

Matematika 2 za kemičare

pismeni ispit, 15. lipnja 2011.

Franka Miriam Brückler & Slaven Kožić

1. Za koje vrijednosti parametra λ funkcija $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ zadana sa

$$f(x, y, z) = \lambda x^2 + xy + yz + zx + y + z$$

ima stacionarnu točku? Koje su koordinate te točke? U ovisnosti o vrijednosti parametra λ ispitaajte postiče li funkcija f u toj točki minimum ili maksimum.

2. Označimo sa S jediničnu kuglu sa središtem u ishodištu, tj. neka je

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Izračunajte

$$\int \int \int_S \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz.$$

3. Ispitajte konvergenciju sljedećih redova i obrazložite svoje zaključke

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{3n+2}$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + \cos n}{2^n + \frac{1}{2^n}} n^2$.

4. Riješite zadaću

$$\begin{cases} y'' + y' - 12y = x^2 + x + \sin x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

5. Za neku tetragonsku kristalnu strukturu se među operatorima simetrije nalaze i operatori čije su matrice (obzirom na kristalografsku bazu, za koju je poznato da su vektori međusobno okomiti i prva dva su jednako duga)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) O kakvim se simetrijskim operatorima¹ radi, tj. što primjena pojedinog operatora „radi“ radij-vektorima prostora?
- (b) Skicirajte skup fiksnih točaka operatora \hat{A} opisanog matricom A . Fiksne točke operatora \hat{A} su točke čiji radij-vektori v imaju svojstvo $\hat{A}v = v$. Temeljem toga skicirajte (na istoj slici) i skup svojstvenih vektora operatora \hat{A} koji pripadaju svojstvenoj vrijednosti 1, a da pritom taj skup ima najveći mogući broj elemenata.
- (c) Izračunajte ABC . Koji je efekt djelovanja tog operatora? Kamo taj operator preslika radij-vektor $[1, 2, 3]$?

¹Podsjećamo, simetrijski operatori koji djeluju na prostoru su linearni operatori koji se mogu opisati kao rotacija oko neke osi za neki kut, zrcaljenje obzirom na neku ravninu, inverzija (centralna simetrija) obzirom na neku točku, te njihove kompozicije.