Spektar i svojstveni vektori linearnog operatora

Sonja Žunar

23. ožujka 2018.

Definicija

Neka su V realan vektorski prostor i $A : V \to V$ linearan operator. Ako neki $v \in V$, $v \neq 0$, zadovoljava

$$Av = \lambda v \qquad \text{za neki } \lambda \in \mathbb{R},$$

tada:

- v zovemo **svojstvenim vektorom** operatora A.
- λ zovemo **svojstvenom vrijednosti** operatora A.

Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A zove se **spektar** od A.

Primjer

Riječima: $A :=$ zrcaljenje vektora u $V^3(O)$ oko xy-ravnine.

- Ako je $\vec{v}$ na z-osi, tada je $A\vec{v} = -\vec{v}$, dakle $\vec{v}$ je svojstveni vektor od A za svojstvenu vrijednost -1.
- Ako je $\vec{v}$ u xy-ravnini, tada je $A\vec{v} = \vec{v} = 1 \cdot \vec{v}$, dakle $\vec{v}$ je svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost 1.

Primjer

Riječima: $A :=$ zrcaljenje vektora u $V^3(O)$ oko xy-ravnine.

- Ako je $\vec{v}$ na z-osi, tada je $A\vec{v} = -\vec{v}$, dakle $\vec{v}$ je svojstveni vektor od A za svojstvenu vrijednost -1.
- Ako je $\vec{v}$ u xy-ravnini, tada je $A\vec{v} = \vec{v} = 1 \cdot \vec{v}$, dakle $\vec{v}$ je svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost 1.

Formulama: $A : V^3(O) \to V^3(O)$,

$$A[x, y, z] = [x, y, -z].$$

- $A[0, 0, z] = [0, 0, -z] = -[0, 0, z]$, dakle vektori $[0, 0, z]$ za $z \in \mathbb{R}$ svojstveni su vektori od A za svojstvenu vrijednost -1.
- $A[x, y, 0] = [x, y, 0] = 1[x, y, 0]$, dakle vektori $[x, y, 0]$ za $x, y \in \mathbb{R}$ svojstveni su vektori od A za svojstvenu vrijednost 1.

Primjer

Linearan operator R iz Zadatka 28,

$$R := \text{rotacija u } \mathbb{R}^2 \text{ oko ishodišta za } 90^\circ \text{ u smjeru suprotnom od kazaljke na satu,}$$

nema svojstvenih vektora, jer zakretanjem za 90° oko ishodišta nijedna točka $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ne ostaje na istom pravcu kroz ishodište.

Teorem

Svojstveni polinom matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ (i svakog linearnog operatora koji je u nekoj bazi prikazan matricom A) jest polinom k_A definiran formulom

$$k_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} - \lambda & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Vrijedi:

svojstvene vrijednosti od A = realne nultočke od k_A.