

Matematika 1 za kemičare

prvi kolokvij, 22. studenog 2018.

Franka Miriam Brückler & Sonja Žunar

Napomene. Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dopuštene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni bodovi pripisuju se s negativnim predznakom.

Odvojeno predajte:

- rješenja zadataka 1. – 4.
- rješenje zadatka 5.

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

1.(20) Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) := \frac{\log\left(e^x - \frac{1}{e}\right)}{(e^{4x} - 2e^{2x} + 1) \cdot \arcsin\left(x + \frac{1}{2}\right)}.$$

2.(10 + 10) Izračunajte prvu derivaciju funkcija:

(a) $f(x) := (\cos(\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{ctg} x))^2$

(b) $f(x) := \ln x \cdot \frac{2^x}{3^x}$.

3.(10 + 10) Zadana je funkcija $f : \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := (\sin(2x))^2.$$

(a) Odredite jednadžbe svih tangenti na graf funkcije f koje su paralelne x -osi.

(b) Odredite sve $x_0 \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ sa svojstvom da je tangenta na graf funkcije f povučena u točki $(x_0, f(x_0))$ okomita na pravac $y = x$.

4.(20) Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) := 1 - e^{\frac{1}{2} - x^2}.$$

Okrenite!

5.(20) Jedna od jednađbi stanja realnog plina koja se povremeno koristi je Dietericijeva jednađba:

$$p = \frac{RT}{V_m - b} \exp\left(-\frac{a}{RTV_m}\right).$$

Temperaturu T (u K) smatramo konstantnom, a molarni volumen V_m (u $\text{m}^3 \text{mol}^{-1}$) varijablom. Konstante a i b su pozitivne konstante ovisne o sastava plina, a $R = 8,3145 \text{ J K}^{-1} \text{mol}^{-1}$. Koje su jedinice od a i b ? Kakav treba biti odnos a i b da bi funkcija tlaka u ovisnosti o molarnom volumenu imala dvije nenegativne stacionarne točke? Za a i b koji zadovoljavaju taj uvjet provjerite da su obje stacionarne točke točke lokalnih ekstrema (i kojih) te skicirajte ovisnost p o V_m . Kao poznato možete koristiti da za jako velike x iznosi $\frac{x}{e^x}$ postaju jako blizu 0.

Matematika 1 za kemičare

prvi kolokvij, 22. studenog 2018.

Franka Miriam Brückler & Sonja Žunar

Napomene. Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dopuštene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni bodovi pripisuju se s negativnim predznakom.

Odvojeno predajte:

- rješenja zadataka 1. – 4.
- rješenje zadatka 5.

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

1.(20) Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) := \frac{\arccos \frac{x-2}{3}}{\ln(16-x^2) \cdot (4^x - 2^{x+1} + 1)}.$$

2.(10 + 10) Izračunajte prvu derivaciju funkcija:

(a) $f(x) := \frac{3^x \sin x}{\cos x}$

(b) $f(x) := (\operatorname{tg}(\operatorname{ctg}(2 \sin^2 x - 1)))^3$.

3.(10 + 10) Zadana je funkcija $f : \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := 2 - (\cos(2x))^2.$$

(a) Odredite jednadžbe svih tangenti na graf funkcije f koje su paralelne x -osi.

(b) Odredite sve $x_0 \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ sa svojstvom da je tangenta na graf funkcije f povučena u točki $(x_0, f(x_0))$ okomita na pravac $y = x$.

4.(20) Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) := 3^{1-x^2} + 1.$$

Okrenite!

5.(20) Arrheniusova jednadžba opisuje ovisnost koeficijenta brzine reakcije k o temperaturi T i glasi

$$k = Ae^{-E_a/(RT)}.$$

U Kartezijevom ($T/\text{K}, k/A$) koordinatnom sustavu skicirajte ovisnost k o T ; sami odaberite prikladne raspone osi tako da su vidljive sve bitne karakteristike grafa. Argumentirajte kako ste dobili grafički prikaz. Objasnite kako biste u konkretnom slučaju iz poznavanja točke infleksije funkcije k mogli odrediti energiju aktivacije E_a . Ako promatramo dvije reakcije s istim preeksponencijalnim faktorom A , koja je brža (ima veći k) — ona s većom ili ona s manjom energijom aktivacije, ili pak odnos njihovih koeficijenata brzine ovisi o temperaturi? Skicirajte (kvalitativno) kako će se u ($T/\text{K}, k/A$) koordinatnom sustavu odnositi grafički prikazi ovisnosti k o T za dvije reakcije s različitim E_a i jednakim A (jasno naznačite koja krivulja prikazuje k za veću E_a , a koja za manju).

Matematika 1 za kemičare

prvi kolokvij, 22. studenog 2018.

Franka Miriam Brückler & Sonja Žunar

Napomene. Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dopuštene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni bodovi pripisuju se s negativnim predznakom.

Odvojeno predajte:

- rješenja zadataka 1. – 4.
- rješenje zadatka 5.

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

1.(20) Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) := \frac{\log\left(\frac{1}{2} - 2^{x-2}\right)}{\arcsin\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (e^{8x} - 2e^{4x} + 1)}.$$

2.(10 + 10) Izračunajte prvu derivaciju funkcija:

(a) $f(x) := (\sin(\operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{tg} x))^4$

(b) $f(x) := \frac{4^x}{5^x \ln x}$.

3.(10 + 10) Zadana je funkcija $f : \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := (\cos(2x))^2.$$

(a) Odredite jednadžbe svih tangenti na graf funkcije f koje su paralelne x -osi.

(b) Odredite sve $x_0 \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ sa svojstvom da je tangenta na graf funkcije f povučena u točki $(x_0, f(x_0))$ okomita na pravac $y = -x$.

4.(20) Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) := 2 - 2^{\frac{1}{2} - x^2}.$$

Okrenite!

5.(20) Koncentracija međuprodukta (u mehanizmu konsektivnih reakcija) tijekom reakcije prvo konkavno raste do neke maksimalne vrijednosti (globalni maksimum), a onda postepeno pada prema nuli (što više vremena prođe, to je koncentracija bliža nuli, ali nikad osim u početnom trenutku nije nula). Skicirajte primjer grafa koji zadovoljava navedene uvjete. Osmislite neku moguću funkciju koja opisuje ovisnost koncentracije međuprodukta o vremenu proteklom od početka reakcije i argumentirajte zašto Vaša formula zadovoljava navedene uvjete (ili bar što više njih).

Matematika 1 za kemičare

prvi kolokvij, 22. studenog 2018.

Franka Miriam Brückler & Sonja Žunar

Napomene. Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dopuštene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni bodovi pripisuju se s negativnim predznakom.

Odvojeno predajte:

- rješenja zadataka **1.** – **4.**
- rješenje zadatka **5.**

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

1.(20) Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) := \frac{\arccos \frac{x}{2}}{\left(16^x - 4^{x+\frac{1}{2}} + 1\right) \cdot \log_2(2 - x^3)}.$$

2.(10 + 10) Izračunajte prvu derivaciju funkcija:

(a) $f(x) := \frac{\cos x \cdot 5^x}{\sin x}$

(b) $f(x) := (\operatorname{ctg}(\operatorname{tg}(1 - 2\cos^2 x)))^5.$

3.(10 + 10) Zadana je funkcija $f : \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := 2 - (\sin(2x))^2.$$

(a) Odredite jednadžbe svih tangenti na graf funkcije f koje su paralelne x -osi.

(b) Odredite sve $x_0 \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ sa svojstvom da je tangenta na graf funkcije f povučena u točki $(x_0, f(x_0))$ okomita na pravac $y = -x$.

4.(20) Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) := -3^{1-x^2} - 1.$$

Okrenite!

5.(20) Jedan od važnih modela u kvantnoj fizici je model čestice u jednodimenzionalnoj kutiji, tj. materijalne točke mase m koja se može gibati unutar segmenta $[0, L]$. Za svaku moguću energiju čestice $E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$ (n je kvantni broj i prirodan je, a h je Planck-ova konstanta) čestica je opisana valnom funkcijom $\psi_n : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$. Skicirajte prvih pet valnih funkcija (dakle, onih koje odgovaraju kvantnim brojevima od 1 do 5) u istom koordinatnom sustavu. Argumentirajte kako ste dobili te prikaze. Odgovara li većoj energiji valna funkcija većeg ili manjeg perioda? Zašto?