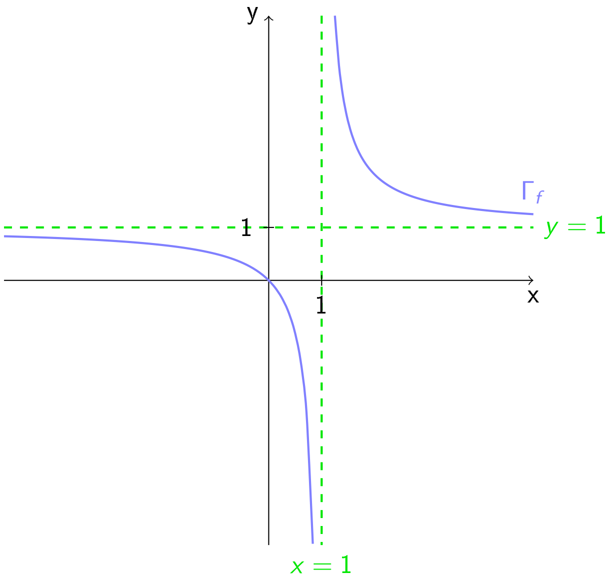
# Asimptote i neki trikovi za određivanje limesa

Sonja Žunar

8. studenoga 2018.

# Primjer: $f(x) := 1 + \frac{1}{x-1}$



# Horizontalne asimptote

Neka je $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ako za neki $a \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to a$$

ili

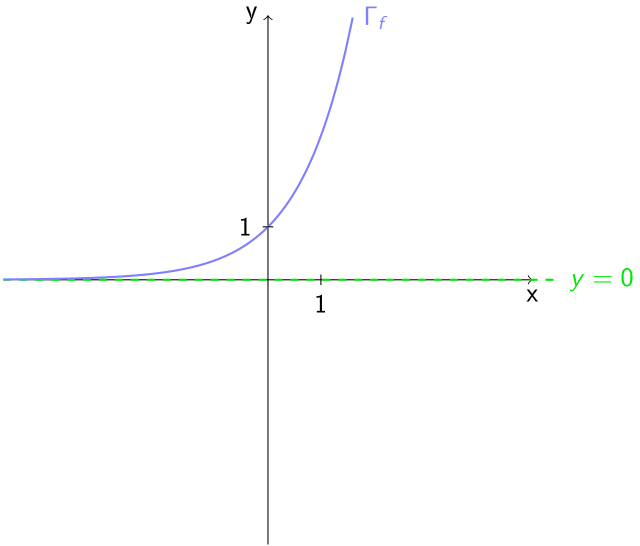
$$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to a$$

($\to$ := "približava se, teži, konvergira"), tada kažemo da je pravac

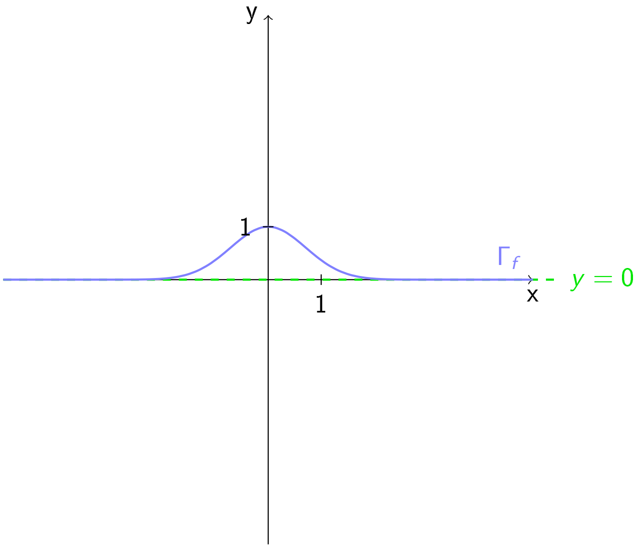
$$y = a$$

**horizontalna asimptota** funkcije $f$.

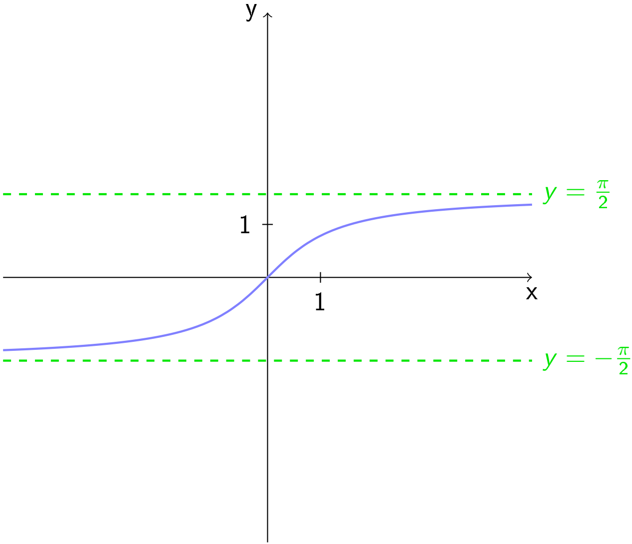
# Primjer: $f(x) := e^x$



Primjer: $f(x) := e^{-x^2}$



# Primjer: $f(x) := \operatorname{arctg} x$



## Primjer: Horizontalne asimptote funkcije $f(x) := \dfrac{1}{x^2 - 1}$

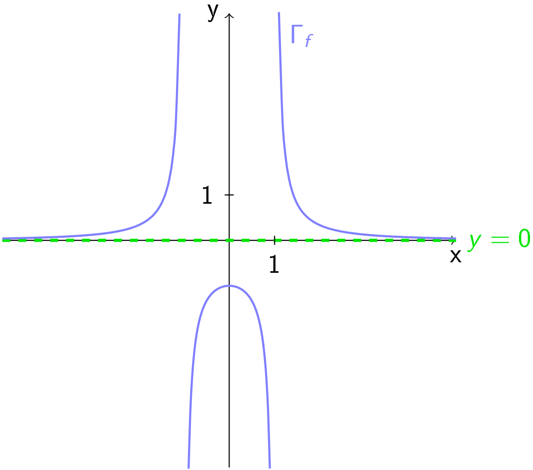
$$x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2-1} \to 0.$$

$\rightsquigarrow$ Pravac $y = 0$ je jedina horizontalna asimptota funkcije $f$.

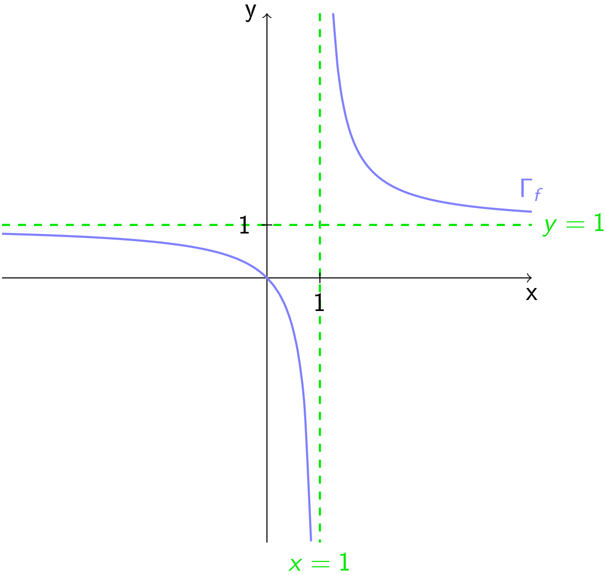
## Primjer: Horizontalne asimptote funkcije $f(x) := \dfrac{1}{x^2 - 1}$

$$x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2-1} \to 0.$$

$\rightsquigarrow$ Pravac $y = 0$ je jedina horizontalna asimptota funkcije $f$.



# Primjer s početka: $f(x) := 1 + \frac{1}{x-1}$



# Vertikalne asimptote

Neka je $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ako za neki $c \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\underbrace{x \to c-}_{\substack{\text{“}x\text{ se približava }c\text{ slijeva”:}\\ x\to c \text{ sa } x<c}} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \to \pm\infty$$

ili

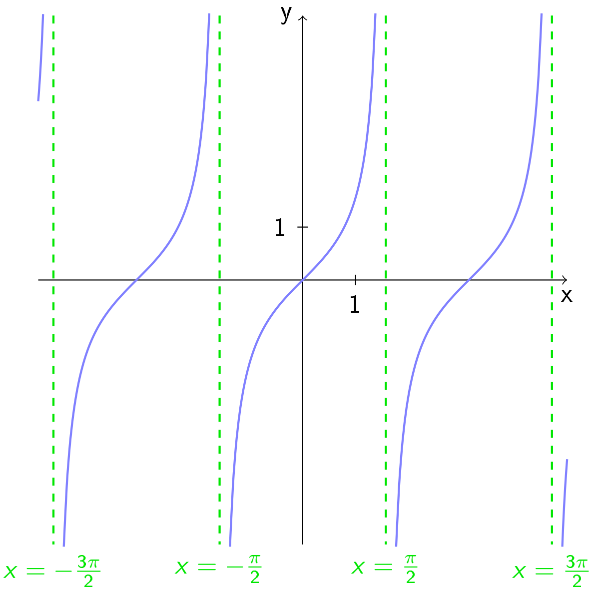
$$\underbrace{x \to c+}_{\substack{\text{“}x\text{ se približava }c\text{ zdesna”:}\\ x\to c \text{ sa } x>c}} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \to \pm\infty,$$

tada kažemo da je pravac

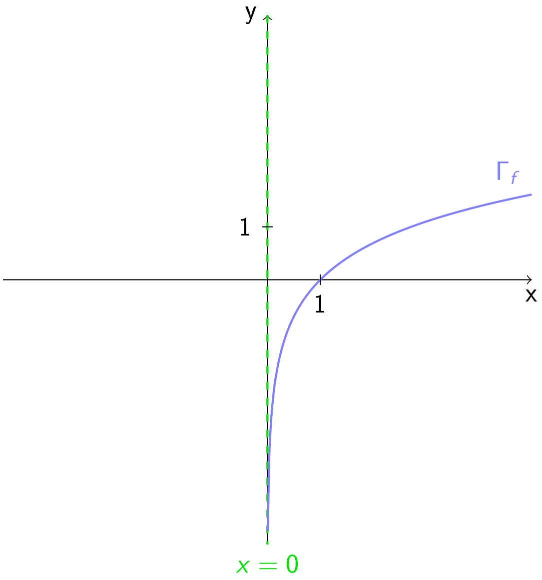
$$x = c$$

**vertikalna asimptota** funkcije $f$.

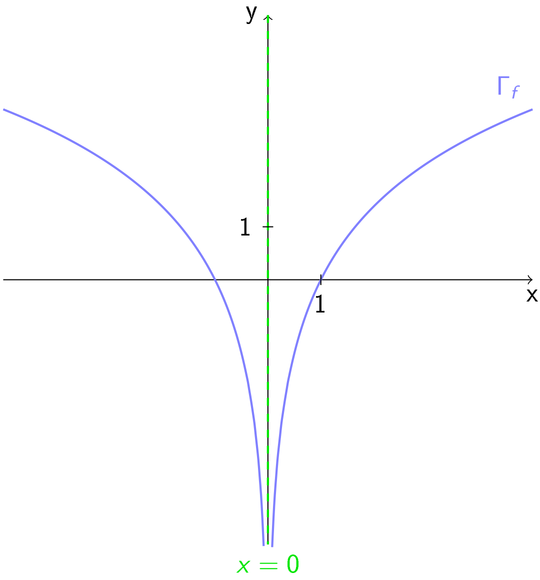
# Primjer: $f(x) := \operatorname{tg} x$



# Primjer: $f(x) := \ln x$



# Primjer: $f(x) := \ln\left(x^2\right)$



# Vertikalne asimptote

U našim su primjerima jedini kandidati za vertikalne asimptote funkcije $f$ pravci oblika

$$x = c,$$

gdje je $c \in \mathbb{R}$ rub domene funkcije $f$.

## Primjer: Vertikalne asimptote funkcije $f(x) := \dfrac{1}{x^2 - 1}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} = \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$.

$$x \to -1\pm \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2 - 1} \to \mp\infty.$$

$$x \to 1\pm \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2 - 1} \to \pm\infty.$$

$\rightsquigarrow$ Pravci $x = -1$ i $x = 1$ su vertikalne asimptote funkcije $f$.

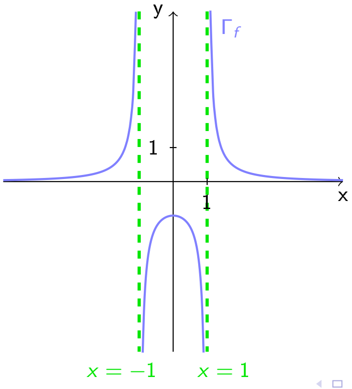
## Primjer: Vertikalne asimptote funkcije $f(x) := \dfrac{1}{x^2-1}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} = \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle.$

$$x \to -1\pm \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2-1} \to \mp\infty.$$

$$x \to 1\pm \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2-1} \to \pm\infty.$$

$\rightsquigarrow$ Pravci $x = -1$ i $x = 1$ su vertikalne asimptote funkcije $f$.



## Tri korisne činjenice za proučavanje ponašanja funkcija u $\pm\infty$, tj.

$$x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to ?$$

# 1. Polinomi

Neka su $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ i $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$$

u $\pm\infty$ se ponaša kao njegov vodeći član $a_n x^n$.

## Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad -x^{100} + x^{99} \to -\infty$
- $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad 1000 - x + x^5 - x^2 + x^4 \to -\infty$

# 2. Racionalne funkcije

Racionalne je funkcije ponekad zgodno proširiti sa $\dfrac{1}{x^m}$, pri čemu je $x^m$ najveća potencija od $x$ u nazivniku.

## Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x-2}{-2x+3} = \dfrac{x-2}{-2x+3} \cdot \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{1-\frac{2}{x}}{-2+\frac{3}{x}} \to -\dfrac{1}{2}.$
- $x \to -\infty \Rightarrow \dfrac{x^5}{1-x^2} = \dfrac{x^5}{1-x^2} \cdot \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{x^3}{\frac{1}{x^2}-1} \to \left(\dfrac{-\infty}{-1}\right) = +\infty.$

## 3. “Eksponencijalne su funkcije u $\pm\infty$ jače od racionalnih funkcija.”

Neka je $r(x)$ nekonstantna racionalna funkcija. Neka je $p(x)$ nekonstantan polinom. Definiramo

$$f(x) := r(x)e^{p(x)}.$$

Vrijedi:

$$x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to 0, \text{ tada } f(x) \to 0. \\ \bullet \text{ Ako } e^{p(x)} \to +\infty, \text{ tada } f(x) \to +\infty \text{ ili} \\ \quad f(x) \to -\infty, \text{ ovisno o predznaku funkcije} \\ \quad r(x) \text{ za } x \to \pm\infty. \end{cases}$$

### Primjer

- $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^{1000}}_{\to +\infty} \underbrace{e^{-x^2}}_{\to 0} \to 0$
- $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x^5 e^x} = \underbrace{\dfrac{1}{x^5}}_{\to 0-} \underbrace{e^{-x}}_{\to +\infty} \to -\infty.$