MATEMATIKA 1 – prva zadaća

2020./2021.

1. (1 + 1) Izračunajte:

(a) $\overline{\left(\dfrac{i^5+i^6}{i^3-i^2}\right)}$

(b) $\left|\dfrac{\left(\sqrt{2}+i\right)\left(\sqrt{2}-i\right)}{\sqrt{3}+i}\right|$.

Rješenje. (a) Imamo

$$\overline{\left(\frac{i^5+i^6}{i^3-i^2}\right)}=\overline{\left(\frac{i-1}{-i+1}\right)}=\overline{\left(\frac{i-1}{-(i-1)}\right)}=\overline{-1}=-1.$$

(b) Imamo

$$\left|\frac{\left(\sqrt{2}+i\right)\left(\sqrt{2}-i\right)}{\sqrt{3}+i}\right|=\left|\frac{3}{\sqrt{3}+i}\right|=\frac{|3|}{\left|\sqrt{3}+i\right|}=\frac{3}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}}=\frac{3}{2}.$$

2. (1 + 1) Zapišite u euklidskom obliku ($z = x + iy$ sa $x, y \in \mathbb{R}$) sljedeće kompleksne brojeve:

(a) $e^{\pi i}$

(b) $\dfrac{\sqrt{3}\, e^{\frac{19\pi}{6} i}}{\sqrt{27}\, e^{\frac{20\pi}{3} i}}$.

Rješenje. (a) Imamo

$$e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \cdot 0 = -1.$$

(b) Imamo

$$\frac{\sqrt{3}\, e^{\frac{19\pi}{6} i}}{\sqrt{27}\, e^{\frac{20\pi}{3} i}} = \frac{1}{3} e^{\left(\frac{19\pi}{6} - \frac{20\pi}{3}\right) i} = \frac{1}{3} e^{-\frac{7\pi}{2} i} = \frac{1}{3} \left(\cos\left(-\frac{7\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right) \right) = \frac{1}{3} i.$$

3. $(1+1)$ Zapišite u eksponencijalnom obliku sljedeće kompleksne brojeve:

(a) -5

(b) $5-5\sqrt{3}i$.

Rješenje. (a) Primijetimo da je $-5 = x + iy$ za $x = -5$ i $y = 0$, pa polarne koordinate (r, φ) broja $z = -5$ možemo izračunati kako slijedi:

- $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-5)^2+0^2} = 5.$
- Za φ možemo uzeti bilo koji realan broj koji zadovoljava sustav

  $$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{-5}{5} = -1 \\ \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{0}{5} = 0, \end{cases}$$

  dakle bilo koji od brojeva

  $$\pi + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

  Uzmimo npr. $k = 0$; dobivamo $\varphi = \pi$.

Dakle,

$$z = re^{i\varphi} = 5e^{\pi i}.$$

(Odabirom nekog drugog $k \in \mathbb{Z}$ dobiva se ekvivalentno rješenje; npr., stavimo li $k = -1$, dobivamo $z = 5e^{-\pi i}$.)

(b) Primijetimo da je $5 - 5\sqrt{3}i = x + iy$ za $x = 5$ i $y = -5\sqrt{3}$, pa polarne koordinate (r, φ) broja $z = 5 - 5\sqrt{3}i$ možemo izračunati kako slijedi:

- $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{5^2 + \left(-5\sqrt{3}\right)^2} = 10.$
- Za φ možemo uzeti bilo koji realan broj koji zadovoljava sustav

  $$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{-5\sqrt{3}}{10} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

  dakle bilo koji od brojeva

  $$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

  Uzmimo npr. $k = 0$; dobivamo $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

Dakle,

$$z = re^{i\varphi} = 10e^{-\frac{\pi}{3}i}.$$

(Odabirom nekog drugog $k \in \mathbb{Z}$ dobiva se ekvivalentno rješenje; npr., stavimo li $k = 1$, dobivamo $z = 10e^{\frac{5\pi}{3}i}$.)

4. (1 + 1) Odredite sva rješenja u $\mathbb{C}$ sljedećih jednadžbi:

(a) $z^5 = \sqrt{3} + i$

(b) $(2z-1)^8 = -256.$

Rješenje. Sjetimo se da za $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ i $w = |w|e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ vrijedi

$$z^n = w \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ za neki } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\,. \tag{1}$$

(a) Kao u Zad. 3 vidimo da je eksponencijalni zapis broja $w = \sqrt{3} + i$ dan sa $w = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$ pa uvrštavanjem podataka $n = 5$, $|w| = 2$ i $\theta = \frac{\pi}{6}$ u (1) dobivamo da je rješenje zadane jednadžbe dano sa

$$z = \sqrt[5]{2} \cdot e^{\left(\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5}\right)i} \quad \text{za neki } k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

(b) Kao u Zad. 3 vidimo da je eksponencijalni zapis broja $w = -256$ dan sa $w = 256e^{\pi i}$ pa uvrštavanjem podataka $n = 8$, $|w| = 256$ i $\theta = \pi$ u (1) dobivamo

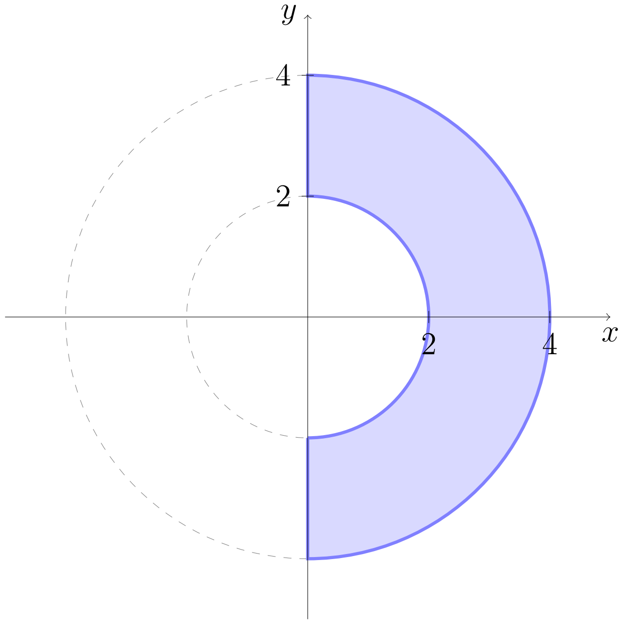
$$\begin{aligned}(2z-1)^8 = -256 \quad &\Leftrightarrow \quad 2z - 1 = 2e^{\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\right)i} \quad \text{za neki } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ &\Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{2} + e^{\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\right)i} \quad \text{za neki } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.\end{aligned}$$

5. (1 + 1) Skicirajte sljedeće dijelove kompleksne ravnine:

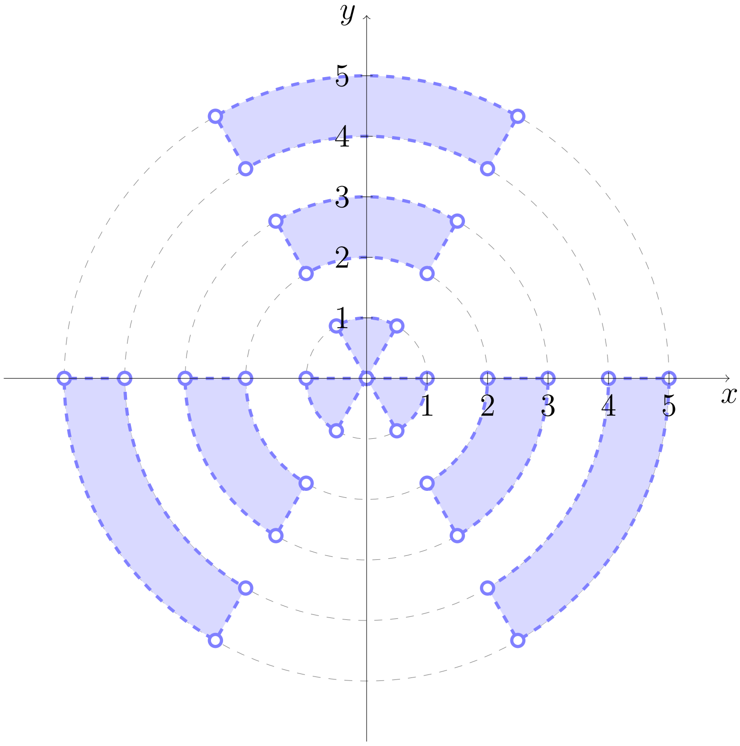
(a) $\left\{re^{i\varphi} : r \in [2,4],\ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$

(b) $\left\{re^{i\varphi} : r \in \langle 0,1\rangle \cup \langle 2,3\rangle \cup \langle 4,5\rangle\,,\ \varphi \in \left\langle \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\rangle \cup \left\langle \pi, \frac{4\pi}{3}\right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\rangle\right\}.$

Rješenje. (a)



(b)



.