Integriranje racionalnih funkcija

Sonja Žunar

22. prosinca 2017.

Ponavljanje: rastav u parcijalne razlomke

(Npr. dijeljenjem polinoma s ostatkom) svaka racionalna funkcija r može se zapisati u obliku

$$r(x) = \text{polinom} + \underbrace{\frac{p(x)}{q(x)}}_{\substack{\textbf{prava}\text{ racionalna funkcija,} \\ \text{tj. } \deg p < \deg q.}}$$

Primjer

$$\frac{x^5 + x^3 - x^2 + 1}{x^3 - 1} = x^2 + 1 + \frac{2}{x^3 - 1}.$$

Ponavljanje: rastav u parcijalne razlomke

Faktoriziramo nazivnik funkcije $\frac{p(x)}{q(x)}$, tj. zapišemo

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{A(x+B_1)^{k_1}\cdots(x+B_n)^{k_n}(x^2+C_1x+D_1)^{l_1}\cdots(x^2+C_mx+D_m)^{l_m}}$$

tako da vrijedi:

- $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $x + B_1, \ \ldots, \ x + B_n$ su međusobno različiti linearni polinomi.
- $x^2 + C_1x + D_1, \ \ldots, \ x^2 + C_mx + D_m$ su međusobno različiti kvadratni polinomi bez realnih nultočaka, tj. diskriminante < 0.
- $k_1, \ldots, k_n, l_1, \ldots, l_m \in \mathbb{N}$.

Primjer

$$\frac{2}{x^3-1} = \frac{2}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Ponavljanje: rastav u parcijalne razlomke

$\dfrac{p(x)}{q(x)}$ se rastavlja na **parcijalne razlomke**:

$$
\begin{aligned}
\frac{p(x)}{q(x)} = & \frac{*}{x+B_1} + \frac{*}{(x+B_1)^2} + \dots + \frac{*}{(x+B_1)^{k_1}} \\
& + \frac{*}{x+B_2} + \frac{*}{(x+B_2)^2} + \dots + \frac{*}{(x+B_2)^{k_2}} \\
& + \dots \\
& + \frac{*}{x+B_n} + \frac{*}{(x+B_n)^2} + \dots + \frac{*}{(x+B_n)^{k_n}} \\
& + \frac{*x+*}{x^2+C_1x+D_1} + \frac{*x+*}{(x^2+C_1x+D_1)^2} + \dots + \frac{*x+*}{(x^2+C_1x+D_1)^{l_1}} \\
& + \dots \\
& + \frac{*x+*}{x^2+C_mx+D_m} + \frac{*x+*}{(x^2+C_mx+D_m)^2} + \dots + \frac{*x+*}{(x^2+C_mx+D_m)^{l_m}}
\end{aligned}
$$

za jedinstven izbor realnih koeficijenata $*$.

Integriranje racionalnih funkcija

Neka je r racionalna funkcija. Da bismo izračunali

$$\int r(x)\,dx,$$

najprije zapišemo

$$r(x) = p(x) + r_1(x) + \ldots + r_n(x),$$

gdje je p polinom, a $r_1, \ldots, r_n$ su parcijalni razlomci. $\rightsquigarrow$ Imamo

$$\int r(x)\,dx = \underbrace{\int p(x)\,dx}_{\text{znamo}} + \underbrace{\int r_1(x)\,dx + \ldots + \int r_n(x)\,dx}_{\text{naučit ćemo}}.$$

Klasični trikovi za integriranje “kompliciranijih” parcijalnih razlomaka

Trik A

Za $a, A, B \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+a^2}\,dx = \underbrace{\int \frac{Ax}{x^2+a^2}\,dx}_{\text{supstitucijom } t=x^2+a^2} + B\underbrace{\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx}_{\text{tablični integral}}.$$

Trik B

Za $A, B, b, c \in \mathbb{R}$ takve da je $D = b^2 - 4ac < 0$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,dx &= \int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}}\,dx \\
&= \left[t = x + \frac{b}{2}\right] \\
&= \int \frac{At + B - \frac{Ab}{2}}{t^2 + c - \frac{b^2}{4}}\,dt.
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Sad smo u slučaju A!

Trik C

Za $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{(x^2+a^2) - x^2}{(x^2+a^2)^2}\, dx \\
&= \frac{1}{a^2} \int \left(\frac{1}{x^2+a^2} - \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} \right) dx \\
&= \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \underbrace{\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\, dx}_{=:I}.
\end{aligned}
$$

Nadalje,

$$\begin{aligned}
I &= \int x \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\,dx \\
&= \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\,dx & v = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+a^2} \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.
\end{aligned}$$

…i analogno za još kompliciranije parcijalne razlomke.