicije:

- Odredimo partikularno rješenje y_{P_1} jednadžbe

  $$y'' - y' = \cos(2x). \tag{3}$$

  Budući da se na njenoj desnoj strani nalazi $\cos(2x)$:

  - Kandidat za y_{P_1} je funkcija oblika $A\cos(2x) + B\sin(2x)$ za neke konstante $A, B \in \mathbb{R}$. Takva je funkcija rješenje jednadžbe (3) ako i samo ako vrijedi

    $$\begin{aligned} & (A\cos(2x) + B\sin(2x))'' - (A\cos(2x) + B\sin(2x))' = \cos(2x) \\ \Leftrightarrow \quad & -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) + 2A\sin(2x) - 2B\cos(2x) = \cos(2x) \\ \Leftrightarrow \quad & (-4A - 2B)\cos(2x) + (-4B + 2A)\sin(2x) = \cos(2x) \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} -4A - 2B = 1 \\ -4B + 2A = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & A = -\frac{1}{5},\ B = -\frac{1}{10}. \end{aligned}$$

    Dakle, $y_{P_1} = -\frac{1}{5}\cos(2x) - \frac{1}{10}\sin(2x)$.

- Odredimo partikularno rješenje y_{P_2} jednadžbe

  $$y'' - y' = \sin(3x). \tag{4}$$

  Budući da se na njenoj desnoj strani nalazi $\sin(3x)$:

– Kandidat za y_{P_2} je funkcija oblika $A\cos(3x) + B\sin(3x)$ za neke konstante $A, B \in \mathbb{R}$. Takva je funkcija rješenje jednadžbe (4) ako i samo ako vrijedi

$$
\begin{aligned}
&(A\cos(3x) + B\sin(3x))'' - (A\cos(3x) + B\sin(3x))' = \sin(3x) \\
&\quad\Leftrightarrow \quad -9A\cos(3x) - 9B\sin(3x) + 3A\sin(3x) - 3B\cos(3x) = \sin(3x) \\
&\quad\Leftrightarrow \quad (-9A - 3B)\cos(3x) + (-9B + 3A)\sin(3x) = \sin(3x) \\
&\quad\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -9A - 3B = 0 \\ -9B + 3A = 1 \end{cases} \\
&\quad\Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{30},\ B = -\frac{1}{10}.
\end{aligned}
$$

Dakle, $y_{P_2} = \frac{1}{30}\cos(3x) - \frac{1}{10}\sin(3x)$.

Sad je opće rješenje početne jednadžbe dano formulom

$$y = y_H + y_{P_1} + y_{P_2},$$

tj.

$$y = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{5}\cos(2x) - \frac{1}{10}\sin(2x) + \frac{1}{30}\cos(3x) - \frac{1}{10}\sin(3x), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Mi tražimo ono partikularno rješenje koje zadovoljava i početne uvjete $y(0) = -\frac{1}{6}$ i $y'(0) = \frac{1}{2}$. Deriviranjem formule (5) vidimo da je za fiksne $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ derivacija odgovarajućeg partikularnog rješenja naše jednadžbe dana sa

$$y' = C_2 e^x + \frac{2}{5}\sin(2x) - \frac{1}{5}\cos(2x) - \frac{1}{10}\sin(3x) - \frac{3}{10}\cos(3x).$$

Dakle, imamo

$$\begin{cases} y(0) = -\frac{1}{6} \\ y'(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{1}{5} + \frac{1}{30} = -\frac{1}{6} \\ C_2 - \frac{1}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Uvrštavanjem izračunatih konstanti C_1 i C_2 u formulu (5) dobivamo da je rješenje naše zadaće funkcija

$$y = -1 + e^x - \frac{1}{5}\cos(2x) - \frac{1}{10}\sin(2x) + \frac{1}{30}\cos(3x) - \frac{1}{10}\sin(3x).$$

4. (3) Riješite zadaću

$$\begin{cases} (x+1)^4 y - y' + xe^{\frac{(x+1)^5}{5}} = 0 \\ y(0) = e. \end{cases}$$

Rješenje. Zapisivanjem zadane diferencijalne jednadžbe u obliku

$$y' = (x+1)^4 y + xe^{\frac{(x+1)^5}{5}} \tag{6}$$

vidimo da se radi o linearnoj diferencijalnoj jednadžbi prvog reda.

Riješimo pripadnu homogenu jednadžbu

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x+1)^4 y.$$

Separacijom varijabli (množenjem sa $\frac{\mathrm{d}x}{y}$ i integriranjem) dobivamo

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int (x+1)^4 \, \mathrm{d}x \quad &\Leftrightarrow \quad \ln|y| = \frac{(x+1)^5}{5} + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad |y| = e^{\frac{(x+1)^5}{5} + C_1}, \qquad C_1 \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad |y| = e^{C_1} \cdot e^{\frac{(x+1)^5}{5}}, \qquad C_1 \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad y = C \cdot e^{\frac{(x+1)^5}{5}}, \qquad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

što dodavanjem singularnog rješenja $y = 0$ prelazi u

$$y_H = C\, e^{\frac{(x+1)^5}{5}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Prelazimo na metodu varijacije konstanti: rješenje jednadžbe (6) tražimo u obliku

$$y = C(x)\, e^{\frac{(x+1)^5}{5}}. \tag{7}$$

Uvrštavanjem u jednadžbu (6) vidimo da je takva funkcija rješenje jednadžbe (6) ako i samo ako vrijedi

$$\begin{aligned} &\left(C(x)\, e^{\frac{(x+1)^5}{5}}\right)' = (x+1)^4\, C(x)\, e^{\frac{(x+1)^5}{5}} + xe^{\frac{(x+1)^5}{5}} \\ &\quad \Leftrightarrow \quad C'(x)\, e^{\frac{(x+1)^5}{5}} + C(x)\, e^{\frac{(x+1)^5}{5}} (x+1)^4 = (x+1)^4\, C(x)\, e^{\frac{(x+1)^5}{5}} + xe^{\frac{(x+1)^5}{5}} \\ &\quad \Leftrightarrow \quad C'(x)\, e^{\frac{(x+1)^5}{5}} = xe^{\frac{(x+1)^5}{5}} \\ &\quad \Leftrightarrow \quad C'(x) = x \\ &\quad \Leftrightarrow \quad C(x) = \frac{x^2}{2} + D, \qquad D \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Napokon, uvrštavanjem u (7) dobivamo da je opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + D\right) e^{\frac{(x+1)^5}{5}}, \qquad D \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Rješenje zadaće je ono partikularno rješenje koje zadovoljava početni uvjet $y(0) = e$. Funkcija oblika (8) zadovoljava $y(0) = e$ ako i samo ako je

$$\left(\frac{0^2}{2} + D\right) e^{\frac{(0+1)^5}{5}} = e,$$

tj. $D = e^{\frac{4}{5}}$. Prema tome, rješenje zadaće je dano sa

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + e^{\frac{4}{5}}\right) e^{\frac{(x+1)^5}{5}}.$$