Redovi

Sonja Žunar

13. lipnja 2019.

Definicija

Neka je (a_n) niz realnih brojeva. Za svaki $n \in \mathbb{N}$, broj

$$S_n := a_1 + a_2 + \ldots a_n$$

zovemo n-**tom parcijalnom sumom reda** $\sum a_n$.
Red $\sum a_n$ definiramo kao uređen par

$$((a_n), (S_n)) .$$

Suma reda $\sum a_n$ je

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &:= \lim_{n \to \infty} S_n \\ &= \lim_{n \to \infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} , \end{aligned}$$

ako taj limes postoji.
Ako je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$, kažemo da red $\sum a_n$ **konvergira**, a inače da **divergira**.

Napomena

- Red $\sum a_n$ i njegovu sumu u praksi često označavamo istim simbolom: $\sum a_n$, $\sum_n a_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Općenitije, početni indeks ne mora biti $n = 1$: npr.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \left(a_0 + a_1 + \ldots + a_n\right).$$

Primjer

Ispitajmo konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Po definiciji sume reda imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}_{\text{suma prvih } n \text{ članova geometrijskog niza sa } s=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} s \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1,$$

dakle red $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ konvergira i suma mu je 1.

Napomena

Općenitije, analogno se pokaže da za $s, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ **geometrijski red**

$$\sum_{\substack{n=0\\1}}^{\infty} sq^n$$

konvergira ako i samo ako je $\boxed{|q| < 1}$; u tom je slučaju

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} sq^n = \frac{s}{1-q}} \qquad \text{i} \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} sq^n = \frac{sq}{1-q}}.$$

Primjer

Red

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1$$

divergira: po definiciji sume reda imamo

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} 1 &= \lim_{n\to\infty} (\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ pribrojnika}}) \\ &= \lim_{n\to\infty} n \\ &= +\infty.\end{aligned}$$

Napomena

- Ako je $a_n \geq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, tada je
$$\text{ili} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in [0, \infty\rangle \quad \text{ili} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty.$$
- Za sve $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vrijedi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$
- Vrijedi
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$
kad god su sume $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ definirane i nije jedna $+\infty$, a druga $-\infty$.

Kriteriji konvergencije i divergencije reda

1. Nužan uvjet konvergencije reda

$$\boxed{\text{Ako red } \sum_n a_n \text{ konvergira, tada je } \lim_{n\to\infty} a_n = 0.}$$

Ekvivalentno (i korisnije pri ispitivanju konvergencije redova):

$$\boxed{\boxed{\text{Ako } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0, \text{ tada red } \sum_n a_n \text{ divergira.}}}$$

Obrat ne vrijedi: npr.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \qquad \text{ali} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

(Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ zove se **harmonijski red**.)

2. Kriterij uspoređivanja

Ako vrijedi
$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad \text{za svaki } n \in \mathbb{N},$$
tada:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira $\quad\Rightarrow\quad$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira $\quad\Rightarrow\quad$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

2. Kriterij uspoređivanja

Redovi čiju konvergenciju ispitujemo najčešće se uspoređuju s

- (pozitivnim) **geometrijskim redom** $(s, q > 0)$

$$\boxed{\sum_{\substack{n=0\\ 1}} sq^n \begin{cases} \text{konvergira,} & \text{ako je } 0 < q < 1, \\ \text{divergira,} & \text{ako je } q \geq 1 \end{cases}}$$

- redom

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{konvergira,} & \text{ako je } p > 1, \\ \text{divergira,} & \text{ako je } 0 < p \leq 1. \end{cases}}$$

3. D'Alembertov kriterij

Ako postoji

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =: q,$$

tada:

- $q > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.
- $q < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
- $q = 1 \quad \Rightarrow \quad$ ovaj kriterij ne daje odgovor.

4. Cauchyjev kriterij

Ako postoji

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} =: q,$$

tada:

- $q > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.
- $q < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
- $q = 1 \quad \Rightarrow \quad$ ovaj kriterij ne daje odgovor.