Veza linearni operatori $\leftrightarrow$ matrice

Sonja Žunar

23. ožujka 2018.

Jako važan teorem

Neka je $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ **fiksna** uređena baza realnog vektorskog prostora V. Definirali smo korespondencije

$$\begin{aligned} v \in V \quad &\leftrightarrow \quad [v]_f \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \\ \text{linearan operator } A : V \to V \quad &\leftrightarrow \quad [A]_f \in M_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Za linearne operatore $A, B : V \to V$, $v \in V$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi:

(1) Djelovanje operatora A na vektor v: $[Av]_f = [A]_f \, [v]_f$

(2) Matrica kompozicije linearnih operatora A i B: $[B \circ A]_f = [B]_f \, [A]_f$

(3) A je bijekcija $\Leftrightarrow$ postoji inverz matrice $[A]_f$. U tom je slučaju i inverzna funkcija A^{-1} od A linearan operator i vrijedi $\left[A^{-1}\right]_f = [A]_f^{-1}$.

(4) Identiteta $\mathrm{id}_V : V \to V$, $\mathrm{id}_V(v) := v$, jest lin. operator i $[\mathrm{id}_V]_f = I_n$.
Nulfunkcija $0 : V \to V$, $0(v) := 0_V$, jest linearan operator i $[0]_f = 0_{n,n}$.

(5) $[A + B]_f = [A]_f + [B]_f$.

(6) $[\alpha A]_f = \alpha \, [A]_f$.

Zadatak 29

Linearan operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadan je svojom matricom u kanonskoj bazi e prostora $\mathbb{R}^3$:

$$[A]_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Izračunajte $A(1,2,3)$.

(b) Izračunajte $A(x,y,z)$ za $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(c) Je li A bijekcija? Ako jest, odredite $\left[A^{-1}\right]_e$.

(d) Izračunajte $[A \circ A]_e$.