MATEMATIKA 2 – rješenja prve zadaće
2020./2021.

1. *(2)* Gaussovom metodom eliminacija riješite sljedeći sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned}
x + y - z - w &= -4 \\
x - y - z + w &= 0 \\
-3x + y + z + w &= 6 \\
-x - y - z + 3w &= 6.
\end{aligned}$$

Rješenje. Provodimo elementarne transformacije na redcima matrice sustava

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right).$$

Primjerice, možemo najprije prvi redak pomnožen s -1, s 1 odnosno s -1 pribrojiti drugom, trećem odnosno četvrtom retku, a sam prvi redak pomnožiti s -1, čime dobivamo matricu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 4 & 10 \end{array}\right).$$

Množenjem drugog, trećeg i četvrtog retka ove matrice s $\frac{1}{2}$ dobivamo matricu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right).$$

Zatim pribrajanjem drugog retka pomnoženog s -1 odnosno s -2 prvom odnosno četvrtom retku dobivamo matricu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

u kojoj možemo izostaviti četvrti redak s obzirom da je identičan trećem, i nakon toga treći redak pribrojiti drugom retku kako bismo dobili matricu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

iz koje lako očitamo da je rješenje početnog sustava jednoparametarsko i dano sa

$$\begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \\ z = t + 2 \\ w = t + 3, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

2. *(2)* Zadane su matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Izračunajte

$$\frac{\det(AB)}{\det(AB^{-1})}.$$

Rješenje. Lako se izračuna da je $\det A = -2$ i $\det B = 2$ pa imamo

$$\begin{aligned} \frac{\det(AB)}{\det(AB^{-1})} &= \frac{\det A \cdot \det B}{\det A \cdot \det(B^{-1})} \\ &= \frac{\det B}{\det(B^{-1})} \\ &= \frac{\det B}{\frac{1}{\det B}} \\ &= (\det B)^2 \\ &= 2^2 \\ &= 4. \end{aligned}$$

3. *(2)* Je li skup

$$\{(3,1,1),\ (2,-1,1),\ (7,-1,3)\}$$

baza prostora $\mathbb{R}^3$? Odgovor obrazložite.

Rješenje. Npr. ispitivanjem linearne nezavisnosti pomoću ranga, ili uočavanjem da je

$$(3,1,1) + 2(2,-1,1) = (7,-1,3),$$

vidimo da je zadani skup linearno zavisan pa nije baza prostora $\mathbb{R}^3$.

4. *(2 + 2)* Zadan je linearan operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$A(x, y, z) := (x + 2y + 3z, x, z).$$

(a) Odredite matricu operatora A s obzirom na uređenu bazu

$$f := ((1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 2, 0))$$

prostora $\mathbb{R}^3$.

(b) Odredite spektar i sve svojstvene vektore operatora A.

Rješenje. Najprije odredimo matricu operatora A s obzirom na kanonsku bazu $e = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ prostora $\mathbb{R}^3$: imamo

$$[A]_e = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [Ae_1]_e & [Ae_2]_e & [Ae_3]_e \\ | & | & | \end{pmatrix} \overset{\heartsuit\text{KB}}{=} \begin{pmatrix} | & | & | \\ Ae_1 & Ae_2 & Ae_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nadalje, matrica prijelaza T iz baze e u bazu f dana je sa

$$T = \begin{pmatrix} | & | & | \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sad po formuli za prijelaz iz baze u bazu imamo

$$\begin{aligned}
[A]_f &= T^{-1}[A]_e T \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(b) Sjetimo se da su svojstvene vrijednosti operatora A realne nultočke karakterističnog polinoma k_A, koji je dan formulom

$$k_A(\lambda) = \det([A]_f - \lambda I_3) \qquad \text{ili ekvivalentno} \qquad k_A(\lambda) = \det([A]_e - \lambda I_3).$$

Npr. uvrštavanjem u ovu drugu formulu dobivamo

$$k_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1).$$

Dakle, spektar (tj. skup svih svojstvenih vrijednosti) operatora A dan je sa

$$\sigma(A) = \{-1, 1, 2\}\,.$$

Odredimo sad svojstvene vektore za svaku od triju svojstvenih vrijednosti operatora A:

- Svojstveni vektori za svojstvenu vrijednost -1 su nenulrješenja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ homogenog sustava linearnih jednadžbi kojemu je lijevi dio matrice sustava matrica $[A]_e - (-1)I_3$ (Nap.: Ovdje je bitno da se uvrsti matrica operatora A **s obzirom na kanonsku bazu**). Dakle, radi se o linearnom sustavu s matricom

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-(-1) & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -(-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-(-1) & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

  Lako se izračuna da su rješenja ovog sustava dana sa

$$(x, y, z) = (t, -t, 0), \qquad t \in \mathbb{R},$$

  dakle svojstveni vektori operatora A za svojstvenu vrijednost -1 su vektori

$$(t, -t, 0), \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

- Svojstveni vektori za svojstvenu vrijednost 1 su nenulrješenja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ homogenog sustava linearnih jednadžbi kojemu je lijevi dio matrice sustava matrica $[A]_e - 1I_3 = [A]_e - I_3$. Dakle, radi se o linearnom sustavu s matricom

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

  Lako se izračuna da su rješenja ovog sustava dana sa

$$(x, y, z) = \left(t, t, -\tfrac{2}{3}t\right), \qquad t \in \mathbb{R},$$

  dakle svojstveni vektori operatora A za svojstvenu vrijednost 1 su vektori

$$\left(t, t, -\tfrac{2}{3}t\right), \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

- Svojstveni vektori za svojstvenu vrijednost 2 su nenulrješenja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ homogenog sustava linearnih jednadžbi kojemu je lijevi dio matrice sustava matrica $[A]_e - 2I_3$. Dakle, radi se o linearnom sustavu s matricom

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

  Lako se izračuna da su rješenja ovog sustava dana sa

$$(x, y, z) = (2t, t, 0), \qquad t \in \mathbb{R},$$

  dakle svojstveni vektori operatora A za svojstvenu vrijednost 2 su vektori

$$(2t, t, 0), \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$