Bijekcije i inverzne funkcije

Sonja Žunar

20. listopada 2016.

Definicija

Funkcija $f : D \to K$ je **bijekcija** ako

za svaki $y \in K$ postoji točno jedan $x \in D$ takav da je $f(x) = y$.

Nepreciznije: “Svaki $y \in K$ pogođen je točno jednom.”

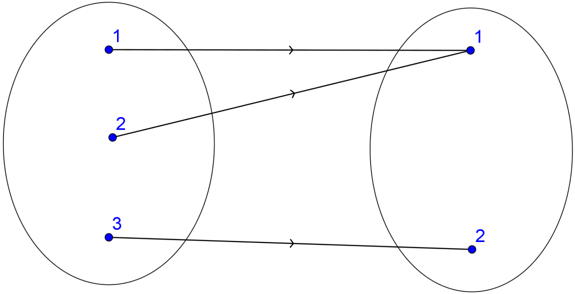
Definicija

Funkcija $f : D \to K$ je **bijekcija** ako

za svaki $y \in K$ postoji točno jedan $x \in D$ takav da je $f(x) = y$.

Nepreciznije: "Svaki $y \in K$ pogođen je točno jednom."

PR.:



$\rightsquigarrow$ Nije bijekcija ($1 \in K$ je pogođen dvaput).

Bijekcija

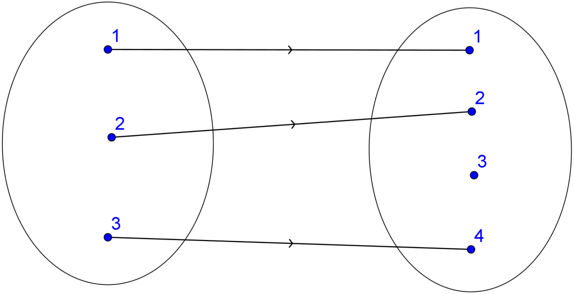
Definicija

Funkcija $f : D \to K$ je **bijekcija** ako

za svaki $y \in K$ postoji točno jedan $x \in D$ takav da je $f(x) = y$.

Nepreciznije: "Svaki $y \in K$ pogođen je točno jednom."

PR.:



$\rightsquigarrow$ Nije bijekcija ($3 \in K$ je pogođen 0 puta).

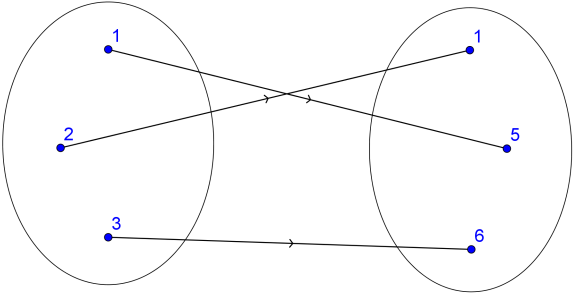
Definicija

Funkcija $f : D \to K$ je **bijekcija** ako

$$\text{za svaki } y \in K \text{ postoji točno jedan } x \in D \text{ takav da je } f(x) = y.$$

Nepreciznije: "Svaki $y \in K$ pogođen je točno jednom."

PR.:



$\rightsquigarrow$ Bijekcija (svaki $y \in K$ pogođen je točno jednom).

Bijekcija

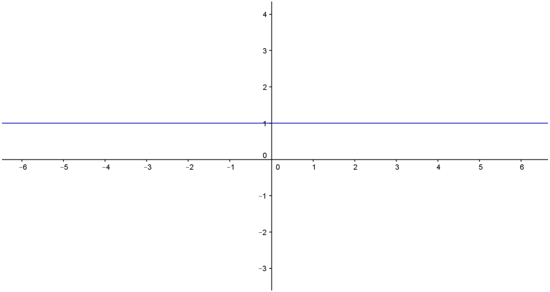
Definicija

Funkcija $f : D \to K$ je **bijekcija** ako

za svaki $y \in K$ postoji točno jedan $x \in D$ takav da je $f(x) = y$.

Nepreciznije: "Svaki $y \in K$ pogođen je točno jednom."

PR.:



$\rightsquigarrow$ $f(x) := 1$ nije bijekcija ($1 \in K = \mathbb{R}$ je pogođen ∞, a svaki $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ 0 puta).

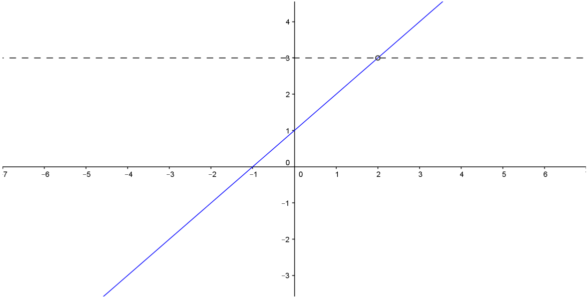
Definicija

Funkcija $f : D \to K$ je **bijekcija** ako

za svaki $y \in K$ postoji točno jedan $x \in D$ takav da je $f(x) = y$.

Nepreciznije: "Svaki $y \in K$ pogođen je točno jednom."

PR.:



$\rightsquigarrow$ $f(x) := x + 1$ je bijekcija (svaki $y \in K = \mathbb{R}$ pogođen je točno jednom).

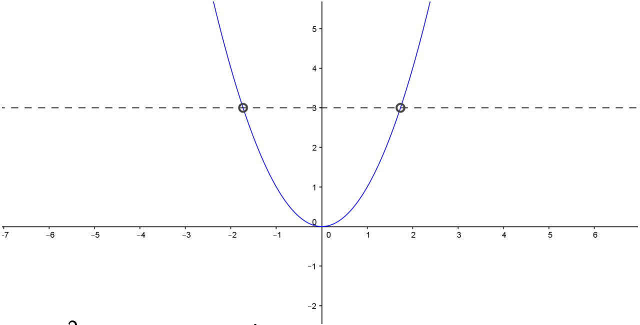
Definicija

Funkcija $f : D \to K$ je **bijekcija** ako

za svaki $y \in K$ postoji točno jedan $x \in D$ takav da je $f(x) = y$.

Nepreciznije: "Svaki $y \in K$ pogođen je točno jednom."

PR.:



$\rightsquigarrow f(x) := x^2$ nije bijekcija (npr. $y = 1 \in K = \mathbb{R}$ je pogođen dvaput).

Inverzna funkcija

Funkcija $g : K \to D$ **inverzna** je funkciji $f : D \to K$ ako vrijedi

$$g(f(x)) = x \qquad \text{za sve } x \in D$$

i

$$f(g(y)) = y \qquad \text{za sve } y \in K.$$

Oznaka: $g =: f^{-1}$.

Funkcija $g : K \to D$ **inverzna** je funkciji $f : D \to K$ ako vrijedi

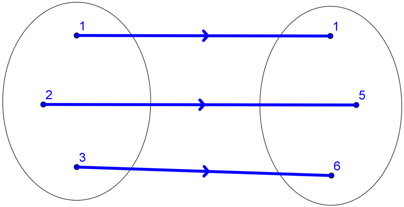
$$g(f(x)) = x \qquad \text{za sve } x \in D$$

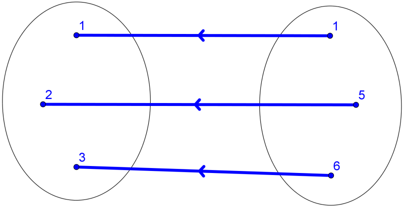
i

$$f(g(y)) = y \qquad \text{za sve } y \in K.$$

Oznaka: $g =: f^{-1}$.

Primjer: f f^{-1}





Inverzna funkcija

Teorem

Funkcija $f : D \to K$ ima inverznu funkciju ako i samo ako je bijekcija, i u tom je slučaju njena inverzna funkcija f^{-1} jedinstvena.

Teorem

Funkcija $f : D \to K$ ima inverznu funkciju ako i samo ako je bijekcija, i u tom je slučaju njena inverzna funkcija f^{-1} jedinstvena.

Poanta pojma inverzne funkcije (za bijekciju $f : D \to K$):

$$x \xmapsto{f} y \qquad \Leftrightarrow \qquad x \xleftarrow{f^{-1}} y,$$

tj.

$$f(x) = y \qquad \Leftrightarrow \qquad x = f^{-1}(y).$$