

Matematika 2 za kemičare

pismeni ispit, 19. rujna 2012.

Franka Miriam Brückler & Slaven Kožić

Rješenja prva četiri zadatka pišite i predajte odvojeno od rješenja petog zadatka.

1. (20) U ovisnosti o parametru λ riješite sustav

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\-2x_1 + x_2 + \lambda x_4 &= -1 \\5x_2 + 8x_3 + x_4 &= 3.\end{aligned}$$

2. (20) Odredite stacionarne točke i ispitajte ekstreme funkcije $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = x e^{x+y^2+(z-1)^3}.$$

3. (10+10) Riješite diferencijalne jednadžbe

(a) $y'' + 2y' + 3y + 4 = 0$;

(b) $x^2 y y' + 2y^2 + 3 = 0$.

4. (5+5+10) Zadano je vektorsko polje $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ i krivulja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$F(x, y, z) = \left(\frac{xy}{z+1}, x \cos(y(z-1)), z+1 \right), \quad \gamma(t) = (t-1, t, t+1).$$

izračunajte

(a) divergenciju od F ;

(b) rotaciju od F ;

(c) krivuljni integral $\int_{\gamma} F \, d\gamma$.

5. (20) Utvrdite je li vjerojatnost da se elektron kriptonove ($Z = 36$) $3d_z$ orbitale nalazi u kugli polumjera $a_0/4 \approx 13,225$ pm veća ili manja od $1/2$. Formula atomske $3d_z$ orbitale je

$$\psi_{3d_z}(r, \theta, \varphi) = \sqrt{\frac{Z^3}{7776\pi a_0^3}} \cdot \frac{4Z^2}{9a_0^2} \cdot (3 \cos^2 \theta - 1) \cdot r^2 e^{-Zr/(3a_0)}.$$

Vjerojatnost da se elektron opisan orbitalom ψ nađe unutar dijela prostora V je

$$p(V) = \iiint_V |\psi|^2 \, dx \, dy \, dz.$$

Jakobijan prijelaza iz Kartezijevih u sferne koordinate iznosi $r^2 \sin \theta$. Smijete koristiti formulu

$$\int_0^{6a} x^6 e^{-x/a} \, dx = a^7 (720 - 176112e^{-6}).$$