3 Funkcije operatora

Želimo za analitičku (tj. holomorfnu) funkciju $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ i linearni operator A na kompleksnom vektorskom prostoru definirati linearni operator $f(A)$.

Neka je V kompleksni konačno-dimenzionalni vektorski prostor i $A \in L(V)$. Označimo s $\mathcal{F}(A)$ skup svih funkcija f kompleksne varijable takvih da postoje $f(\lambda_k)$, $f'(\lambda_k)$, $\ldots$, $f^{(p_k-1)}(\lambda_k)$ za svaki $k \in \{1, \ldots, s\}$, gdje su p_1, $\ldots$, p_s eksponenti i λ_1, $\ldots$, λ_s svojstvene vrijednosti iz zapisa njegovog minimalnog polinoma: $\mu_A(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda - \lambda_k)^{p_k}$.

Definicija. Neka je V kompleksni konačno-dimenzionalni vektorski prostor, $A \in L(V)$, njegov minimalni polinom $\mu_A(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda - \lambda_k)^{p_k}$, $f \in \mathcal{F}(A)$, (e) Jordanova baza operatora A i

$$A(e) = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & \lambda_k & 1 & & & \\ & & \lambda_k & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & \lambda_k & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Definiramo operator $f(A)$ kao linearni operator čiji je matrični prikaz u bazi (e)

$$f(A)(e) = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & \frac{f^{(0)}(\lambda_k)}{0!} & \frac{f'(\lambda_k)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(l-1)}(\lambda_k)}{(l-1)!} & \\ & & \frac{f^{(0)}(\lambda_k)}{0!} & \ddots & \vdots & \\ & & & \ddots & \frac{f'(\lambda_k)}{1!} & \\ & & & & \frac{f^{(0)}\lambda_k}{0!} & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Napomena. Nije očigledno da gornja definicija $f(A)$ ne ovisi o izboru Jordanove baze (e). No, za polinom $p(\lambda)$ otprije znamo što je $p(A)$ i to se podudara s gornjom definicijom $p(A)(e)$ za cijelu funkciju p (svaki polinom je cijela funkcija). Tvrdnja za svaku funkciju $f \in \mathcal{F}(A)$ slijedi onda iz sljedećeg teorema.

Teorem. (Lagrange-Sylvesterov interpolacijski polinom) Postoji jedinstven polinom $p(\lambda)$ stupnja $< m$ ($m := \mathrm{st}(\mu_A) = p_1 + \ldots + p_s$) takav da vrijedi $p^{(j)}(\lambda_k) = f^{(j)}(\lambda_k)$, $k = 1, \ldots, s$, $j = 0, \ldots, p_k - 1$.

Naravno, tada je $p(A)(e) = f(A)(e)$ pa je $p(A) = f(A)$.

Napomena. Ako su f, $g \in \mathcal{F}(A)$, onda iz definicije vidimo da vrijedi:

$$f(A) = g(A) \quad \Leftrightarrow \quad f^{(j)}(\lambda_k) = g^{(j)}(\lambda_k),\ \forall k = 1, \ldots, s,\ \forall j = 0, \ldots, p_k - 1.$$

Svojstva pridruživanja $f \mapsto f(A)$ navedena su u sljedećem teoremu.

Teorem. Neka je V kompleksni konačno-dimenzionalni vektorski prostor, $A \in L(V)$ i njegov minimalni polinom $\mu_A(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda - \lambda_k)^{p_k}$. Tada vrijedi:

(1) Ako je $f(\lambda) \equiv 1$, onda je $f(A) = I$. Ako je $f(\lambda) \equiv \lambda$, onda je $f(A) = A$.

(2) Ako je A regularan i $f(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$, onda je $f(A) = A^{-1}$.

(3) Za $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(A)$ i $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ vrijedi: $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \mathcal{F}(A)$ i $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(A) = \alpha_1 f_1(A) + \alpha_2 f_2(A)$.

(4) Za $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(A)$ vrijedi: $f_1 f_2 \in \mathcal{F}(A)$ i $(f_1 f_2)(A) = f_1(A) f_2(A)$.

(5) Ako za f, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A)$ vrijedi $f_n^{(j)}(\lambda_k) \to f^{(j)}(\lambda_k)$ za sve $k = 1, \ldots, s$, $j = 0, \ldots, p_k - 1$, onda $f_n(A) \to f(A)$.

(6) Za $f \in \mathcal{F}(A)$ vrijedi: $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$. (Teorem o preslikavanju spektra operatora)

(7) Ako je $f \in \mathcal{F}(A)$ i $g \in \mathcal{F}(f(A))$, onda je $g \circ f \in \mathcal{F}(A)$ i vrijedi $(g \circ f)(A) = g(f(A))$. (Teorem o kompoziciji funkcija operatora)

Teorem. Neka je V kompleksni konačno-dimenzionalni vektorski prostor, $A \in L(V)$, njegov minimalni polinom $\mu_A(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda - \lambda_k)^{p_k}$, te $m = \mathrm{st}(\mu_A) = p_1 + \ldots + p_s$. Tada vrijedi:

(1) Postoje jedinstveni polinomi $g_{kj}(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$, $k = 1, \ldots, s$, $j = 0, \ldots, p_k - 1$, stupnja $< m$ takvi da za svaku funkciju $f \in \mathcal{F}(A)$ vrijedi

$$f(A) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=0}^{p_k-1} f^{(j)}(\lambda_k) g_{kj}(A).$$

Štoviše, skup $\{g_{kj}(\lambda) \mid k = 1, \ldots, s,\ j = 0, \ldots, p_k - 1\}$ je linearno nezavisan u vektorskom prostoru polinoma $\mathbb{C}[\lambda]$.

(2) **Opći oblik funkcije operatora A.** Postoje jedinstveni linearni operatori $P_{kj} \in L(V)$, $k = 1, \ldots, s$, $j = 0, \ldots, p_k - 1$, takvi da za svaku funkciju $f \in \mathcal{F}(A)$ vrijedi

$$f(A) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=0}^{p_k-1} f^{(j)}(\lambda_k) P_{kj}.$$

(Oni su dani s $P_{kj} = g_{kj}(A)$.) Štoviše, skup $\{P_{kj} \mid k = 1, \ldots, s,\ j = 0, \ldots, p_k - 1\}$ je linearno nezavisan u $L(V)$.

Zadatak 1. $A \in L(\mathbb{C}^3)$ u kanonskoj bazi ima matricu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte $\sin A - e^A$.

Zadatak 2. $A \in L(\mathbb{C}^4)$ u kanonskoj bazi ima matricu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da li postoji $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{16}(A+I)(A^2+I)\right)$?

Zadatak 3. Operator $A \in L(\mathbb{C}^3)$ u nekoj bazi od $\mathbb{C}^3$ ima matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da li postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $e^{\alpha A^2} = \cos A$?

Zadatak 4. Operator $N \in L(\mathbb{C}^{2004})$ je nilpotentan indeksa $\operatorname{ind} N = 2$. Nađite polinom $p(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ prvog stupnja tako da vrijedi $\cos(\cos N) - \sin(\sin N) = p(N)$.

Zadatak 5. Linearni operator $A \in L(\mathbb{C}^4)$ zadan je u kanonskoj bazi matricom

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dokažite da je skup $\left\{e^A, A^2 - 2A + 2I\right\}$ linearno zavisan u vektorskom prostoru $L(\mathbb{C}^4)$.

Zadatak 6. Linearni operator $A \in L(\mathbb{C}^{1000})$ ima sprektar $\sigma(A) = \{-3, 0, 2\}$. Za svaki od sljedećih operatora ispitajte regularnost i nilpotentnost.

(a) $\cos(\pi A)$

(b) $A^3 + A^2 - 6A$

(c) $e^{A^3+A^2} - e^{6A}$

(d) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}\sin(\frac{\pi}{2}A))$

(e) $2(A+I)^{-1} - I$

Zadatak 7. Koji sve realni brojevi mogu biti svojstvene vrijednosti linearnog operatora A na nekom kompleksnom konačno-dimenzionalnom vektorskom prostoru za koji vrijedi $(A^{2006} - I)^{2006} - I = 0$?

Zadatak 8. $A \in L(\mathbb{C}^3)$ u kanonskoj bazi ima matricu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 6 \\ 8 & -15 & -1 \\ 16 & -15 & 3 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte $\sin^2(\frac{\pi}{4}A) + \operatorname{tg}(\frac{\pi}{8}A) + 100A^{-1}$.

Teorem. Neka red potencija $f(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \alpha_m z^m$ konvergira na krugu $K(0, R)$ i neka je $|\lambda_j| < R$ za sve svojstvene vrijednosti λ_j od A. Tada red $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \alpha_m A^m$ konvergira i $f(A) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \alpha_m A^m$.

Zadatak 9. Dokažite $e^{T^{-1}AT} = T^{-1}e^A T$.

Zadatak 10. Izračunajte e^A za $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ koristeći se dijagonalizacijom i tvrdnjom prethodnog zadatka.

Zadatak 11. Izračunajte e^A kao sumu reda za $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Zadatak 12. Dokažite $e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A}$.

Zadatak 13. Dokažite $\frac{d}{dt}e^{tA} = A\,e^{tA} = e^{tA}A$.

Zadatak 14. Izračunajte A^{100} za $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ kao polinom od A.

Zadatak 15. Operator $A \in L(\mathbb{C}^5)$ u nekoj bazi od $\mathbb{C}^5$ ima matricu

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & & & \\ & -3 & 1 & & \\ & & -3 & & \\ & & & -3 & 1 \\ & & & & -3 \end{bmatrix}.$$

Za analitičku funkciju $f(\lambda) = \cos(\lambda^2 - 9) + 10(\lambda + 3)^2$ izračunajte matricu operatora $f(A)$ u istoj bazi.