

Matematika 2 za kemičare

pismeni ispit, 5. rujna 2012.

Franka Miriam Brückler & Slaven Kožić

Rješenja prva četiri zadatka pišite i predajte odvojeno od rješenja petog zadatka.

1. **(8+4+8)** Neka je $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linearan operator čija je matrica u standardnoj kanonskoj bazi (e_1, e_2, e_3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Odredite A^{-1} ;
(b) Riješite sustav $Ax = e_1$;
(c) Zapišite matricu operatora A u bazi $(e_3, e_1, e_1 + e_2)$.
2. **(20)** Ispitajte ekstreme funkcije $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xy - xz + yz + x - y + 2z + 1.$$

3. **(10+10)** Izračunajte

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n}{(n+1)e^{n^2}} \right), \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{500 \cdot 502 \cdot 504 \cdots (498 + 2n)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n - 1)}.$$

4. **(20)** Označimo sa \mathcal{S} stožac visine 1 čija je baza jedinični krug u xy -ravnini sa središtem u ishodištu. Izračunajte

$$\int \int \int_{\mathcal{S}} x^2 + y^2 + z^2 \, dx \, dy \, dz.$$

5. **(20)** Neko dvoje od šestotinjak studenata kemije žele proširiti trač da njihova profesorica matematike jako voli jesti povrće. Nakon nekog vremena, trač je došao do studentice I. B. koja si je postavila pitanje: kako matematički opisati ovisnost broja studenata koji su čuli trač o vremenu otkad je pušten u optičaj?

(a) Skicirajte primjer grafa koji bi mogao prikazivati tu ovisnost;¹ argumentirajte svoj odabir.

(b) Na brzinu širenja trača utječu razni faktori. To su ponajprije njegova zanimljivost te broj studenata koji su ga do određenog trenutka čuli te ga onda dalje šire. I. B. je prvo odlučila ne komplicirati stvari i pretpostaviti da je brzina širenja trača u svakom trenutku proporcionalna broju studenata koji ga znaju. Zapišite tu izjavu kao diferencijalnu jednadžbu, pri čemu objasnite značenje i smisao svih upotrebljenih simbola. Je li ta diferencijalna jednadžba u skladu s grafom kojeg ste predložili u (a) dijelu zadatka? Je li realistična? Argumentirajte.

(c) I. B. odlučila je malo izmijeniti model: uzela je da je brzina širenja trača u svakom trenutku proporcionalna dodatno i broju studenata koji trač još nisu čuli. Koja diferencijalna jednadžba odgovara takvom izmijenjenom modelu? Odgovara li on Vašem grafu iz (a) dijela zadatka? Argumentirajte.

¹Naravno, obratite pažnju na pravilno označavanje osi.