# Matematika 1 za kemičare

drugi kolokvij, 28. siječnja 2019.

Franka Miriam Brückler & Sonja Žunar

**Napomene.** Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dopuštene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni bodovi pripisuju se s negativnim predznakom.

**Odvojeno predajte:**

- rješenja zadataka **1.** – **3.**
- rješenja zadataka **4.** – **5.**

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

**1.(10 + 10 + 10)** Izračunajte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(e^{\sin x}-1\right)x}{2\sin^2 x}$

(b) $\displaystyle\int \left(x^2-2x\right)2^x \,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\,(1+(\ln x)^2)}$.

**2.(20)** Skicirajte dio ravnine omeđen pravcem

$$y = 5$$

i grafovima funkcija

$$f(x) := 1 + 2^x \qquad \text{i} \qquad g(x) := 1 + 2^{-x}$$

te izračunajte njegovu površinu.

**3.(10 + 10)**

(a) Odredite kanonski oblik jednadžbe pravca $p$ koji je okomit na $x$-os i na $z$-os i prolazi točkom $(3, 2, 1)$.

(b) Odredite kanonski oblik jednadžbe pravca $q$ koji je okomit na ravninu

$$\pi \ldots \ x + z = 0$$

i siječe tu ravninu u točki $(1, 0, -1)$.

Okrenite!

**4.(10)** Langmuirova izoterma je jedan od modela adsorpcije. Radi se o formuli ovisnosti adsorbiranog volumena $V$ o parcijalnom tlaku adsorbanta, $p_\mathrm{A}$:

$$\frac{p_\mathrm{A}}{V} = \frac{p_\mathrm{A}}{V_\infty} + \frac{1}{KV_\infty}.$$

Pritom su $K$ i $V_\infty$ pozitivne konstante. Koliki je prosječni adsorbirani volumen za raspon parcijalnih tlakova adsorbanta od 13,3 kPa do 93,3 kPa, ako je $K = 7{,}51 \cdot 10^{-3}$ kPa$^{-1}$ i $V_\infty = 111$ mL?

**5.(20)** Plošnozemska je dvodimenzionalni svijet u kojem žive dvodimenzionalna bića. Naravno, i kristali u tom svijetu su dvodimenzionalni i izrastaju u oblike mnogokuta. Kristalografski koordinatni sustav zadan je ishodištem $O$ i bazom ravnine $\vec{a}$, $\vec{b}$ (s parametrima $a$, $b$ i $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$, pri čemu se parametri određuju isključivo iz mjerenja i mogu imati samo racionalne iznose). Paralelogram određen bazom je jedinična ćelija, a rubovi kristala nastaju rastom u smjerovima mrežnih pravaca, tj. pravaca koji prolaze kroz dvije i stoga kroz beskonačno mnogo točaka rešetke. Pojedini smjer mrežnih pravaca opisuje se Millerovim indeksima $(hk)$ koji opisuju pravce s jednadžbama $hx + ky = C \in \mathbb{N}$. Millerovi indeksi su uvijek maksimalno skraćeni cijeli brojevi.

(a) Izvedite formulu za $d_{hk}$, tj. za udaljenost dva susjedna pravca smjera $(hk)$, tako da ona vrijedi za sve $h$, $k$, $a$, $b$, $\gamma$.

(b) Za kakve $a$, $b$ i $\gamma$ su pravci okomiti na $\vec{a}$ mrežni pravci? Za takve $a$, $b$ i $\gamma$ odredite omjer $h : k$ Millerovih indeksa smjera okomitog na $\vec{a}$.

# Matematika 1 za kemičare

drugi kolokvij, 28. siječnja 2019.

Franka Miriam Brückler & Sonja Žunar

**Napomene.** Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dopuštene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni bodovi pripisuju se s negativnim predznakom.

**Odvojeno predajte:**

- rješenja zadataka **1.** – **3.**
- rješenja zadataka **4.** – **5.**

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

**1.(10 + 10 + 10)** Izračunajte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ \ln(1+2x)}{1-\cos x}$

(b) $\displaystyle\int \sin(2x)\cdot\left(x-x^2\right)\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2^x}{\left(2^x+1\right)^2}\,\mathrm{d}x.$

**2.(20)** Skicirajte dio ravnine omeđen pravcem

$$y=-10$$

i grafovima funkcija

$$f(x) := -3^x - 1 \qquad \text{i} \qquad g(x) := -3^{-x} - 1$$

te izračunajte njegovu površinu.

**3.(10 + 10)**

(a) Odredite kanonski oblik jednadžbe pravca $p$ koji je okomit na ravninu

$$\pi \ldots\ x+y=0$$

i siječe tu ravninu u točki $(1,-1,0)$.

(b) Odredite kanonski oblik jednadžbe pravca $q$ koji je okomit na $x$-os i na $y$-os i prolazi točkom $(-1,-2,-3)$.

Okrenite!

**4.(15)** Funkcija radijalne gustoće vjerojatnosti (tj. funkcija gustoće vjerojatnosti za udaljenost elektrona do jezgre) za 2s kisikovu orbitalu ima formulu

$$\varphi_{2\mathrm{s}}(r) = \frac{64}{a_0^3}\left(4r^2 - 32r^3/a_0 + 64r^4/a_0^2\right)\exp(-8r/a_0),$$

pri čemu je $r$ udaljenost elektrona do jezgre. Odredite očekivanu vrijednost $\langle r\rangle$ te udaljenosti (tzv. prosječni polumjer kisikove 2s orbitale) i vjerojatnost da se elektron kisikove 2s orbitale nađe na udaljenosti ne većoj od $\langle r\rangle$ od jezgre. Očekivani iznos slučajne varijable $X$ opisane funkcijom gustoće $f$ dobiva se formulom $\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$, a vjerojatnost da slučajna varijabla $X$ poprimi vrijednosti unutar intervala $[a,b]$ računa se formulom $P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Kao poznate možete koristiti formule

$$\int x^2\exp(-ax)\mathrm{d}x = -\exp(-ax)\frac{a^2x^2+2ax+2}{a^3} + C,$$

$$\int x^3\exp(-ax)\mathrm{d}x = -\exp(-ax)\frac{a^3x^3+3a^2x^2+6ax+6}{a^4} + C,$$

$$\int x^4\exp(-ax)\mathrm{d}x = -\exp(-ax)\frac{a^4x^4+4a^3x^3+12a^2x^2+24ax+24}{a^5} + C,$$

$$\int_0^{\infty} x^n\exp(-ax)\mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

**5.(15)** Kristalografska baza zadana je parametrima $a = 100$ pm, $b = 150$ pm, $c = 300$ pm, $\alpha = \gamma = 90°$, $\beta = 75°$. U kristalografiji se zonom nazivaju smjerovi mrežnih ravnina koje su istovremeno paralelne nekom pravcu $p$. Pravac $o$ kroz ishodište koji je paralelan s $p$ se tada naziva os zone. Odredite parametarske jednadžbe osi zone određene smjerovima $(20\bar{1})$ i $(1\bar{1}1)$ te odredite kutove koje os zone zatvara s koordinatnim osima.

# Matematika 1 za kemičare

drugi kolokvij, 28. siječnja 2019.

Franka Miriam Brückler & Sonja Žunar

**Napomene.** Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dopuštene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni bodovi pripisuju se s negativnim predznakom.

**Odvojeno predajte:**

- rješenja zadataka **1.** – **3.**
- rješenja zadataka **4.** – **5.**

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

**1.(10 + 10 + 10)** Izračunajte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(2x)}{(1-e^x)^2}$

(b) $\displaystyle\int 3^x\left(x-3x^2\right)\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{\mathrm{d}x}{((\ln x)^2+1)\,x}$.

**2.(20)** Skicirajte dio ravnine omeđen pravcem

$$y=-6$$

i grafovima funkcija

$$f(x):=-2-4^x \qquad \text{i} \qquad g(x):=-2-4^{-x}$$

te izračunajte njegovu površinu.

**3.(10 + 10)**

(a) Odredite kanonski oblik jednadžbe pravca $p$ koji je okomit na $y$-os i na $z$-os i prolazi točkom $(1,0,-1)$.

(b) Odredite kanonski oblik jednadžbe pravca $q$ koji je okomit na ravninu

$$\pi \ldots\ x-y=0$$

i siječe tu ravninu u točki $(1,1,0)$.

Okrenite!

**4.(10)** Michaelis-Menteničina jednadžba koristi se u enzimskoj kinetici. Radi se o formuli ovisnosti brzine $v$ stvaranja produkta o množinskoj koncentraciji [S] supstrata:

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_{\text{max}}} + \frac{K}{v_{\text{max}}[\text{S}]}.$$

Pritom su $K$ i $v_{\text{max}}$ pozitivne konstante. Kolika je prosječna brzina stvaranja produkta za raspon koncentracija [S] od 1,25 mmol $\text{L}^{-1}$ do $20,0$ mmol $\text{L}^{-1}$, ako je $K = 10,0\,\text{mmol L}^{-1}$ i $v_{\text{max}} = 0{,}250$ mmol $\text{L}^{-1}$ $\text{s}^{-1}$?

**5.(20)** Plošnozemska je dvodimenzionalni svijet u kojem žive dvodimenzionalna bića. Naravno, i kristali u tom svijetu su dvodimenzionalni i izrastaju u oblike mnogokuta. Kristalografski koordinatni sustav zadan je ishodištem $O$ i bazom ravnine $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ (s parametrima $a$, $b$ i $\gamma = \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$). Paralelogram određen bazom je jedinična ćelije, a rubovi kristala nastaju rastom u smjerovima mrežnih pravaca, tj. pravaca koji prolaze kroz dvije i stoga kroz beskonačno mnogo točaka rešetke. Pojedini smjer mrežnih pravaca opisuje se Millerovim indeksima $(hk)$ koji opisuju pravce s jednadžbama $hx + ky = C \in \mathbb{N}$. Millerovi indeksi su uvijek maksimalno skraćeni cijeli brojevi.

(a) Recipročna baza $\overrightarrow{a}^*$ i $\overrightarrow{b}^*$ za plošnozemske kristale sastoji se od vektora (koji naravno također leže u Plošnozemskoj) koji zadovoljavaju uvjete $\overrightarrow{a}^* \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}^* \cdot \overrightarrow{b} = 1$, $\overrightarrow{a}^* \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}^* \cdot \overrightarrow{a} = 0$. Odredite formule kojima se mogu eksplicitno izraziti $\overrightarrow{a}^*$ i $\overrightarrow{b}^*$ preko $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$.

(b) Dokažite da i u Plošnozemskoj vrijedi temeljni zakon recipročne rešetke: $d_{hk} \cdot |[h,k]^*| = 1$, gdje je $d_{hk}$ udaljenost dva susjedna pravca smjera $(hk)$.

# Matematika 1 za kemičare

drugi kolokvij, 28. siječnja 2019.

Franka Miriam Brückler & Sonja Žunar

**Napomene.** Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dopuštene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni bodovi pripisuju se s negativnim predznakom.

**Odvojeno predajte:**

- rješenja zadataka **1. – 3.**
- rješenja zadataka **4. – 5.**

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

**1.(10 + 10 + 10)** Izračunajte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{x\,\ln(x+1)}$

(b) $\displaystyle\int \left(3x^2-2x\right)\cos(2x)\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{3^x}{(3^x-1)^2}\,\mathrm{d}x.$

**2.(20)** Skicirajte dio ravnine omeđen pravcem

$$y=4$$

i grafovima funkcija

$$f(x):=5^x-1 \qquad \text{i} \qquad g(x):=5^{-x}-1$$

te izračunajte njegovu površinu.

**3.(10 + 10)**

(a) Odredite kanonski oblik jednadžbe pravca $p$ koji je okomit na ravninu

$$\pi \ldots\ y-z=0$$

i siječe tu ravninu u točki $(0,-1,-1)$.

(b) Odredite kanonski oblik jednadžbe pravca $q$ koji je okomit na $y$-os i na $x$-os i prolazi točkom $(1,2,3)$.

Okrenite!

**4.(15)** Funkcija radijalne gustoće vjerojatnosti (tj. funkcija gustoće vjerojatnosti za udaljenost elektrona do jezgre) za 3s flourovu orbitalu ima formulu

$$\varphi_{3\mathrm{s}}(r) = \frac{3}{a_0^7}\left(36a_0^4r^2 - 432a_0^3r^3 + 1728a_0^2r^4 - 2592a_0r^5 + 1296r^6\right)\exp(-6r/a_0),$$

pri čemu je $r$ udaljenost elektrona do jezgre. Odredite vjerojatnost da se elektron fluorove 3s orbitale nađe na udaljenosti ne manjoj od $a_0$ i ne većoj od $2a_0$ od jezgre. Vjerojatnost da slučajna varijabla $X$ poprimi vrijednosti unutar intervala $[a,b]$ računa se formulom $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Kao poznate možete koristiti formule

$$\int x^2\exp(-ax)\mathrm{d}x = -\exp(-ax)\frac{a^2x^2+2ax+2}{a^3}+C,$$

$$\int x^3\exp(-ax)\mathrm{d}x = -\exp(-ax)\frac{a^3x^3+3a^2x^2+6ax+6}{a^4}+C,$$

$$\int x^4\exp(-ax)\mathrm{d}x = -\exp(-ax)\frac{a^4x^4+4a^3x^3+12a^2x^2+24ax+24}{a^5}+C,$$

$$\int x^5\exp(-ax)\mathrm{d}x = -\exp(-ax)\frac{a^5x^5+5a^4x^4+20a^3x^3+60a^2x^2+120ax+120}{a^6}+C,$$

$$\int x^6\exp(-ax)\mathrm{d}x = -\exp(-ax)\frac{a^6x^6+6a^5x^5+30a^4x^4+120a^3x^3+360a^2x^2+720ax+720}{a^7}+C.$$

**5.(15)** Nađite formule za kutove $\alpha^* = \angle(\overrightarrow{b}^*, \overrightarrow{c}^*)$, $\beta^* = \angle(\overrightarrow{a}^*, \overrightarrow{c}^*)$ i $\gamma^* = \angle(\overrightarrow{a}^*, \overrightarrow{b}^*)$. Ovise li ti kutovi o duljinama vektora baze? Izračunajte ih za bazu zadanu parametrima $a = 1{,}50$ Å, $b = 2{,}75$ Å, $c = 3{,}00$ Å, $\alpha = 80°$, $\beta = 75°$, $\gamma = 60°$. Kao poznatu smijete koristiti sljedeću formulu:

$$(\overrightarrow{t}\times\overrightarrow{u})\cdot(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{t}\cdot\overrightarrow{v})(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}) - (\overrightarrow{t}\cdot\overrightarrow{w})(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}).$$