# Zadaci za vježbu

**Zadatak 1.** Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) := \frac{x-2}{x+2}. \tag{1}$$

**Rješenje.**

(1) Domena: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\} = \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -2, +\infty\rangle$.
$\rightsquigarrow$ Rubovi domene: $-\infty, -2, +\infty$.

(2) $f$ nije ni parna ni neparna ni periodična.

(3) Nultočke: 2.

(4) $f'(x) = \frac{(x+2)-(x-2)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2} > 0$
$\rightsquigarrow$ Nema stacionarnih točaka.

(5) $f''(x) = -\frac{8}{(x+2)^3}$.
Očito $f''(x) \neq 0$ za sve $x \in \mathcal{D}_f$.
Nadalje, $f''(x) > 0 \iff -\frac{8}{(x+2)^3} > 0 \iff (x+2)^3 < 0 \iff x+2 < 0 \iff x < -2$.

**Tablica:** (Predznak od $f$ na svakom od intervala $\langle -\infty, -2\rangle$, $\langle -2, 2\rangle$ i $\langle 2, +\infty\rangle$ može se odrediti npr. uvrštavanjem po jedne točke iz svakog od tih intervala u formulu (1).)

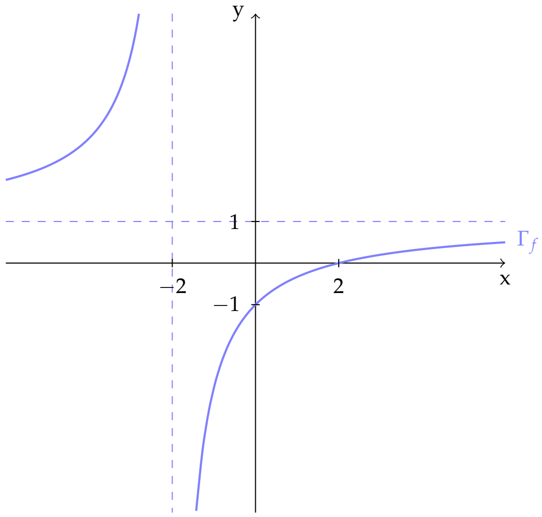
| | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | × | $\nearrow \cup$ | × | $\nearrow \cap$ | 0 | $\nearrow \cap$ | × |
| $f$ | × | $+$ | × | $-$ | 0 | $+$ | × |
| $f'$ | × | $+$ | × | $+$ | | $+$ | × |
| $f''$ | × | $+$ | × | $-$ | | $-$ | × |
| $f$ | $1 \leftarrow$ | | $\rightarrow +\infty \mid -\infty \leftarrow$ | | $0$ | | $\rightarrow 1$ |

(6) Asimptote: za svaki rub domene $c \in \{\pm\infty, -2\}$, zanima nas: $x \to c \Rightarrow f(x) \to ?$

- $x \to \pm\infty \Rightarrow \dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{x-2}{x+2} \cdot \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}} \to 1$. $\rightsquigarrow$ $y = 1$ je horizontalna asimptota funkcije $f$.

- $x \to -2\pm \Rightarrow \dfrac{x-2}{x+2} \to \left(\dfrac{-4}{0\pm}\right) = \mp\infty$. $\rightsquigarrow$ $x = -2$ je vertikalna asimptota funkcije $f$.

(7) Skiciramo graf (zgodno je primijetiti da je $f(0) = -1$ pa je $(0, -1)$ na $\Gamma_f$):



**Zadatak 2.** Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) := \frac{x+1}{x(x+3)}. \tag{2}$$

**Rješenje.**

(1) Domena: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\} = \langle -\infty, -3\rangle \cup \langle -3, 0\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$.
$\rightsquigarrow$ Rubovi domene: $-\infty, -3, 0, +\infty$.

(2) $f$ nije ni parna ni neparna ni periodična.

(3) Nultočke: $-1$.

(4) Odredimo najprije rastav funkcije $f$ na parcijalne razlomke (ovo nije neophodno, ali olakšava izračun prve i druge derivacije i njihovih nultočaka): primijetite da je $f$ prava racionalna funkcija, pa trebamo samo odrediti $A, B \in \mathbb{R}$ za koje je

$$\frac{x+1}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3},$$

tj., množenjem sa $x(x+3)$,

$$x+1 = A(x+3) + Bx,$$

tj.

$$x+1 = (A+B)x + 3A.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz pojedine potencije od $x$ dobivamo sustav

$$\begin{cases} A+B = 1 \\ 3A = 1, \end{cases}$$

čije je rješenje $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{2}{3}$. Dakle,

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x+3}.$$

Sad lako izračunamo: $f'(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(x+3)^2} < 0$.
$\rightsquigarrow$ $f$ nema stacionarnih točaka.

(5) Imamo

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(x+3)^2}\right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{(x+3)^3} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x^3} + \frac{2}{(x+3)^3}\right). \tag{3}$$

Imamo

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \;&\Leftrightarrow\; \frac{1}{x^3} = -\frac{2}{(x+3)^3} \\ &\Leftrightarrow\; \frac{1}{x} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{x+3} \qquad \text{(uzimanjem } \sqrt[3]{\cdot}\text{)} \\ &\Leftrightarrow\; x+3 = -\sqrt[3]{2}\,x \qquad \text{(množenjem sa } x(x+3) \neq 0 \text{ za } x \in \mathcal{D}_f\text{)} \\ &\Leftrightarrow\; x = -\frac{3}{\sqrt[3]{2}+1} = -1.327... \end{aligned}$$

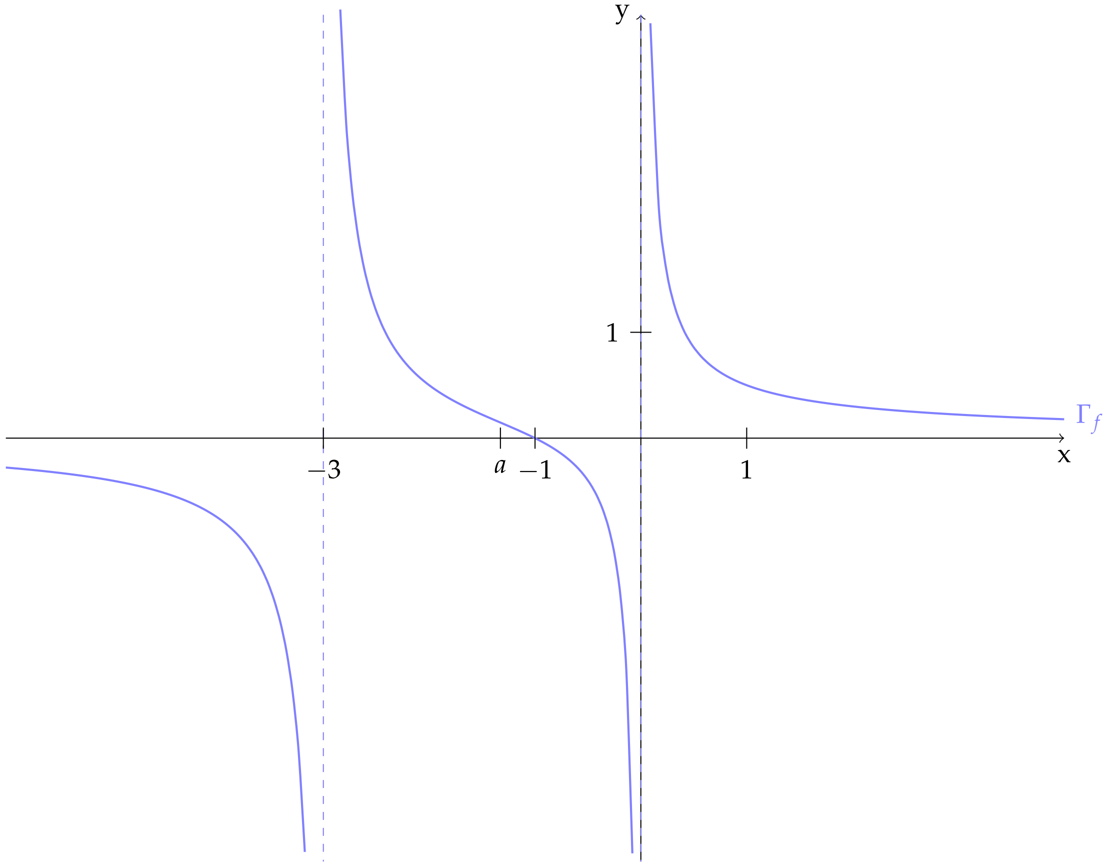
**Tablica:** (Predznak od $f$ na svakom od intervala $\langle -\infty, -3\rangle$, $\langle -3, -1\rangle$, $\langle -1, 0\rangle$ i $\langle 0, +\infty\rangle$ može se odrediti npr. uvrštavanjem po jedne točke iz svakog od tih intervala u formulu (2). Analogno se odredi predznak od $f''$ na svakom od intervala $\langle -\infty, -3\rangle$, $\left\langle -3, -\frac{3}{\sqrt[3]{2}+1}\right\rangle$, $\left\langle -\frac{3}{\sqrt[3]{2}+1}, 0\right\rangle$ i $\langle 0, +\infty\rangle$ uvrštavanjem u (3).)

|  | $-\infty$ |  | $-3$ |  | $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}+1}$ |  | $-1$ |  | $0$ |  | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $\times$ | $\searrow\cap$ | $\times$ | $\searrow\cup$ |  | $\searrow\cap$ | $0$ | $\searrow\cap$ | $\times$ | $\searrow\cup$ | $\times$ |
| $f$ | $\times$ | $-$ | $\times$ | $+$ |  | $+$ | $0$ | $-$ | $\times$ | $+$ | $\times$ |
| $f'$ | $\times$ | $-$ | $\times$ | $-$ |  | $-$ |  | $-$ | $\times$ | $-$ | $\times$ |
| $f''$ | $\times$ | $-$ | $\times$ | $+$ | $0$ | $-$ |  | $-$ | $\times$ | $+$ | $\times$ |
| $f$ | $0 \leftarrow$ | $\to -\infty$ |  | $+\infty \leftarrow$ | $0.147...$ |  | $0$ | $\to -\infty$ |  | $+\infty \leftarrow$ | $\to 0$ |

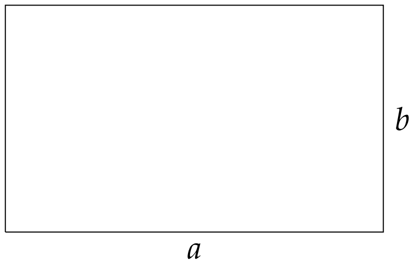
(6) Asimptote: za svaki rub domene $c \in \{\pm\infty, -3, 0\}$, zanima nas: $x \to c \;\Rightarrow\; f(x) \to ?$

- $x \to \pm\infty \;\Rightarrow\; \dfrac{x+1}{x(x+3)} = \dfrac{x+1}{x(x+3)} \cdot \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x}} \to 0.$ $\rightsquigarrow$ $y = 0$ je horizontalna asimptota funkcije $f$.
- $x \to -3\pm \;\Rightarrow\; \dfrac{x+1}{x(x+3)} \to \left(\dfrac{-2}{-3\cdot(0\pm)}\right) = \pm\infty.$ $\rightsquigarrow$ $x = -3$ je vertikalna asimptota funkcije $f$.
- $x \to 0\pm \;\Rightarrow\; \dfrac{x+1}{x(x+3)} \to \left(\dfrac{1}{(0\pm)\cdot 3}\right) = \pm\infty.$ $\rightsquigarrow$ $x = 0$ je vertikalna asimptota funkcije $f$.

(7) Skiciramo $\Gamma_f$ ($a := -\frac{3}{\sqrt[3]{2}+1}$):



**Zadatak 3.** Dokažite da među pravokutnicima površine $P\,\text{cm}^2$ kvadrat ima najmanji opseg.




**Rješenje.** Neka su $a\,\text{cm}$ i $b\,\text{cm}$ duljine stranica pravokutnika površine $P\,\text{cm}^2$. Tada je $P = ab$ pa je

$$b = \frac{P}{a}. \tag{4}$$

Odredimo $a$ i $b$ za koje je opseg, označimo ga sa $o\,\text{cm}$,

$$o = 2(a+b) \overset{(4)}{=} 2\left(a + \frac{P}{a}\right) \tag{5}$$

minimalan. Iz (5) vidimo da $o$ možemo izraziti kao funkciju od $a$:

$$o : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}, \qquad o(a) := 2\left(a + \frac{P}{a}\right).$$

Odredimo njene ekstreme. Imamo $o'(a) = 2\left(1 - \frac{P}{a^2}\right)$. Dakle, za $a \in \langle 0 + \infty\rangle$ vrijedi:

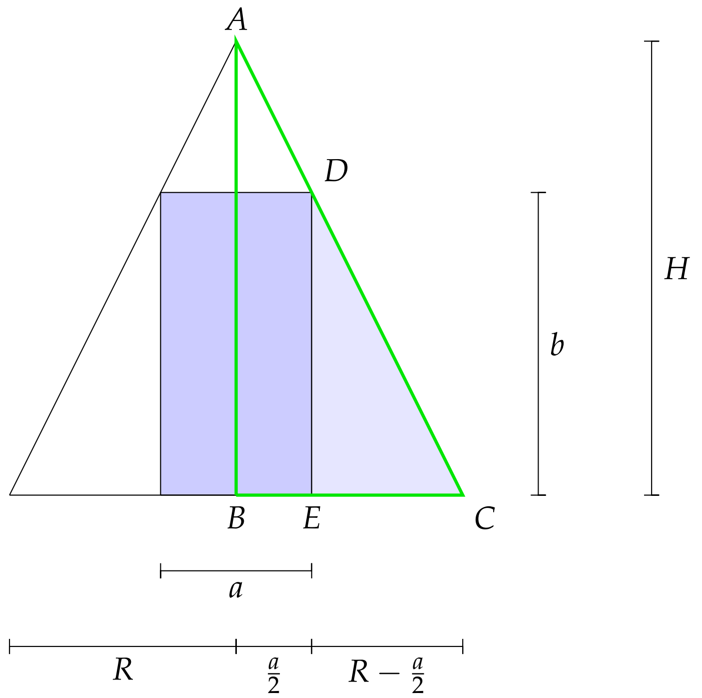
- $o'(a) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{P}{a^2} = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{P}$.
- $o'(a) > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{P}{a^2} > 0 \Leftrightarrow a > \sqrt{P}$.

Prema tome, rast i pad funkcije $o$ možemo predočiti tablicom

| | 0 | $\sqrt{P}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $o$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | |
| $o'$ | $-$ | $+$ | |

iz koje je jasno da je opseg $o(a)$ najmanji kad je $a = \sqrt{P}$. U tom je slučaju $b \overset{(4)}{=} \frac{P}{\sqrt{P}} = \sqrt{P} = a$, tj. pravokutnik je kvadrat.

**Zadatak 4.** U jednakokračan trokut s osnovicom duljine $2R$ cm i visinom na osnovicu duljine $H$ cm upišite pravokutnik čija je jedna stranica na osnovici trokuta tako da bude maksimalne površine.




**Rješenje.** Neka je $a$ cm duljina stranice pravokutnika koja leži na osnovici trokuta, a $b$ cm duljina njoj susjedne stranice. Uz oznake kao na slici, jasno je da su trokuti $ABC$ i $DEC$ slični (imaju jednake kutove), pa su omjeri njihovih stranica nasuprot odgovarajućim kutovima isti; posebno je $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EC|}$, tj.

$$\frac{H}{b} = \frac{R}{R - \frac{a}{2}},$$

dakle

$$b = H\frac{R - \frac{a}{2}}{R} = H\left(1 - \frac{a}{2R}\right). \tag{6}$$

Tražimo $a$ i $b$ za koje je površina pravokutnika, označimo je sa $P$ cm$^2$, maksimalna. Imamo

$$P = ab \overset{(6)}{=} aH\left(1 - \frac{a}{2R}\right) = H\left(a - \frac{a^2}{2R}\right),$$

odakle vidimo da $P$ možemo izraziti kao funkciju od $a$:

$$P : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}, \qquad P(a) := H\left(a - \frac{a^2}{2R}\right).$$

Odredimo njene ekstreme.

**1. način:** Imamo $P'(a) = H\left(1 - \frac{a}{R}\right)$. Dakle, za $a \in \langle 0 + \infty\rangle$ vrijedi:

- $P'(a) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{a}{R} = 0 \Leftrightarrow a = R.$
- $P'(a) > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{a}{R} > 0 \Leftrightarrow a < R.$

Prema tome, rast i pad funkcije $P$ možemo predočiti tablicom

| | $0$ — $R$ | $R$ — $+\infty$ |
|---|---|---|
| $P$ | $\nearrow$ | $\searrow$ |
| $P'$ | $+$ | $-$ |

iz koje je jasno da je površina $P(a)$ najveća kad je $a = R$. U tom je slučaju $b \overset{(6)}{=} H\left(1 - \frac{R}{2R}\right) = \frac{H}{2}$.

**2. način:** Primijetimo da je $P$ kvadratna funkcija,

$$P(a) = -\frac{H}{2R}a^2 + Ha,$$

čiji je graf parabola okrenuta otvorom prema dolje pa maksimum postiže u $x$-koordinati tjemena, tj. za

$$a = -\frac{H}{2 \cdot \left(-\frac{H}{2R}\right)} = R.$$

U tom je slučaju $b \overset{(6)}{=} H\left(1 - \frac{R}{2R}\right) = \frac{H}{2}$.